リモートセンシング
ケプラーの 3 法則の導出

担当教員 奈佐原顕郎

生命環境科学研究科 環境科学専攻
201321229 山崎一磨

出題日 2013/06/20
提出日 2013/07/02

1　ケプラーの 3 法則とは

ドイツの天文学者 ヨハネス・ケプラーは，1619 年，惑星の運動について，以下の 3 つの法則を見出した[*1]:

法則 1　惑星は，太陽を 1 つの焦点とする楕円軌道を描く。
法則 2　惑星と太陽を結ぶ線分が単位時間あたりになでる面積（面積速度）は，常に一定である。
法則 3　惑星の公転周期の 2 乗は，楕円軌道の長半径の 3 乗に比例する。

これらの法則は，惑星の運動を説明するものであるが，惑星に限らず，質量の大きな天体を質量の小さな天体が周回する場合は常に成立する。たとえば，地球を周回する人工衛星の運動もこれら 3 法則を満たす。衛星リモセンとしても重要な法則である。

ケプラーは，デンマークの天文学者 ティコ・ブラーエが観測した膨大な数値データから，（8 年もの歳月をかけて）これらの法則を経験的に導いたが，これらの 3 法則は，数学と物理法則から理論的に導くことが可能である。このレポートでは，これらの 3 法則を導出することを目標とする。

[*1] この法則が発表された当時は，未だ天動説が主流であり，なおかつ，天体の軌道は真円であると考えられていた（宇宙は神聖なものであり，その中を運行する星々の軌道は完璧な形（真円）である，と信じられていた）。そのため，ケプラーの法則は長いあいだ認められることがなかった。というか，教会によって弾圧されさえした。望遠鏡が発明され天文学者のあいだに普及し，これらの法則を支持する証拠が数多く集まり，また，ニュートンが重力を発見したことで，（さらに言えば，天動説を信奉する老人が死んでいったため，）18 世紀に入ってようやく，これらの法則が広く認められるようになった。（「宇宙創成（上）」，サイモン・シン，新潮文庫，第 1 章）

2 準備

2.1 状況設定

2 つの質点からなる系を考える。系に生じる力は，質点が生み出す重力のみで，系の外から及ぶ力（外力）は存在しないものとする。

質量 M の質点 E（たとえば地球）の周りを，質量 m の質点 S（たとえば人工衛星）が回転しているとする[*2]。この回転は周期的に繰り返されていて，質点 S が，時間の経過とともに，どこか遠方に行ってしまったり，質点 E に引き込まれていくようなことは考えない。

質点 E と質点 S は互いに重力によって引き合っているが，質量 M が質量 m に比べて充分に大きいため，質点 E は，質点 S の影響を受けて位置を変えることはないとする[*3]。

回転の軌道が xy 平面に乗るように正規直交系を設定する（図 1）。質点 E の位置に原点を置き，質点 E と質点 S との距離が最も短くなる位置（近地点）に向けて x 軸を張る。時刻 t における質点 S の位置を $\mathbf{x} = (x(t), y(t))$ と書く。質点 S の原点から距離を $r(t)$，x 軸からの成す角を $\theta(t)$ とすると，$(x(t), y(t)) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と書くこともできる。

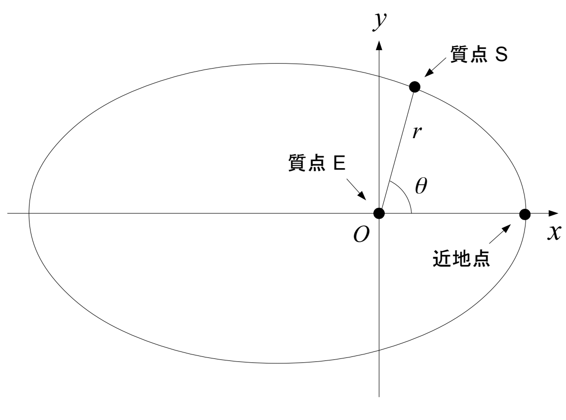

図 1　座標系の設定

---

*2 「回転」と聞くと，何となく真円を思い浮かべるが，周回軌道の形は今のところ不明とする。不明である周回軌道の形が楕円であると示すのが，ケプラーの第一法則であるとも言える。

*3 まどろっこしい言い方だが，「質点 E は空間中の 1 点に固定されている」と言ってしまうと，「地球，公転してるじゃん」と言われて困ることになるので。

2.2　質点 S の力学的エネルギー

質点 S の力学的エネルギー E は，

$$E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - \frac{GMm}{r} \qquad (\mathbf{v}^2 := \mathbf{v} \bullet \mathbf{v}) \tag{2.1}$$

ここで，$\mathbf{v}$ は質点 S の速度，G は万有引力定数である。質点 S に働く力は重力（保存力）のみであるため，力学的エネルギー E は時刻によらず一定である（力学的エネルギー保存則）。

2.3　質点 S の角運動量

質点 S の角運動量 $\mathbf{L}$ は，

$$\mathbf{L} := \mathbf{x} \times (m\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} mv_x \\ mv_y \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xv_y - yv_x \end{pmatrix}$$

$\mathbf{L}$ の大きさ L は，

$$L := |\mathbf{L}| = m(xv_y - yv_x) \tag{2.2}$$

質点に働く外力がなく，なおかつ質点の間に生じる重力は中心力であるため，角運動量 $\mathbf{L}$ は時刻によらず一定である（角運動量保存則）。当然，L も時刻によらず一定である。

3　ケプラーの第一法則

まず，前節で考えた式 (2.1),(2.2) を使って，$r(\theta)$ の関数形を明らかにする。続いて，2 次曲線の一般的な性質と $r(\theta)$ の関数形を比較し，質点 S の軌道が楕円になることを証明する。

3.1　$r(\theta)$ の関数形

まずは $\mathbf{v}^2$ を r と θ で書き下す（これ以降，変数の真上についたドットは t での微分を表す）:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &:= \frac{d}{dt}(x, y) = \frac{d}{dt}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ &= (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\dot{\theta},\ \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\dot{\theta}) \\ \mathbf{v}^2 &= (\dot{x}, \dot{y}) \bullet (\dot{x}, \dot{y}) = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

続いて，$\dot{\theta}$ を変形する。式 (2.2) を使う:

$$\begin{aligned} &L = m(xv_y - yv_x) = m(r\cos\theta)(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\dot{\theta}) - (r\sin\theta)(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\dot{\theta}) \\ &L = mr^2\dot{\theta} \ \ \Leftrightarrow \ \ \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

さらに，$\dot{r}$ を変形する。r は，根源的には t の関数であるが，あえて θ の関数であるとみなす。つまり，$\dot{r} = \frac{d}{dt}(r(\theta(t))$ と考える:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{L}{mr^2} \qquad (\because \text{ 式 } (3.2))$$

ここで後のために $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$ と置いて，以降，r の代わりに u を用いる:

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= -\frac{du}{d\theta}\left(\frac{1}{u^2}\right)\frac{L}{mr^2} \qquad \left(\because \frac{dr}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{1}{u} = -\frac{du}{d\theta}\left(\frac{1}{u^2}\right)\right)\\
\dot{r} &= -\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta} \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

式 (2.1) を，u に関する θ の 2 階常微分方程式に帰着させる:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - \frac{GMm}{r}\\
&= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} \qquad (\because \text{ 式 } (3.1))\\
&= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2\right) - \frac{GMm}{r} \qquad (\because \text{ 式 } (3.2))\\
&= \frac{1}{2}m\left(-\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \qquad (\because \text{ 式 } (3.3))
\end{aligned}$$

整理して，r を u に置き換えると，

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = -u^2 + \frac{2GMm^2}{L^2}u + \frac{2mE}{L^2}$$

これを解けば $r(\theta)$ の形が決まる。まずは，右辺を平方完成する:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = -\left(u - \frac{GMm^2}{L^2}\right)^2 + \left(\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}$$

定数をまとめてしまう:

$$\begin{aligned}
\alpha &:= \frac{GMm^2}{L^2}\\
\beta^2 &:= \left(\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2} = \alpha^2 + \frac{2mE}{L^2}
\end{aligned}$$

これにより，

$$\begin{aligned}
\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 &= -(u-\alpha)^2 + \beta^2\\
\frac{du}{d\theta} &= \sqrt{\beta^2 - (u-\alpha)^2}\\
\int \frac{du}{\sqrt{\beta^2 - (u-\alpha)^2}} &= \int d\theta
\end{aligned}$$

ここで，$u-\alpha=\beta\sin\phi$ と置換する:

$$\begin{aligned}
\int\frac{(\beta\cos\phi\,d\phi)}{\sqrt{\beta^2-(\beta\sin\phi)^2}} &= \int d\theta \qquad (\because\ du=\beta\cos\phi\ d\phi\ ) \\
\int\frac{\beta\cos\phi}{\sqrt{\beta^2(1-\sin\phi)^2}}\ d\phi &= \int d\theta \\
\int\frac{\beta\cos\phi}{\sqrt{\beta^2\cos^2\phi}}\ d\phi &= \int d\theta \\
\int d\phi &= \int d\theta \\
\phi &= \theta+C \qquad (C\ \text{は積分定数}) \\
\sin^{-1}\left(\frac{u-\alpha}{\beta}\right) &= \theta+C \\
\frac{u-\alpha}{\beta} &= \sin(\theta+C) \\
u &= \alpha+\beta\sin(\theta+C) \\
r &= \frac{1}{\alpha+\beta\sin(\theta+C)}
\end{aligned}$$

積分定数を決めよう。座標系を上のように決めたので，$\theta=0$ のときに $r(\theta)$ が最小にならねばならない。つまり，$\theta=0$ で，$\alpha+\beta\sin(\theta+C)$ が最大にならねばならない。

β が正の場合 $\rightarrow$ C が $\frac{\pi}{2}$ で最大。このとき，

$$r(\theta)=\frac{1}{\alpha+\beta\sin(\theta+\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{\alpha+\beta\cos\theta}$$

β が負の場合 $\rightarrow$ C が $-\frac{\pi}{2}$ で最大。このとき，

$$r(\theta)=\frac{1}{\alpha-\beta\sin(\theta-\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{\alpha+\beta\cos\theta}$$

結局，$r(\theta)$ の関数形は以下のように定まる:

$$r(\theta)=\frac{1}{\alpha+\beta\cos\theta} \tag{3.4}$$

※ 後のために，以下のように変形しておく:

$$r(\theta)=\frac{\frac{1}{\alpha}}{1+\frac{\beta}{\alpha}\cos\theta} \tag{3.5}$$

3.2　2 次曲線の一般的な性質

さて，前小節までの議論はいったん脇に置いて，2 次曲線の一般的な性質を考えてみよう。

平面上に原点を置き，正規直交系を張る。原点に焦点があり，$x = q$ の位置に準線があるとする。焦点から動点 P までの距離を r として，動点 P の位置と x 軸の成す角を θ とする。動点 P を準線に下ろした垂線の足を点 P' とする（図 2)。

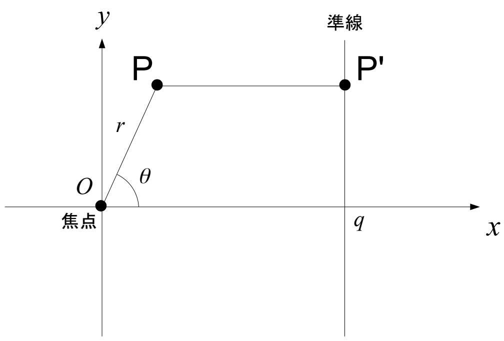

図 2　2 次曲線

このとき，離心率 e は以下のように定義される:

$$\mathrm{OP} : \mathrm{PP}' = e : 1$$

離心率 e が 0 より大きく 1 よりも小さいとき，動点の軌跡は楕円を描く。離心率 e が 1 のとき，動点の軌跡は放物線を描く。離心率 e が 1 よりも大きいとき，動点の軌跡は双曲線を描く。

さて，ここで，$\mathrm{OP} = r$，また $\mathrm{PP}' = (q - r\cos\theta)$ なので，

$$\begin{aligned} r : (q - r\cos\theta) &= e : 1 \\ r &= eq - re\cos\theta \\ r(\theta) &= \frac{eq}{1 + e\cos\theta} \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.3　仕上げ

式 (3.5) と式 (3.6) を再掲する。全く同じ形をしていることがわかる!

$$\begin{aligned} \text{式 (3.5)}: \quad r(\theta) &= \frac{\frac{1}{\alpha}}{1 + \frac{\beta}{\alpha}\cos\theta} \\ \text{式 (3.6)}: \quad r(\theta) &= \frac{eq}{1 + e\cos\theta} \end{aligned}$$

式 (3.5) は，物理的な考察から導出された。これが，数学的な考察から導出された式 (3.6) と同じ形を持つということは，**質点 S の軌道が 2 次曲線を描くことを意味している**。また，「回転は周期的に繰り返されていて，質点 S が，時間の経過とともに，どこか遠方に行ってしまったり，質点 E に引き込まれていくようなことは考えない」という最初の仮定を考慮すると，**質点 S の軌道は，放物線・双曲線ではなく，楕円でなければならないことがわかる**。これにより，ケプラーの第一法則の証明が完了した。

3.4 この先のために

この後，すぐ使うため，この楕円軌道の長半径と短半径の具体的な形を見ておこう。

質点 S の軌道が楕円であるならば，離心率 e は 0 より大きく 1 より小さくなるはずである。式 (3.5) と式 (3.6) とを見比べると，離心率 e は (β/α) に等しいことがわかる。少し変形してみよう:

$$e^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + \frac{2mE}{L^2}}{\alpha^2} = 1 + \left(\frac{\frac{2mE}{L^2}}{(\frac{GMm^2}{L^2})^2} \right)$$
$$e^2 = 1 + \underbrace{\frac{2L^2}{G^2M^2m^3}}_{\text{どうあがいても正}} E \tag{3.7}$$

力学的エネルギー E が正であれば，e は 1 よりも大きくなってしまう。また，E が 0 であれば，e は 1 になってしまう。e が 0 より大きく 1 より小さい値を取るためには，E は負でなければならない。

式 (2.1) に立ち返って考えてみよう:

$$\text{式 (2.1)}: \quad E \;=\; \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - \frac{GMm}{r}$$

仮に，力学的エネルギー E が正の値を取ると考える。すると，$r \to \infty$ の条件で右辺の第二項が消えるため，$\mathbf{v}$ が何らかの値を持つことになる。これは，質点 S が無限遠に到達したときになお速度を持っている，つまり，「無限遠に到達する可能性がある」ことを示す。これは，上で見たように，最初の仮定（「質点 S は，質点 E を周回している」）に反する。力学的エネルギー E が負の値を取ると考えるのは妥当である。これ以降，$E < 0$ であるとしよう。それを明示するため，$E = -E_0\,(E_0 > 0)$ とする。

さて，楕円軌道の長半径 a を求めよう。図 3 より，

$$r(\theta = 0) \;=\; |\mathrm{OP}_1|$$
$$r(\theta = \pi) \;=\; |\mathrm{OP}_2|$$

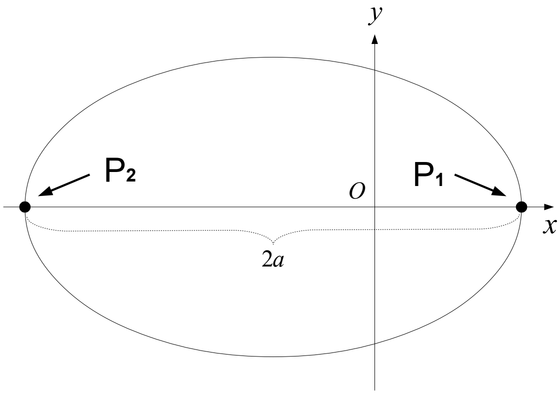

図 3　$\theta=0$ のポイント P_1 と，$\theta=\pi$ のポイント P_2

長半径 a は，$\frac{1}{2}(r(0)+r(\pi))$ である。すなわち，式 (3.4) より，

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\big(r(0)+r(\pi)\big) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\alpha-\beta}\right) = \frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2} \\ &= \frac{(\frac{GMm^2}{L^2})}{\alpha^2-(\alpha^2+(\frac{2mE}{L}))} = -\frac{GMm}{2E} \\ a &= \frac{GMm}{2E_0} \end{aligned} \tag{3.8}$$

※ 後のために，以下のように変形しておく:

$$\frac{m}{E_0}=\frac{2a}{GM} \tag{3.9}$$

楕円の一般的な性質として，以下の式が成り立つ（証明略）:

$$1-\frac{b^2}{a^2}=e^2$$

従って，楕円軌道の短半径 b は，

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{1-e^2}\,a \\ b &= \frac{L}{\sqrt{2mE_0}} \qquad (\because\ \text{式 (3.7)，式 (3.8)}) \end{aligned} \tag{3.10}$$

4　ケプラーの第二法則

第二法則は，角運動量保存則から直ちに導かれる。

質点 E と質点 S とを結ぶ位置ベクトル $\mathbf{x}(t)$ を考えよう。dt だけ時間が経つあいだにこの位置ベクトルがなでる面積 A は，$\mathbf{x}(t)$ と $\mathbf{x}(t+dt)$ が張る平行四辺形を半分にしたものに等しい（図 4）。すなわち，

$$A = \frac{1}{2}\,|\,\mathbf{x}(t) \times \mathbf{x}(t+dt)\,|$$

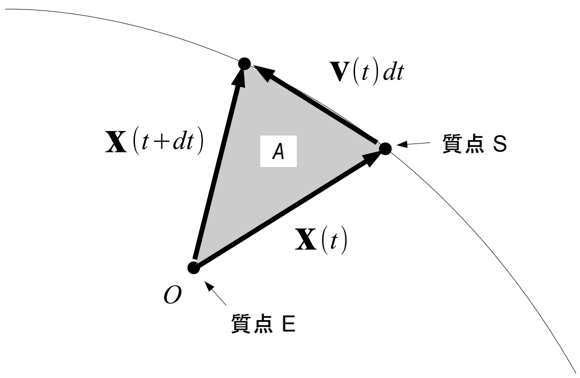

図 4　位置ベクトルがなでる面積 A

ここで，$\mathbf{x}(t+dt) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)dt$ であるため，

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\,|\,\mathbf{x}(t) \times (\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)dt)\,| \\ &= \frac{1}{2}\,|\,\mathbf{x}(t) \times \mathbf{v}(t)dt\,| \times \left(\frac{m}{m}\right) \\ &= \frac{dt}{2m}\,|\,\mathbf{x}(t) \times m\mathbf{v}(t)\,| = \frac{Ldt}{2m} \qquad (\because\ \text{式 } (2.2)\ ) \end{aligned}$$

ここで両辺を dt で割れば，左辺は「単位時間あたりに位置ベクトルがなでる面積」すなわち面積速度を意味する。右辺は $(L/2m)$ となるが，角運動量保存則より，L は時刻によらず一定である。つまり，**面積速度は時刻によらず一定である**ことがわかる。これにより，ケプラーの第二法則が証明が完了した。

5 ケプラーの第三法則

ケプラーの第二法則，および式 (3.8)，式 (3.10) から，直ちに導かれる。

ケプラーの第二法則より，面積速度が一定であることが導かれた。従って，周期 T は，(楕円の面積/面積速度) から求まる。

楕円の面積 S は，長半径 a と短半径 b を使って，以下のように記述される（証明略）:

$$S = \pi ab$$

従って，周期 T は，

$$\begin{aligned}
T &= \frac{\pi ab}{\frac{L}{2m}} = \frac{\pi a}{\frac{L}{2m}} \left(\frac{L}{\sqrt{2mE_0}} \right) && (\because \text{ 式 } (3.10)\ ) \\
&= \pi \sqrt{2 \frac{m}{E_0}}\, a = \pi \sqrt{2 \left(\frac{2a}{GM} \right)}\, a && (\because \text{ 式 } (3.9)\ ) \\
T^2 &= \frac{(2\pi)^2}{GM}\, a^3 \;\Rightarrow\; T^2 \sim a^3
\end{aligned}$$

周期 T の 2 乗が長半径 a の 3 乗に比例することが確かめられた。これにより，ケプラーの第 3 法則の証明が完了した。

以上