

物理学教材

(ニュートン力学 + α)

筑波大学生物資源学類 2023 年度 春学期

はじめに

この教材は、物理学を専門としない大学生、特に農学・生物学・環境系の分野を学ぶ人のための物理学（力学）の教材である。筑波大学生物資源学類で、10年近くになたって授業で使い、少しずつ更新してきたものである。本書の基本方針を以下に示す：

基本方針

- (1) 筑波大学生物資源学類 1 年生の授業「物理学」（春学期）で使う。
- (2) 物理学の考え方や基本法則を丁寧に学ぶが、同時に、農学や環境科学で「使える」物理学を学ぶ。
- (3) 基礎知識として、高校数学 III までの微積分・ベクトルと、中学理科（1 分野）の物理（特に、力、運動、エネルギーの内容）を必須とする。
- (4) 高校「物理基礎」「物理学」の知識は無くても（忘れていても）かまわない。
- (5) 数学の副教材として、「ライブ講義 大学 1 年生のための数学入門」を使う。特にその第 2 章（単位）を自習しておくこと。本書の中に出てくる「数学の教科書」はこの本を意味する。
- (6) 本書前半は主に高校数 III までの数学を使うが、後半では大学の数学（微分方程式・偏微分・全微分・外積など）も使う。これらは上記の数学の教科書で自主的に学んでおくこと（生物資源学類では「基礎数学」の授業が並行してこれらを扱う）。
- (7) 意欲的な読者のために高レベルの数学に言及する場面もあるが、それについては「ライブ講義 大学生のための応用数学入門」を参考に。
- (8) 本書の内容は、（基本法則や慣習的に理解されていること以外は）全てオリジナルである。ただし、Richard Feynman "Lectures on Physics" Addison-Wesley から影響を受けている（岩波書店から「ファインマン物理学」という題で和訳が出ている）。ちなみに、この本の著者が書いた自伝「ご冗談でしょうファインマンさん」は一読を薦める。
- (9) ベクトルは、細字や「文字に上矢印」ではなく、太字で書こう。「ライブ講義 大学 1 年生のための数学入門」P153 参照

- (10) 数値を求める問題では、（無次元量でない限り）数値に単位をつけよう。数値の有効数字は、特に指定があったり、問題設定で 3 桁以上の有効数字が使われているのでなければ、2 桁でよい。
- (11) 各章末に問題の解答を載せた。ただし一部の問題については解答を省略した（「解答略」とすら載っていないものもある）。そのような問題は、テキストをしっかりと読めば自然に解答が見つかるはず。
- (12) 脚注（ページ下部の欄外のコメント）は、理解を助ける補足的な説明や、より高度な学びへの橋渡しになることを書いている。本文が理解できてさえいれば、とりあえず読み飛ばしても構わない。

必読書

本書に取り組む前に（あるいは取り組みながら）、以下の 2 冊を必ず読んで欲しい。

- 関口知彦・鈴木みそ「マンガ 物理に強くなる ... 力学は野球よりやさしい」（講談社ブルーバックス）。これは中学理科～高校物理基礎の内容だが、物理学の根本的な考え方がよくわかる名著である。物理に苦手意識を持つ人はもちろん、物理は得意だと思っている人も、必ず気づきがあるだろう。
- 西林克彦「わかったつもり 読解力がつかない本当の原因」（光文社）。これは読解力（国語力）の本だが、「わかった」と思うことの多くが実際は「わかったつもり」という皮層的な思考停止にすぎないと気づくだろう。そのことを認識した上でこの教科書を読むと、読みや理解が深くなり、効率的・本質的な学びに近づけよう。

よくある質問

よくある質問 1 物理って必要ですか？ 私の志望分野では物理学は不要だと先輩から聞いたのですが... そういうことは、物理を理解していない人ほど言いがちです（笑）。物理は「役に立つ科学のナンバーワン」です。程度の差こそあれ、理系の学問は全て物理学のお世話になっています。物理は空気と同

じように、気にしなければ気づきませんが、常に我々のまわりにある大切な存在です。

よくある質問 2 物理って、公式覚えて数値を入れるだけでは? ... 違います(笑)。物理は基本法則と数学で組み立てられた、論理的な理論体系であり、それを通して自然現象の成り立ち・仕組みを我々は根本から理解するのです。

よくある質問 3 でも、ボールとかバネとか、ものの動きを考えるだけでしょ? ... 「ものの動き」は物理学の対象のごく一部ですが、「ものの動き」がわかるだけでも凄いですよ。地震も津波も台風も「ものの動き」です。化学反応も分子や原子という「ものの動き」です。魚が泳ぐのも鳥が飛ぶのも「ものの動き」です。ボールの軌跡やバネの振動は、そういう森羅万象の「ものの動き」を説明する、最初の例にすぎません。

よくある質問 4 高校でやった物理は面白くなかったのです... 私です(笑)。ただ、それは心が物理学に対して開いていなかったからではないでしょうか?

よくある質問 5 数学を使わないで物理を勉強できないのですか? ... 数学抜き物理学は、むしろしんどいですよ。数学を学びながら物理を学ぶことで、楽に楽しく、本質的に物理を理解できるし、そのおかげで数学も理解しやすくなりますよ。

よくある質問 6 本書を読む他に、何か良い勉強法はありますか? ... 物理の実験を自分でやったり、実験の映像をテレビやネットで見てみよう。物理学は机上の空論ではなく、実際の自然現象を説明する理論だから、実験を通して理解することが必要。テレビ番組では、「NHK 高校講座 物理」、「ピタゴラスイッチ」(特にピタゴラ装置)、「大科学実験」がおすすめ(これらはネットでも見られる)。YouTube 等にも良い動画がたくさんある(「物理エンジン」で検索!)。楽しんで見よう!

よくある質問 7 物理、どうすれば好きになれますか? ... 物理の考え方に慣れましょう。そうすれば、物理の威力や面白さに気づき、いろんなことが芋づる式にわかるようになって、楽しくなります。

よくある質問 8 物理の考え方がどういうものですか? ... それを知るには本書や前述した 2 冊の本を読むのです。直感やイメージや雰囲気に関わり過ぎず、用語を正確に定義し、それを使って基本法則(ルール)を丁寧に理解し駆使するのです。ルールに基づいて素直にシンプルに物事を考えるのです。物理が苦手な人はそれをせず、自分の直感やイメージに合うように捻じ曲げて解釈した「マイルール」を作ってしまうがちです。たとえば運動する物体には運動方向に力がかかっているというのがよくありがちな誤ったマイルールです。物理学の

能力というより、読解力や論理的思考力が問われるのです。

よくある質問 9 高校で物理を勉強していないので不安です。大学の物理の授業で良い成績はとれるでしょうか? ... とりあえず本書は高校物理の履修歴は前提としません。むしろ重要なのは高校数学 III です。それと、テストや成績はいったん忘れて、それよりも「自分が本当に理解しているか」に関心を向け(メタ認知)、「わかったつもり」にならないように、テキストを丁寧に読み、鉛筆を持って全ての説明や証明、問題を自分で計算・導出してみましょう。そして、理論が実際の現象にうまく対応することが納得できるまで、考え続けましょう。

よくある質問 10 でも、成績が悪かったり単位を落とすと就職や進学で困ります... 就職や進学などの将来のことを考えるならなおさらです。テストにこだわった勉強は解答・解法の丸暗記のような「その場しのぎ」が多くなるので長期的には学力・実力は伸び悩みますよ。仮にそれで良い成績がとれたとしてもそれは虚栄です。自己の将来を虚栄で切り開こうとする姿勢はいずれ見抜かれますし、貴重な時間を虚栄の構築に費やしてしまったことを自分でもいずれ後悔するでしょう。遠回りのように思えても、理解重視で学べば理解できて楽しくなり、実力もついて、結果的に良い点や成績が得られるものです。

よくある質問 11 このテキストは高校物理の復習ですか? ... 高校物理と同じ話も現れますが、高校では説明できなかった部分を説明します。そのために数学をたくさん使います。「高校物理やったから楽勝!」と思わずに、丁寧に学んで下さい。

よくある質問 12 高校物理既習ですが、有利ではないのですか? ... 高校物理既習者は似た題材や問題に慣れ親しんでいるのは有利です。しかし似ているとはいえこれは大学の物理です。高校物理と似ているからといって「わかったつもり」で雑にこなしてしまい、結局わからなくなってしまいがちなのが心配。人間は成功体験や先入観があると新しいことを学びづらくなりますからね。高校物理を忘れて謙虚にやり直せば、「高校物理のアレは実はこういうことだったのか!」という驚きや感動が君を大いに成長させてくれるでしょうし、それは高校物理未習者には味わえない体験です。

よくある質問 13 簡単な公式は覚えておいた方が良いでしょうか。... 「公式」よりも、まず「基本法則」と「定義」をしっかり覚えましょう。「公式」は、基本法則と定義から論理的に導出されます。

2023 年 4 月 14 日 奈佐原 顕郎

目次

はじめに	i
第 1 章 物理学とは	1
1.1 物理学の中の分野	2
1.2 物理学は科学の基盤	4
1.3 スポーツ・芸術・エンターテインメント等のための物理学	5
1.4 だまされないための物理学	5
1.5 ものづくりや研究のための物理学	6
1.6 危機管理のための物理学	6
1.7 生物資源学類と物理学	7
1.8 物理学はコスバが良い	7
1.9 法則・原理・定義・公理・定理	7
1.10 洞窟の影の比喻	8
1.11 科学にはモデル化が欠かせない	9
1.12 系は世界を単純化・モデル化したもの	10
1.13 概算	10
1.14 日常と物理学（科学）の言葉は違うことがある!	11
1.15 解答	12
第 2 章 力の基本	13
2.1 力とは何か?	13
2.2 4 つの基本的な力	14
2.3 力の一般的な性質	14
2.4 万有引力	15
2.5 重力と重力加速度	16
2.6 計測器の校正とトレーサビリティ	17
2.7 kgf（キログラム重）という単位	18
2.8 電荷どうしが引き合ったり反発し合うクーロン力	19
2.9 電場, 磁束密度, ローレンツ力	20
2.10 発展: 重力やクーロン力をベクトルで表す式	22
2.11 解答	22
第 3 章 様々な力	25
3.1 糸やロープに働く張力	25
3.2 水圧と大気圧	27
3.3 水圧の大事な性質, パスカルの原理	28
3.4 浮力は圧力の不釣り合いで生じる力	29

3.5	応力と圧力	30
3.6	弾性力 (フックの法則)	31
3.7	垂直抗力	34
3.8	摩擦力 (クーロンの摩擦法則)	36
3.9	応用: 川を流れる水の水圧	38
3.10	解答	39
第 4 章	仕事とエネルギー	41
4.1	仕事の原理	41
4.2	仮想仕事の原理	42
4.3	エネルギーは仕事を一般化した概念	44
4.4	ポテンシャルエネルギー (位置エネルギー)	48
4.5	保存力	51
4.6	仕事率	51
4.7	電位・電位差・電圧	52
4.8	電流・電力・電力量	53
4.9	解答	54
第 5 章	運動の三法則	59
5.1	ベクトルとスカラー	59
5.2	位置を微分すると速度, 速度を微分すると加速度	60
5.3	「解析学の基本定理」で加速度から速度を, 速度から位置を求める	61
5.4	等速度運動 (等速直線運動)	63
5.5	等加速度運動	63
5.6	運動の三法則	64
5.7	慣性の法則 (第一法則)	64
5.8	運動方程式 (第二法則) はすごい大事!	65
5.9	質量と速度の積を運動量という	67
5.10	力が一定なら等加速度運動	67
5.11	等速度でも等加速度でもない直線運動	69
5.12	運命は決まっているのか? (ラプラスの悪魔)	71
5.13	解答	72
第 6 章	さまざまな運動	77
6.1	単振動	77
6.2	斜め投げ上げ	80
6.3	円運動	81
6.4	解答	83
第 7 章	慣性系と慣性力	87
7.1	慣性の法則は慣性系の舞台設定	87
7.2	慣性系は複数ある	88
7.3	非慣性系は「慣性力」を導入して扱う	89
7.4	回転する座標系の慣性力: 遠心力とコリオリ力	90
7.5	解答	93

第 8 章	力学的エネルギー保存則 (1)	95
8.1	運動エネルギー	95
8.2	力学的エネルギー保存則	97
8.3	問題の解答の作り方	98
8.4	物理学における保存則	100
8.5	解答	101
第 9 章	運動量保存則	105
9.1	運動量保存則はどう便利なのか?	105
9.2	運動量保存則の証明: 1 つの質点バージョン	106
9.3	運動量保存則: 2 つの質点バージョン	106
9.4	重心を考えると簡単になる	107
9.5	衝突のときエネルギーはどうなるのか?	108
9.6	(発展) 質点系バージョンの運動量保存則の証明	111
9.7	回転運動再考	112
9.8	量子力学におけるエネルギーと運動量	112
9.9	解答	113
第 10 章	力学的エネルギー保存則 (2)	115
10.1	3 次元空間における運動エネルギー	115
10.2	3 次元空間における仕事は「線積分」で定義	115
10.3	3 次元空間におけるポテンシャルエネルギー	116
10.4	3 次元空間における力学的エネルギー保存則	117
10.5	振り子の運動	118
10.6	地球の形は「ジオイド」で表す	119
10.7	(発展) ポテンシャルエネルギーと力の関係	120
10.8	解答	122
第 11 章	角運動量保存則	125
11.1	ベクトル同士のもう一種類の掛け算: 外積	125
11.2	角運動量	125
11.3	角運動量保存則 (1 つの質点バージョン)	127
11.4	角運動量保存則 (複数の質点バージョン)	128
11.5	回転運動の不思議	129
11.6	量子力学における角運動量	130
11.7	解答	131
第 12 章	慣性モーメント	133
12.1	剛体というモデル	133
12.2	剛体の回転運動	133
12.3	慣性モーメントは剛体の回転を特徴づける量	134
12.4	慣性モーメントの応用: 斜面を転がる丸い物体	137
12.5	(発展) 分子の回転運動	138
12.6	(発展) 剛体振り子	139
12.7	慣性モーメントと角運動量	140
12.8	解答	140

第 13 章	熱力学入門	143
13.1	粒子の運動エネルギーと温度	143
13.2	理想気体の状態方程式（気体分子運動論）	144
13.3	理想気体の内部エネルギーと温度	146
13.4	熱容量と比熱	147
13.5	理想気体の定積モル比熱	147
13.6	熱力学第一法則はエネルギー保存則	148
13.7	理想気体の定圧モル比熱	148
13.8	理想気体のゆっくりした断熱変化	149
13.9	内部エネルギーとは？	149
13.10	エンタルピーはエネルギーの一種	151
13.11	エントロピーってなんだろう？	152
13.12	可逆過程と準静的過程	152
13.13	不可逆過程	154
13.14	熱力学第二法則：孤立系でエントロピーは増大する	154
13.15	ヒートポンプ	155
13.16	カルノー・サイクル	157
13.17	ギブスの自由エネルギーは反応の方向を決める	158
13.18	（発展）ヘルムホルツの自由エネルギー	160
13.19	（発展）ボルツマン分布は熱平衡でのエネルギー分布	161
13.20	（発展）アレニウス型関数	162
13.21	（発展）飽和水蒸気圧曲線	162
13.22	解答	164
第 14 章	（発展）量子力学	165
14.1	量子は奇妙な概念	165
14.2	光の放出・吸収と量子力学	166
14.3	シュレーディンガー方程式をわかったつもりになろう	167
14.4	前期量子論とボーア模型	171

第1章

物理学とは

自然現象にはいろいろあるが、物理学という学問は、どんな自然現象でも突き詰めれば少数の普遍的な法則で演繹的に説明できるはずだと考え、そのような法則、すなわち「基本法則」*1を発見すること、そしてそのような基本法則に基づいて自然現象を解明することを目指す。

よくある質問 14 演繹って何ですか？ どう読むのですか？ ... 「えんえき」と読みます。あらかじめ認められたルールを元に論理的に論ずることです。その反対が帰納です。実例をたくさん集めて観察し、それらに共通する性質をルールとして認めようという考え方が帰納です。

もう少し具体的に説明しよう。物理学はものごとを「モデル化*2」し、「基本法則」と「数学」で論じる。手始めにその流儀で次の問を論じてみせよう：

—— 最初の問 ——

手に持ったボールを手放すとボールは地面に落ちるのはなぜか？

ありがちな答は「万有引力があるから」というものだ*3。しかしこれは物理学としては不十分だ。まず万有引力が何に対してどのように働いているか述べていない。そして万有引力がどのようにボールの落下につながるのか説明していない。説明が欠落しすぎているのだ。その欠落を「そこは説明しないでも常識的にわかるだろう」とか「直感的にわかるだろう」というのは物理学ではないのだ。

よくある質問 15 なにか当たり前の常識に対して屁理屈とかイチャモンをつけてる感じで不毛に思えますが ... 学問はそう

いうものです。当たり前のことでも理論体系を元に「説明」しようとするのです。

物理学はこの問を次のように論じるのだ（今はこの詳細はわからなくてよい。雰囲気だけ感じ取れば十分である）：

まずボールと地球をそれぞれ質点（質量を持つ点状の物体。後述する）とみなす（モデル化）。質点同士には互いに引き合う力が働くという基本法則がある（万有引力の法則）ので、ボールと地球の間には互いに引き合う力が働く。すなわちボールは地球に向かう力を受ける。次に、質点に力がかかると質点にはその力に比例した加速度が生じるという基本法則がある（運動の第二法則）。それを元に「ボールが地球から受ける力」からボールの加速度を求め、それに数学（微積分学）を適用するとボールの位置は時刻の関数として表現され、それは時刻が増えるほど地球に近づいていくという性質をもつことが数学的に示される。これが「ボールを手放したら地面に落ちる」ことの物理学的な説明である！

よくある質問 16 めっちゃ面倒くさくないですか？ もったいぶって簡単なことをわざわざ難しく言い換えてるだけでは？ ... 違います。この論法を使えば火星でもボールが落ちることをそのスピードがどのくらいかも含めて予測・説明できるし、宇宙の彼方にある小惑星に「はやぶさ」のような探査機を飛ばして着陸し地球に帰還させることもできるのです。そのような「行ったことのない世界」の出来事まで予測・説明できるのです。

よくある質問 17 上の説明だとむしろ地球がボールに向かって落ちていくのでもよいということになってしまいますよね？ それでもよいのですか？ ... はい！ 実際に起きているのはそういうことなのです。ボールが地球に向けて動くのと同時に地球もボールに向けて動くのです。

よくある質問 18 そんなわけないでしょう。常識的にありえないです。... だから常識に頼るのはダメなのです。ほんのこ

*1 「基本原理」「第一原理」などとも言う。

*2 現象を扱いやすいように単純化して捉え直すこと。後の節で詳しく述べる。

*3 物理学では万有引力を重力ということも多い。しかし、後述するように地球科学では重力は万有引力に地球の自転と共に動く座標系における慣性力を加えたものと定義する。本書は農学・環境科学など「地球」を相手にする実務家・学習者を対象とするので後者の立場をとる。

く僅かですが実際に地球もボールに向けて動くのです。少なくとも物理学はそう結論しますし、物理学をきちんと学んだ人はこの結論を疑わないはずです。

よくある質問 19 常識に反するような理屈をどう信じるというのですか? ... 常識が常に正しいのならば学問は不要です。学問は常識からいったん離れて確実な根拠を積み上げることで真実に迫るのです。その結果が常識に反するならば、それは学問と常識のどちらか(または両方)が間違っているのです。ところが物理学は基本法則と数学で積み上げていますので、現象を上手にモデル化すれば間違える余地は大変に小さいのです。

よくある質問 20 地球を点状の物体とみなすというのが怪しいと思います! ... そうそう。そういうふうを考えるのが物理学の思考パターンです。何か変だな? と思ったら、議論の細部を点検してどこがおかしいかを考え、それを検証するのです。ちなみに上の問では、地球を点状の物体とみなすのは間違いではありません。その根拠は物理学の基本法則と数学で示すことができます。ただしそれはちょっとめんどくさいのでとりあえず今はそれはスルーして先に進みましょう。

よくある質問 21 「法則」と「基本法則」は同じですか? 違いますか? ... 基本法則は法則の一種です。法則とはある条件下で必ず成り立つこと。その中でも他の法則から導くことができない法則を基本法則とよびます。基本法則でない法則は、基本法則からどうにかして(多くの場合は数学の力を借りて)導出できる法則です。

1.1 物理学の中の分野

物理学の基礎はおおまかに言って以下のような分野に分けられる:

- 力学
- 熱力学
- 電磁気学
- 相対論
- 量子力学

この中で本書で学ぶのは主に力学である^{*4}。力学は日常的な時空間スケールでの物体の運動を扱う。力学を使うと、津波の伝播、地震波の伝播、地球の周囲をまわる月の運動、サッカー選手のフリーキック、フィギュアスケーターのジャンプとスピン、橋やビルの強度・構造、交

通事故の衝撃等が解析できる。運動の三法則とよばれる法則(慣性の法則・運動方程式・作用反作用の法則)が基本法則である。

熱力学は熱や温度が関与する現象を扱う^{*5}。熱力学の三法則という法則(エネルギー保存則・エントロピー増大の法則・絶対エントロピーの法則)が基本法則だ。気体の状態方程式(温度・圧力・体積の関係)、比熱、化学反応の向き、相転移(融解・蒸発等)、電池の活性などは熱力学で解析できる。これらは化学で扱われる分野なので、熱力学は化学の授業でも学ぶだろう。

また、熱力学は後述する量子力学と組み合わせさせて威力を発揮する。たとえば太陽が明るく光り、光としてエネルギーを四方八方に放射するのは「物体はその温度に応じた波長と強さの光を放つ」という現象の実例であり、そのような現象を熱放射(または熱輻射)という。熱放射は地球温暖化に大きく関わる現象でもある。熱放射は熱力学と量子力学を組み合わせで説明できる。

電磁気学は電気や磁気が関与する現象を扱う。多くの大学ではニュートン力学の後に学ぶ。マクスウェル方程式というのがその基本法則だ。中学校以来なじみ深い「オームの法則」は電磁気学と熱力学との境界に位置する法則である。身近な電気製品はもちろん電磁気学の対象だ。分子や原子の間で働く力の大部分は電磁気力なので、物質の構造や性質を理解するためにも電磁気学は必要だ。空間の電磁気的な性質が波として伝わる現象が「電磁波」すなわち「光」だ。光を電磁気学的に解析する中で次に述べる相対論が生まれた。

相対論は大きな速さで運動する物体の運動に関する物理学である。そのはじめは、光は誰から見ても一定の速さで飛ぶという事実である(これを光速不変の原理という)。これは上述のマクスウェル方程式から理論的に予測され、実験的にも確かめられた事実なのだが、我々の直感や日常経験に反する不思議な話である。というのも、たとえば時速 100 km/h で走る自動車 A を時速 80 km/h で走る自動車 B が追いかけている場合、自動車 B から見たら自動車 A は時速 20 km/h で遠ざかっていく。これは小学校で習うし直感的にも納得できる。

ところが光の場合は違うのだ。真空中での光の速さ(光速)は $c = 299792458 \text{ m/s}$ という絶対に変わらない

^{*4} 古典力学とかニュートン力学ともいう。また、力学を数学的に洗練した解析力学という分野もあるが、それは本書の対象外である。

^{*5} 同じ対象を統計学の手法を使って解析する統計力学というものもあるが、熱力学との区別は明瞭ではない。そこで、両者を一緒にして「熱力学」とか「熱・統計力学」とよぶこともある。

定数なのだ（したがって c は物理学では重要な量であり様々な理論に顔を出す）。たとえば速さ c で宇宙を飛んでいく光を速さ $0.8c$ で追いかける宇宙船の中から見たら、光は速さ $0.2c$ で遠ざかっていくのではないかと直感的に思えるが、実際はそうではなく、なんと速さ c で遠ざかっていくように見えるはずなのだ。ということは、光をどんなに頑張っても常に光は速さ c で遠ざかるのだから、光に追いつくことはできない。つまりどんな物体も光の速さに達することはできないのだ。

よくある質問 22 そんなバカな。証拠はあるのですか？ ...
あります。光が一定だと考えることで辻褄が合う現象が多く観測されています。たとえば光の速さを地球の自転の向きや逆向きに測る実験（マイケルソン・モーリーの実験）では差が検出されません。

そこでこの奇妙な現象を説明する理論が作られた。それによると、高速で飛ぶ物体（宇宙船）にとっては時間はゆっくり進み、なおかつ先を行く光との距離がより長く見えると考える。そう考えると辻褄が合うのだ。その辻褄合わせの結果、著しい法則がもうひとつ見つかった。それは、質量 m は次式で表されるエネルギー E を持っているということだ（ c は光速）：

$$E = mc^2 \quad (1.1)$$

これによると物体の質量は物体の持つエネルギーによって増えたり減ったりするのだ。これは高校化学で学ぶ「質量保存の法則」に反する。実際、化学反応によって物体（原子や分子）のエネルギーは増減するから、物体の質量も増減するのだ。ただし普通の化学反応では質量の変化は検出できないくらい小さいから、化学反応の前後で質量は変化しないと近似的にみなせるのだ。しかし核分裂や核融合などの高エネルギー反応ではまさに原子の質量が減って、その結果として式 (1.1) に対応するエネルギーが解放される。それが核兵器や原子力発電などの原理である。

これらをまとめる理論を特殊相対論とよぶ。ニュートン力学は高速の現象では特殊相対論によって修正される。また、特殊相対論を包含し、さらに万有引力を説明するものを一般相対論とよぶ。天文学には相対論が必要である。

相対論は本書ではこれ以上扱うことはできないし、大学1年生で改めて学ぶ授業もほとんど無いだろう。そのためここで少し詳しく述べた。特に上記の「光速不変の

原理」と式 (1.1) は現代の市民の教養・常識として大切なものである。なぜなら現代物理学とそれを応用した科学技術はこれらが関係するものが多く、大きなイノベーションの可能性を秘めると同時に巨大な予算や施設を必要とするものが多いからである。

量子力学は「量子論」とも言う。主に原子や分子といった極微のスケールの現象を説明する。大学1年次の化学の授業で少し出てくるだろう。「シュレーディンガー方程式」というものがよく出てくるが、必ずしもそれは基本法則ではない。量子力学の基本法則は高度に抽象的・数学的で、微積分・線型代数学（ベクトルや行列の理論）・複素数・確率などの考え方が複合的に活躍する。筑波大学の前身だった東京文理科大学で、朝永振一郎教授がノーベル物理学賞をとったが、それは量子力学の一分野（量子電磁力学）を開いた功績によるものである。

量子力学は量子計算機や量子暗号通信など、大きなイノベーションの可能性を秘めた先端技術の基礎である。したがってその基本的な概念を理解しておくことは（簡単ではないが）現代の市民の重要な教養である（本書第14章で触れる）。

量子力学や相対論を突き詰め、原子よりもずっと小さい様々な粒子を発見し、それによって物質や力に関する様々な基本法則を統一的に理解しようとする物理学が素粒子物理学である。湯川秀樹、南部陽一郎、益川敏英、小林誠、小柴昌俊、梶田隆章といった日本人物理学者がノーベル物理学賞を受賞したのはこの分野である。

● 問1 力学・熱力学・電磁気学のそれぞれの基本法則の名前を述べよ（内容はまだ理解しなくてよい）。

よくある質問 23 さっきの「最初の問」で出てきた万有引力の法則はどの分野の基本法則ですか？ ... これは力学の基本法則と一緒にニュートンが発見したのですが、その後、相対論から導出されることがわかりました。したがって現在の物理学ではこれはもはや基本法則ではありません。しかしこれを相対論から導出するには高度な数学が必要であり、本書の程度を大きく超えるので、本書ではニュートン当時に戻って、これを力学の分野の基本法則とみなします。このように物理学は教育レベルや状況に応じて便宜的に「これは本当は基本法則ではないけれど、とりあえずこの場では基本法則とみなそう」という立場をとることがよくあります。そうしないで本当の基本法則に毎回戻っていたら、話が際限なく長くなってしまいます。

1.2 物理学は科学の基盤

これらの物理学は様々な科学の基盤になっている。

たとえば化学物質の構造や化学反応の仕組みは分子や原子の集合に物理学を当てはめることで理解できる。したがって化学の理論は物理学に広く深く立脚している^{*6}。その物理学的な理論を元に生体内の化学物質の様子を予測・説明できる。現代の薬学（創薬）はそのような手法に発展している。

生物学はそのような化学の成果を使って生体内の化学反応を明らかにしている。それだけでなく生物学は物理学を直接必要とすることもある。たとえば鳥や魚の体の構造は彼らの運動能力や環境適応能力（暑さ・寒さ・乾燥等への対応）を最適化するように進化しているが、それを説明するのに力学や熱力学などの物理学は欠かせない。植物の光合成の様子を調べるのに植物が出す蛍光（クロロフィル蛍光）を使うが、それを説明するには量子力学が必要だ。生体内には様々な電気信号が発生し、それが刺激や情報を伝達する。それを外的に計測したり制御するには電磁気学が必要だ。

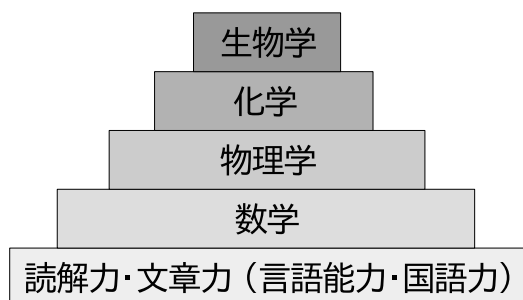


図 1.1 科学の階層構造。下の学問は上の学問を支える。

このように考えればほとんどの科学は物理学に支えられていることがわかるだろう。その様子を図 1.1 に示す。物理学は数学に支えられ、化学や生物学を支え、それらを応用する多くの科学を支えているのである。

それだけではない。これらの科学はさらに様々な応用科学を支えており、物理学はその根幹にあるのだ。

たとえば気象学は、大気や海洋における空気や水の動きとそれに伴うエネルギーの動きを物理学、特にニュートン力学と熱力学を主に使って予測する。それが天気予

報の根幹である。

土木工学・建築工学は橋やダムやトンネルや建物を安全に設計し建造する。どのような部材をどのように組み立てればどのくらい強く安定するかは全て物理学（力学）に基づく計算で確認されている。川の水を安全に流したり、津波や高潮から町を守るための堤防の設計は、水について力学を応用して行われる。

航空工学・船舶工学は飛行機や船を安全かつ効率よく流体（空気や水）の中で動かすために物理学を使って研究開発や設計を行う。

電子工学・材料工学は量子力学を使って物質内の電子や光などを高度に精密にコントロールすることで小さくて高性能な電子機器を作る。たとえば「半導体」はコンピュータの頭脳である集積回路（CPU）や記憶装置（DRAM）の元である。太陽電池は光を電気に変換できる。「発光ダイオード」は電気を高い効率で光に変換できる。「レーザー」は高品質で強力な光を生み出すことができる。中村修二・赤崎勇・天野浩の3人の日本人学者が2004年にノーベル物理学賞を受賞したのはこの発光ダイオードやレーザーに関する研究である。

原子力工学は原子核や中性子、放射線などの物理学に立脚することで原子力エネルギーを安全に制御する。

地理学・地質学では火山噴火や地震の発生・伝播を岩石の物理学的な性質に基づいて研究する。地球の形や位置をGPS（Global Positioning System; 人工衛星からの電波によって地上の位置を高精度で計測するシステム）で測定する（カーナビでも使われている）。そこでは人工衛星の運動とそこからやってくる電波の制御・解析に相対論が使われている。

医学ではX線やMRI（核磁気共鳴画像法）によって病気や怪我を診断するが、その原理は物理学、特に量子力学である。超音波による胎児の診断は音波の物理学を精密に使うことで今や胎児の顔がくっきり見えるまで進化している。筑波大学病院の重粒子線治療は人体の他の部分に副作用を及ぼさずに腫瘍だけを攻撃できる技術だが、そこでは素粒子物理学が活躍している。

よくある質問 24 図 1.1 のピラミッドでいちばん下に読解力・文章力（言語能力・国語力）があるのはなぜですか？ 国語は文系ですよね？ なぜ理系の学問の基盤なのですか？ ... 理系文系にかかわらず全ての学問は「言葉」に強く依存します。学問、特に物理学や数学は高度化すると人の素朴な経験や想像を

^{*6} 新入生は入学してまずここに驚くのだ。「化学の講義なのにほとんど物理学じゃん!!」「自分の好きで得意だった化学と違う!!」となるのだ。ついでに言えば「物理学の講義なのにほとんど数学じゃん!!」「統計学の講義なのにほとんど数学じゃん!!」というのも新入生にありがちな驚きである。

超越していきます。そのようなとき物理学や数学は言葉（とそれを洗練した記号）を論理的に緻密に使うことで人の想像力を補い、限界を乗り越えていくのです（数学が物理学を支えるのは数学が物理学に役立つ言葉だからです）。だから言葉の運用能力、つまり国語力が基盤なのです。読解力が無いとそもそもテキストが正確に読めません。文章力は言語化能力です。人は考えを言語化することで学びや疑問を人と共有したり、自分自身と向き合って自問自答することができるのです。

1.3 スポーツ・芸術・エンターテインメント等のための物理学

意識している人は少ないが、スポーツには物理学が凝縮している。テニスで速いサーブを打つには？ サッカーでボールのスピードを上げるために芝に水を撒くのはなぜ？ 相撲で小さな力士が大きな相手に押し負けられないようにするには？ などなど多くの工夫やスキルは物理学の観点で裏付けできるし説明できる。だからスポーツ用品メーカーの開発部門はまるで物理学の研究室だ。アスリートも物理学がわかると他人のフォームやスキルの中の良いところに気付きやすくなるし、自分の癖に気付いたり人からのアドバイスを理解したりもスムーズになるだろう。

芸術、特に音楽も物理学に大に関係ある。そもそも楽器は音波という物理現象を制御する装置である。良い音色を出す楽器の構造は？ 気温や湿度で楽器のチューニングが狂うのはなぜ？ 良い音でレコーディングするにはどんな工夫が必要？ 野外ライブでは電源をどのように確保・配給すればよい？ ノイズをカットするにはどういうことに気をつけて配線すべき？ 音階が狂うのはなぜ？ などとも物理学で説明できる。だから音楽をやる人は物理学を学んで損は無い。

文学やエンターテインメント、歴史、経済、文化などですら物理学と無関係ではない。夏目漱石の小説には物理学の話題が多く登場する。映画やゲームで使われるコンピュータ・グラフィクスは物理学の法則を用いて物体や光の動き・様子をコンピュータの中で計算して表現する。歴史や経済を理解するには社会を変革してきた技術イノベーションとその影響力を理解する必要がある、それには物理学の知識が欠かせない。火山噴火や氷河期といった地球科学的現象が気温や日照や利水に影響を与え、それが食糧難や社会不安につながることはよくあるが、その状況を理解・再現するには物理学的な手法が必要である。

そういうわけで物理学は実に多くのものごとの基盤なのだ。大学の多くの学部で物理学が重要な科目となっているのはそれが理由である。「私は〇〇に興味があるから物理学は関係ない」という考え方はズレている。それはサッカー選手や野球選手になりたいのに筋トレや走り込みは無用だと発言するのと同じくらい「わかってない」のだ。

● 問2 フランスの科学者パスツールは1848年、分子の光学異性体を発見した。そのとき彼は光の「偏光」という物理学現象を利用した。そのときの様子について調べ100～400字程度で述べよ。

よくある質問 25 量子力学にとっても興味があります。... 量子力学は確かにすごい学問です。しかしそれを学ぶにはまずこの授業で扱うような力学から出発して、それなりに物理学と数学の「足腰」を鍛える必要があります。頑張ってください。とりあえず今の皆さんにも読めるようなオススメの量子力学解説文を挙げておきます：朝永振一郎著「鏡の中の物理学」（講談社）の中に掲載されている「光子の裁判」「素粒子は粒子であるか」

1.4 だまされないための物理学

ところで世の中にはオカルト的な科学がたくさんある。物理学はそのようなものへの耐性を君に与えてくれる。

例 1.1 「マイナスイオン」というのが健康に良いという話が社会に広まり、「マイナスイオンを出す装置」なるものが開発・販売されている。そういうのを聞いて懐疑的に思うのが物理学だ。物理学には「電荷の保存則」という強い法則があり、それを否定する実験結果は見つかっていない。マイナスイオンはマイナスの電荷を帯びた粒子なので、マイナスイオンが発生するならばそれとバランスをとるようにプラスの電荷がどこかに発生しているはずだ。それはどこなのだ？

例 1.2 テレポーテーションやテレパシーという超能力に対しても物理学は懐疑的である。物理学では「いかなる物体も情報も光よりも速く移動することは無い」という強い法則（相対性理論）がある。それを否定する事実を多くの物理学者が血眼になって探したが、いまだにひとつも見つかっていない。もし物体が瞬間的に遠くに移動したらその法則が崩れてしまう。

例 1.3 水を凍らせる際に水にやさしい言葉をかけるときれいな氷の結晶ができるという話がある。これも物理学は懐疑的である。物理学（熱力学）では物体の結晶成長に関する精密な理論ができており、結晶のできる様子は温度や圧力、湿度（過飽和度）、不純物の存在などによって決まることがわかっている。

例 1.4 2003 年頃、あるカルト宗教が「スカラー電磁波」なるものから身をまもるために、あらゆるものに白い布を巻き付けるという行動に出たことがテレビで報道されたが、物理を学んだ人は、電磁波はベクトルの波であり「スカラー電磁波」などそもそも存在しないと知っている。（例おわり）

オカルト科学は科学が苦手な人をいかにも科学的な裏付けがありそうな言葉でだます。彼らが物理っぽい言葉を特によく使うのは、多くの人が物理が苦手だからだろう。我々は物理を理解してオカルト科学にだまされにくくなるだろう。

● 問 3 上に例示したオカルト的な科学の中から 1 つについてさらに深く調べ、君はそれをどう思っていたか合計 200 字～400 字程度で述べよ。特に思い入れがあるなら上記以外の例についてでも OK。

1.5 ものづくりや研究のための物理学

さて、石だろうが紙だろうが生き物だろうが食べ物だろうが、物を相手にする仕事には測ったり作ったりということが不可欠になる。測るということは、対象の特徴を数値的な量に置き換えて表現することだ。その過程は物理学である。たとえば溶液中の化学物質の濃度を測るには、特定の波長の光がその溶液をどれだけ透過するかを調べるが、その原理は物理学である。

原理を知らなくても説明書（マニュアル）のとおりによればとりあえず計測機械を使うことはできる。しかしマニュアルを読みこなすには原理がわかっていないと大変だ。マニュアルは人が書いたものなので間違いもあり得る。あるいは「こんなことはマニュアルに書くまでもないだろう」として省略されることもあるだろう。

実験したり物を作ったりするには、計測だけでなく「制御」も重要になる。たとえば生き物を育てるときに温度や光、湿度などの環境を一定に保つことがしばしば必要になる。その原理も物理学である。物理学をきちんと

とわかっていれば高価な恒温槽などを買わなくても手近な材料や機械を組み合わせで適切な制御系を組むことができる。

このように計測も制御も多少なりとも機械が必要になる。機械は君の気持ちには無関係に、あくまでも物理学の法則にしたがって働くのだ。君が機械を手足のように自在に使いたいならば、機械の気持ち、つまりは物理学を理解しなければならない。そのためには物理学実験を学ぶ必要がある。特に、多くの機械は電気で動くので電気の知識は重要である。

1.6 危機管理のための物理学

さて社会にも人生にも危機（ピンチ）はある。生命を脅かすピンチの多くは物理的な現象である。交通事故、飛行機の墜落、船の沈没などはニュートン力学（とその応用である流体力学）である。特に君がこれから運転免許をとるならば、車の構造や交通法規の背景にたくさんの物理学があることを意識しよう。意味や仕組みがわかってこそ、ルールも守る気になるものだし、結果的に安全なカーライフを送ることにつながる。

自然災害（津波や台風、地震、落雷、火山噴火など）も多くは物理学（地球物理学）で扱われる。落下や感電、窒息なども物理現象である。これらを事前に予防したり対策したりするにはやはり物理学の考え方が重要だ。

家庭用電気製品は、一般消費者が乱暴に使っても事故を起こしにくいように慎重に設計・検証して作られる。しかしそれでも老朽化すると故障するし、事故を起こす。それを防ぐのは使用者の判断であり、管理である。それには機械の動作原理の理解、つまり物理学が必要である。

家電製品以外の機械、つまり研究・業務目的の機械は「プロ仕様」なので家電製品のような徹底した安全対策や検証はされていないのが普通である。専門的な中小企業が作ることが多いし品数が出ないので、そのような一般消費者向けの安全対策までは手がまわらないのだ。したがってそのような機械を扱うときには、慎重さと判断力、熟練が必要で、それが多くの資格がある理由である。そういう資格試験の問題の多くは物理学である。

1.7 生物資源学類と物理学

生物資源学類の扱うテーマにも物理学は深く関わっている。たとえば前述のように、生物の機能や構造を理解するには物理学は必須だ。昆虫が固い殻（外骨格）を持っていることには物理学的な理由がある。植物は光合成で獲得した炭素を根・幹・葉・生殖器官に最適に分配しているが、その戦略は物理学的な事情（根から水を効率的に吸い上げる・風などの外力で倒れたり折れたりしない・多くの光を葉に受ける・種子を風に乗せて遠くに飛ばすなど）で決まる。

農業の効率化に灌漑施設や農業施設、農業機械は不可欠だが、それらを低コストで効率よく働かせるには物理的に最適な設計と配置が必要だ。乾燥地農業で塩類集積が問題になるが、あれを予測・制御するには土壤水分と塩類の移動を物理学でモデル化する必要がある。

食品の保存や加工、微生物の培養、作物や家畜の育成管理には温度・湿度環境の制御が必要で、それには物理学が必要である。家畜を逃がさない為、そして野生動物を侵入させない為に、牧場や農場のまわりに電気柵を張り巡らす、それを安全に扱うには電気の知識（結局は物理学）が必要だ。地域で伝統的に行われている農法や漁法（霞ヶ浦の帆引き船など）には物理学的に理にかなった工夫が随所にある。そういうのを理解しないと伝統の継承や発展は難しい。

地球環境を保全するには人工衛星で地球を観測する必要があるが、そこでは衛星の軌道制御や観測装置の設計などで膨大な物理学的知識が使われている。土砂災害を防ぐには地すべりや土石流の発生と移動を予測し制御する必要があるが、その中心は物理学だ。物理学を駆使して災害の起き方や規模を事前に正確に想定できれば、コンパクトで効率的なダムや堤防を作ることができ、経費の節約や環境保全になる。

● 問 4 以下の課題において物理学はどのように役立つか？

(1) 森林の伐採と伐採木の搬出における安全性と作業効率の両立。(2) 野菜・果樹の遅霜被害への低コストで効果的な対策。

1.8 物理学はコスパが良い

以上のように物理学はあらゆる場面に登場する。しかし仕事や研究の個々の場面では物理学の法則まで立ち返って検討したりしなくても、既にマニュアルやノウハウや慣例が存在し、それに従えばやりすごせるものである。そこで若い人の多くは「物理学なんか学ぶよりも実用的な技術を身につける方が楽し意味がある」と思うものである。

ところがそういう人も歳をとってくると「若い時に物理学をもっと勉強すればよかった…」と嘆くものである。科学や技術の進歩は速い。若い時に得た知識・技術の多くはやがて陳腐化するので、人は歳をとっても学び続けねばならない。しかしニュートン力学やマクスウェル方程式は高度に確立・完成された体系なのでほとんど陳腐化しない。それらはいつの時代でも未解決の問題や困難に取り組むときに役立つツールなのだ。そういう意味で物理学は大変にコストパフォーマンスの良い学問である。学ぶ努力に対する見返りが大きい。それも物理学が多くの学部で教えられる理由である。

よくある質問 26 将来も陳腐化しないって、なんでわかるのですか？ ... 何十年も前の昔の物理学の教科書を見て下さい。今の教科書と内容はほとんど同じです。書き方や説明法は変わっても本質は変わらないのです。生物学のような発展中の学問と違って、物理学のある部分はもうほとんど変わりようがないくらいに完成・確立しているのです。

よくある質問 27 もう発展しようが無い学問なのですか？ それってつまらないのですか？ ... 物理学の発展中の部分はもっと別のところにあります。我々は物理学の完成された部分を学び、それを役立てることに頭を使えばよいのです。

● 問 5 君の将来やりたい研究・職業に物理学はどのように関わってくるだろうか？ 君自身の考えを論じよ。

● 問 6 科学には負の面もある。過去、物理学が軍事に利用された事例を 2 つ以上挙げ、それぞれ 300 字程度で説明せよ。

1.9 法則・原理・定義・公理・定理

これから物理学の基本的な考え方を説明していく。まず法則・原理・定義・公理・定理などの言葉の意味を確認しておこう。

法則 ... 自然現象や社会現象の中に見られるルール。

物理学・化学・生物学・経済学などで使う。数学ではほとんど使わない。例：万有引力の法則

原理 ... 法則と同じようなもの。ただし法則の中でもより根源的なもの（基本法則に近いもの）を原理とよぶ傾向がある。例：アルキメデスの原理

定義 ... 言葉の意味を定めること。

公理 ... 定義と同じようなもの。主に数学で使う。言葉の意味を定めるだけでなく、そのようなものが存在することを認めようという立場も示す。例：ユークリッド幾何学の公理

定理 ... 公理や他の定理から論理的に導かれること。主に数学で使う。定理の中でも影が薄いものを補題とよぶ。例：三平方の定理

さて、法則 A と法則 B があって、法則 A で説明できることはすべて法則 B でも説明され、なおかつ、法則 A では説明できないが法則 B で説明できるようなこともあるような場合、法則 B は法則 A より一般性が高いという。そのような場合はたいてい法則 A は法則 B の特別なケースであり、法則 B から法則 A を論理的に導出することができる^{*7}。

科学は、より一般性の高い法則を見出すことを目指す。最も一般性の高い法則（つまり根源的な法則）を基本法則とか第一原理とよぶ。しかし基本法則は抽象的なので、実際には使いづらいこともある。そこで具体的によくある状況に限定して基本法則を変形することで、「適用範囲は狭いが扱いは簡単」な法則が派生的に生まれる。しかしそのような「派生的法則」は無数にあってきりが無い。それにそれぞれの「適用範囲」を覚えて判断するのが面倒だ。

派生的法則の例として、一定の力を受けて直線上を動く点の位置や速度を表す公式がある（高校物理を習った人なら覚えているだろう、 $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ というやつだ）。この法則（公式）は力が変化する状況では成立しない。それがなぜなのかとか、その代わりに何を使えばよいのかなどを理解するには、運動方程式という基本法則とそれを記述する数学（微積分学）に戻らないとダメである。

君は、多くの法則をばらばらに覚えるのではなく、何が基本法則でそこからどのような条件でどのような派生法則が生じるのかといった体系性を意識して学ぼう。

^{*7} ところが科学というのはおもしろいもので、法則 B から論理的に導かれる法則 A のほうが一般性が高いということもたまにある。たとえば「力学的エネルギー保存則」という法則は運動の三法則から導かれるが、「エネルギー保存則」は力学の範囲を超えて普遍的に成り立つ法則でもある。

次にオッカムの剃刀^{*8}という考え方を説明する。これは、現象の説明（理論）として複数の候補があったとき、それらが同程度に有効であるなら、より単純なほうが正しい、という考え方である。それは必ずしも常に正しい考え方とは言えないが、物理学（と多くの科学）は「無矛盾さ」の次に「シンプルさ」を求める傾向にあるということは覚えておこう。

- 問7 オッカムの剃刀とは何か？

1.10 洞窟の影の比喻

物理学に限らず、学問や教育についてしばしば使われる話に古代ギリシアの哲学者プラトンの著作に出てくる洞窟の影の比喻というものがある。これは特に物理学についてよく当てはまる話なのでここで説明しておく。高校の倫理などで学んだ人もいるだろう。

プラトンの師匠であるソクラテスが教育について友人と議論しているときに持ち出したたとえ話である：洞窟の奥深くに囚人たちが囚われている。彼らは生まれてからずっとそこに繋がれており、しかも洞窟の奥の壁しか見ることができない。彼らの背後には火が焚かれており、その火の明かりを使って、彼らが見ている壁に向けて影絵が映し出され続ける。その中には人や乗り物や動物の影絵がある。囚人たちはその影絵がそれらの実体だと思いこんでいる。

ところがあるとき、一人の囚人が背後を見ることができ、それが影絵であったことを知る。さらに彼は抑留を解いて洞窟の出口まで這い上がり、外の世界を見て、囚人たちが実体だと思いこんでいた影やそのもとになっていた影絵よりも本質的な世界を知る。

この比喻の囚人たちは我々多くの人間であり、我々は普段、物事や世界を知って理解しているような気になっているが、実はそれは影絵のような断片的な側面にすぎない。真実を知るのは大変に難しいし勇気がいる。それを促すのが教育であるとソクラテスは述べているのである。

物理学はまさしくこのような営みである。我々が日常経験している現象は影絵のようなものである。我々は影絵をたくさん見るように日常経験をたくさんすることで、世の中の現象を理解した気になっている。ところが真実はそこにはないのである。物理を学べば学ぶほど、

^{*8} 剃刀は「カミソリ」と読む。

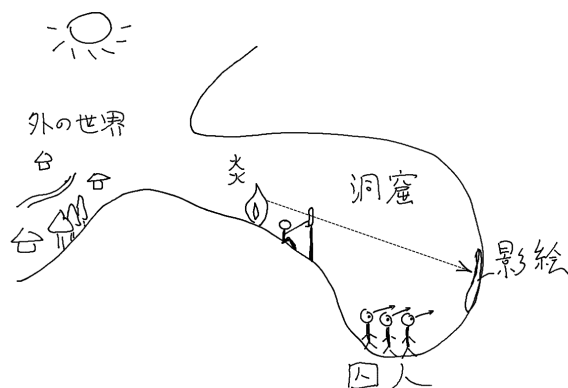


図 1.2 洞窟の影の比喻

日常経験だけでは理解できない抽象的な形で物理の法則があり、その持つ説得力や予測能力を実感することで自然現象の本質について知るのである。

1.11 科学にはモデル化が欠かせない

さて、我々はこれから力と物体の運動に関する法則を学ぶのだが、まず質量という概念を受け入れよう。質量は物体の根源的な属性（物体を特徴付ける性質）のひとつであり、「どうやらそういうものが存在するらしい」と受け入れるしかない。質量とは何か・質量はなぜ存在するのかを執拗に探求する物理学者達の熱い戦いはまだ続いているが、それは彼らに任せて我々は先に進む。感覚的には、質量は物体の重さとか物体の「動かしにくさ」に関係するような性質である。

次に質点という概念を定義しよう：質点とは、質量は持つが大きさは持たない点状の仮想的（理想的）な物体である。

現実の物体は大きさや形を持つのだが、大きさや形を考えると、物体に働く力がややこしくなるのだ。たとえば、大きな物体の各部位に働く力がまちまちだったりすると物体全体に働く力はもうわけがわからぬことになる。そこでとりあえず質点とみなせるくらい小さな物体に働く力を考える。そうやってひとまず大きさや形といった属性を切り捨てることで、次節以降に述べる諸々の力の法則や、いずれ学ぶ「運動の三法則」という単純かつ強力な法則を見出すことができたのだ。

このように現実のものや現象を単純化・抽象化してとらえ直し、扱いやすくした近似的概念をモデル（模型）とよぶ。質点は物体のひとつのモデルである。現象をモデルにすることをモデル化という。

なら質点は空想の産物、机上の空論に過ぎないのかと

いうとそうでもない。現実の中には物体の大きさや形を近似的に無視できるような現象がたくさんあり、そのような場面では質点の議論がほとんどそのまま成り立つ。物体の大きさや形が無視できなくても、質点としての考察は議論の出発点として役立つことが多い。

例 1.5 野球ボールは、ある場合は質点とみなせる。たとえばボールを初速 80 km/h で斜め 45 度の角度で地上から空に投げるとどこまで遠く飛ぶか？ のような問題ではボールは質点とみなしてもほぼ差し支えない。

どうしても大きさや形を考慮すべき状況では、質点の集合（それを質点系という）として物体をモデル化するのである。そうして質点の理論に持ち込むのである^{*9}（図 1.3）。

例 1.6 野球のボールは、その回転が重要であるような運動では質点とみなしてはダメである。たとえばカーブやシュートなどの変化球はボールが回転することで周囲の空気に乱れを生じさせ、それによってボールが受ける力が変化することで起きるため、ボールの形・大きさを無視できない。ボールがバットに当たるとき、ボールの上部や下部がバットをかするような場合の運動も、ボールの形（大きさ）を考慮して論じる必要がある。そのような場合はボールは質点系としてモデル化すべきである。

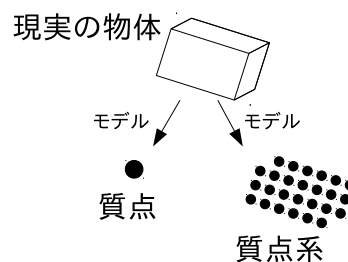


図 1.3 物体のモデル。大きさと形を無視できる場合は質点。そうでなければ質点系としてモデル化する。質点系では質点間に働く力も考える。そうすることで物体がバラバラにならないように理論化できる。

- 問 8 (1) モデルとは何か？ (2) 質点とは何か？
 - 問 9 「物体」と「物質」という言葉を混同する（というか区別せずに使う）人がたまにいる。
- (1) 「物体」と「物質」はどう違うか？（わからなければ

^{*9} その場合は後述するように角運動量や慣性モーメントといった概念が必要になる。

ば辞書を引こう!)

(2) 英語ではそれぞれどうよぶか?

モデルは科学の随所にある。たとえば化学でいずれ学ば「理想気体」は現実の気体のモデルのひとつである。

現実の現象や物体は往々にして複雑だが、それを複雑なままで見ているだけでは仕組みはわからない。人間のしょぼい知性では複雑なものを理解できないのだ。しかし複雑さをばっさり切り捨てて単純な状況に限定すると、自然の仕組みは人間ごときにも理解できることがある。だからモデルが必要なのだ。モデルの力を借りて科学は進歩してきた。

ところがいったん出来上がった科学を学ぶ我々は、恩あるモデルの存在を忘れ、モデルに限って成り立つ法則が現実の複雑な現象にそのまま全面的に成り立つと勘違いしがちである。これは大変危険なことである。

例 1.7 君は小学校で振り子を習っただろう。そこで振り子の周期は振幅に依存しないと習ったはずだ。これを振り子の等時性という。ところが振り子の等時性は振り子の振れの角が十分に小さいという単純なモデルについてのみ成り立つ近似的・限定的な性質である。振れの角が大きくなれば等時性は成り立たない。実際、振れの角が 60 度になれば周期は 7 パーセント程度長くなることがわかっている。ちなみにこの「ずれ」は物理学と数学の理論で説明できる。

君はこれから学ぶ科学の様々な事柄に対してそれがどのような限定の中で成り立つかを注意深く理解しなければならない。そのためには法則や理論の結論だけを丸飲みするのではなく、その理論の成立する過程をきちんと理解し、それが現実の中の何をモデル化しているのか理解しなければならない。

1.12 系は世界を単純化・モデル化したもの

科学、特に物理学では問題を扱うときに問題の設定そのものもモデル化する。

たとえば例 1.5 のような問題では、ボール、ボールを投げる人、ボールの飛ぶ空間、地面、ボールに働く万有引力(のもとである地球)という 5 つの存在だけを取り出し、他の全てを世界から消し去って考える。そして野球ボールは質点とみなし、ボールを投げる人はボールを投げることだけを行う機械のようにみなし、空間は空気抵

抗を及ぼすような空気の無い空間とみなし^{*10}、地面は少なくともボールの飛んでくる範囲では水平とみなし、野球ボールに働く万有引力は野球ボールの飛んでいる間は場所や高さによらず一定の大きさで鉛直下向きに働くものとみなす。

このように問題にほとんど関係無いと思われる事柄をばっさり無視し、そして関係あるものもできるだけ単純化・モデル化して究極まで単純化された世界を仮想的に考える。

実際は世界にはもっとたくさんの物体があるし、たくさんの力もあるし、いろんなことが起き得るものだが、とりあえずそれらはこの問題には(ほとんど)無関係だから無視する。たとえば野球ボールが飛んでいる間に地面に地すべりが起きて地形が変わったりする、みたいなことは問題に影響あるかもしれないが、あまりにも特殊すぎる事情なので無視する^{*11}。

このように世界の中のごく一部だけを限定的に切り出して単純化し、それ以外のすべてのものを無視した状況設定を系(system)という。それは言ってみれば当面の問題や議論のためだけに極限まで単純化された「世界のモデル」である。前節で「質点系」という言葉が出てきたがその中の「系」の意味はこれである。

系という言葉は本書では今後、たくさん出てくるし、化学などでも出てくるのでよく理解しておこう!

- 問 10 系とは何か?

1.13 概算

「モデル化」に似た考え方に概算がある。物理学は現象を定量的に予測・把握する能力があるのだが、その一方で、あまり精密なことは考えず細かいことを切り落としておおざっぱにざっくり推定することもよく行う。それが「概算」である。

概算は物理学に限らず有用なスキルである。基本的ないくつかの数字と各分野における基本法則、そして常識と少しの数学(特に対数や近似)を使いこなすことで多くのことを概算できる。

^{*10} 空気抵抗を考える場合もある。

^{*11} ただしこうやって無視しまくったことの中に本当は無視してはいけないものがあるかもしれない。それがモデル化の怖いところだ。原発の安全性を考えると、大きな津波が来るかもしれない可能性を無視してモデル化すると、それ以後の計算や解析がどんなに正確であっても実際に大津波が来たときに備えることはできない。

たとえば，2022 年現在，日本政府の債務（赤字，つまり借金）の額は約 1000 兆円である。15 桁にもおよぶ金額だが，多くの国民にとってまず重要なのはその 15 桁の全ての数字なのではなく，15 桁という桁数すなわち「規模」である。

ところが多くの人は「1000 兆円なんて大きすぎてピンと来ない」と言う。高等教育を受ける人がそんなことを言ってはならない。想像しにくい規模の数を想像するには「～あたり」という視点に立てばよい。膨大な額の借金も国民のひとりあたりの借金に換算すれば想像しやすくなるだろう。日本の人口は約 1 億人だから $1000 \text{ 兆円} \div 1 \text{ 億人} = 1000 \text{ 万円/人}$ ，つまりひとりあたり 1000 万円である^{*12}。こんな調子で「だいたい」でよいから何らかの数値をぱっと出すのが概算である。

よくある質問 28 概算はどこまでアバウトでよいのですか？
... 一概には言えませんが ± 50 パーセント程度でよいのでは。

● 問 11 ある人の息子が「僕は将来サッカー選手になりたい」と言う。その夢を応援するためには，親としてはそれがどれだけ厳しい戦いになるかを知っておかねばなるまい。

(1) 日本の男子サッカーのプロリーグ（Jリーグ；J1, J2, J3 をあわせて）には約 50 チームがある。各チームに選手は 30 人いるとして日本のプロサッカー選手の人数を概算せよ。

(2) サッカー選手の選手寿命は短い。平均 5 年で引退すると考えて Jリーグで 1 年間に引退するサッカー選手の総数を概算せよ。それが 1 年間に新たにサッカー選手になれる人数だろう。

(3) 一方，小学校 1 学年には何人の男の子がいるだろうか？ 少子化とかは無視して日本の人口を 1 億人平均寿命を 100 年として概算せよ。

(4) 一学年の男子のうち何人に一人が夢をかなえてサッカー選手になれるのだろうか？ ここでは簡単のため外国人選手のことは考えないでおこう。

よくある質問 29 「簡単のため」とはどういうことですか？
... 本当はもっと複雑で込み入った話があるのだけど，ここではそんなに厳密に議論するつもりはないので多少いい加減になることを許容している切り捨てて単純化して考えようということです。

よくある質問 30 科学でそんないい加減なことをしてよいの

ですか？ それに外国人を切り捨てるなんて差別的な感じがします。... 「切り捨てる」ってそういうことではないのです。実際の日本人選手は外国人選手のぶんだけ減るという事実を考慮せずにおこうということです。Jリーグの規定を調べたらかわりますが，外国人選手には人数制限があつて，たとえば過半数を外国人が占めるというのは（本書作成時は少なくとも）できないのです。だから外国人選手のことを考えなくてもそんなに大きく外れた議論にはならないのです。もちろんその結果は「ざっくり」ですよ。その「ざっくり」をここで学んでいるのです。ざっくりは「いい加減」ではあるけれど単純・手軽に見当をつけることができるので，科学ではよく使われるのです。

● 問 12 2022 年現在，日本の年間の国家予算は約 100 兆円である。また，国際連合（国連）における日本の分担金は年間約 300 億円である。これらの数字を (1) 政府の借金に比べてどのくらいの大きさが？ (2) 国民ひとりあたりいくらか？ という 2 つの観点で概算で評価せよ。有効数字は 1～2 桁でよい。

● 問 13 日本の平均年間降水量は 1500 mm 程度である。一方，日本では水田 1 m² あたり 500 g 程度の米がとれる。一方，米 1 kg の生産には 3000 kg の水が必要とされる。日本では水田に降る雨だけでこの水量をまかなうことはできるか？

1.14 日常と物理学（科学）の言葉は違うことがある！

どの科学もそうだが，日常社会では，物理学の用語を誤用することが多い。本来は違う意味の言葉を区別せずに混用したり，本来は同じ意味の言葉をあたかも違うもののように使ったりする。往々にして多くの初学者はそれに気づかず，物理学の言葉を不正確に使ったり解釈して話が噛み合わず，物理学がわからなくなってしまう。そのような物理学用語の危険な誤用・混用の例をここで示しておく。

例 1.8 「重さ」を質量の意味で誤用。日常社会では質量のことを重さとか重量と言うことが多い。機内持ち込み可能な荷物は重さ 10 kg まで，というときの 10 kg や，体重（つまり体の重さ）60 kg，というときの 60 kg は，物理学では重さではなく質量である。物理学では重さと質量は別の意味の言葉として明確に区別している（後に学ぶだろう）。

^{*12} 信じられない，これは誤植ではないか？ と思う人は自分で調べてみたらよい。

例 1.9 「速度」を速さの意味で誤用。日常社会では速さのことを速度と言うことが多い。速度制限 80 km/h というとき、それは物理学の用語では速度ではなく速さである。

例 1.10 「熱」を温度の意味で誤用。日常社会では温度のことを熱と言うことがある。特に体温に言及する時、すなわち「熱が 40 もある」と言うときのそれは物理学では熱ではなく温度である。

例 1.11 「光」と「電波」と「電磁波」の無用な区別。日常社会では「光」「電波」「電磁波」は互いに別の現象のように使われることがあるが、物理学ではこれらは同じ現象である。いずれも、電場と磁場に発生する波である。ただし、その波長の長短によってそれを区別したいときがあり、短い電磁波を光と呼び、長い電磁波を電波と呼ぶ傾向がある。だが本質的には同じである。

例 1.12 単位の中途半端な省略。「この台風の最大風速は 20 m」というとき、物理学的に正確に言えばそれは 20 m/s である。「大谷翔平は二刀流として入団した日本ハムで 2016 年に日本球界最速となる 165 キロをマークした」という文章では、彼の投球したボールの速さを 160 キロと表現しているが、物理学ではそれは 160 km/h である。km をキロと略されているだけでなく、/h つまり「毎時」が省略されている。このように、日常社会では、物理量の単位のうち「毎～」の部分が容易に省略される。それは読者が慣習的に知っていて勝手に補完するものと思われているのである。

例 1.13 「カロリー」を kcal の意味で誤用。食品・栄養の分野でありがちだが、エネルギーの単位のカロリー (cal = 4.184 J) をキロカロリー、すなわち kcal=1000 cal=4184 J の意味で使うことがある。「キロ」を省略してしまうのである。これに気づかないと、1000 倍もの量的な勘違いを起こすことになる。

● 問 14 ここで見たような物理学用語の誤用の実例を、君自身の周囲(テレビ、新聞、ネット記事など)で見つけてどのように間違っているか述べよ。

1.15 解答

以下、解答が無い問題は、解答が略されている。***は解答の一部をわざと隠すための伏せ字である。

答 1 力学の基本法則: ***の法則・**方程式・***の法

則。***の法則を加えることもある。熱力学の三法則: 熱力学第 1 法則 (***保存則)・熱力学第 2 法則 (***増大の法則)・熱力学第 3 法則 (絶対***の法則)。電磁気学の基本法則: ***方程式*¹³。

答 7 ***として、***の***があったとき、それらが***に有効であるなら、より***なほうが正しいだろう、という考え方。

答 8 (1) 現実のものや (... 中略...) した近似的概念。(2) 物体のモデルのひとつであり、(... 中略...) な物体。

答 11 (略解) (4) 千～2 千人にひとり。

答 12 (略解) (2) 年間国家予算はひとりあたり 100 万円程度。年間国連分担金はひとりあたり 300 円程度。

答 13 (略解) なんとか雨だけで足りる(計算上は)*¹⁴。

*¹³ それぞれの基本法則は別の形で言い換えることもできる。

*¹⁴ 現実はまだ難しいことがたくさんあるので、ほとんどの水田で灌漑が必要です。

第2章

力の基本

2.1 力とは何か?

小学校以来、理科には何回も「力」が出てきたが、諸君は力とは何か、わかっているだろうか?

有名な国語辞典である「広辞苑」(第六版電子版)では、力は以下のように説明されている:

(1) 自らの体や他の物を動かし得る、筋肉の働き。(後略)

(2) 気力。精神力。根気。(後略)

(3) 能力。力量。実力。(後略)

...

(8) [理] 静止している物体に運動を起こし、また、動いている物体の速度を変えようとする作用。(後略)

科学でいう力は(8)である^{*1}。(1), (2), (3)は科学でいう力とは違うものである。ところがこれらを混同している人が多い。(1), (2), (3)は日常でよく使われており、その印象に引きずられて、科学でいう「力」もそのようなものだと思い込んでしまうのだろう。余談だが力とエネルギーを混同している人も多い。後述するが、力とエネルギーは明確に別物である。「エネルギー」も日常でよく出てくるし、上の(1)(2)(3)のような印象が日常的な「エネルギー」という言葉にあるからだろう。

ちゃんと「学問する」ためにはこのような言葉の意味、さらに言えば「定義」にこだわらねばならない。日常の言葉と科学の言葉をきっちり区別するのだ。さもないと日常の言葉の印象やそれっぽい文字づらの印象に誘導されて誤解したまま「わかったつもり」になってしまい、緻密な議論や思考ができずわけわからなくなってしまうのだ。

● 問 15 君は今まで「力」をどう理解・認識していたか? 科学的に正確に理解していたといえるか? そうであればそれはどのようなきっかけでそうなったか? 正確に理解してはいなかったならなぜそうだったのか?

さて「広辞苑の(8)の説明を読んでもよくわからない」という人もいるだろう。当然である。これを理解するには「運動」とか「速度」などを定義する必要があるし、いろんな事例や観点について考えて納得していく必要があるからだ。それはおいおい学ぶとして、とりあえずこの(8)は第5章で詳述する「運動方程式」を部分的に述べたものである。ざっくりいうと力は質量と加速度の積に等しいという法則である(その「意味」は第5章で学ぶ)。たとえば、質量2 kgの物体が3 m s⁻²の加速度で動くとき、その物体にかかる力は2 kg×3 m s⁻²=6 kg m s⁻²である。

ここで「kg m s⁻²」という不思議な単位が出てきたが、まさにこれこそが力を表す単位(のひとつ)である。この「kg m s⁻²」にはN(ニュートン)という名前(いわばニックネーム)がついている。つまりN=kg m s⁻²である。である。「質量2 kgの物体に3 m s⁻²の加速度を与えるような力」は6 Nである。

一言でまとめると、力は、運動方程式に登場して物体の速度を変えるような物理量、あるいは(同じことだが)物体の速度が変わるときに発生しているはずの物理量である^{*2}。

よくある質問 31 加速度って何ですか? ... 微小時間における速度の変化量をその微小時間で割ったもの(速度を時刻で微分したもの)です。数学の教科書を見て下さい。

よくある質問 32 なぜ質量と加速度をかけると力になるのですか? ... その答は誰も知りません。なぜだかわからないけど

^{*1} ただし(8)の中の「作用」という語には要注意だ。物理学では「作用」は力とは別の概念として定義されている。もし私が辞書の編者だったらここで作用という言葉は混同の恐れがあるので使わない。

^{*2} この文は本当は「速度」よりも「運動量」のほうが適しているのだが、今の学習段階ではとりあえず「速度」でもよいだろう。

世界はそうようにできているのです。そのように解釈すると全てがつじつまが合うのです。

よくある質問 33 よくわかりません。質量は質量、加速度は加速度ですよね。なぜ力が関係するのですか? ... よくわかりません。だからこの法則(運動方程式)は、人類発生以来、何千年も何万年の間、未知だったのです。それをニュートンという天才がティコブラーエとケプラーという偉大な天文学者の研究を踏み台にして発見したのです。

よくある質問 34 力って本当に存在するのですか? 目に見えないのでイマイチわかりません ... 力というものが「本当に存在するかどうか」は実はどうでもよいのです。「力」が実在すると考えれば自然現象が矛盾なく簡潔・体系的に整理され、実験事実を説明・予測できるのです。それが「力」の実在性の保証です。「そう考えれば全てがつじつまが合う」という「整合性」こそが物理学で認められる説得力であり、正しさであり、実在性なのです。

よくある質問 35 N (ニュートン) の定義がわかったようなわからないような... kg m s^{-2} です。ただそれだけです。

● 問 16 質量 2.0 kg の質点に 3.0 N の力をかける。質点に生じる加速度の大きさを求めよ。ただし基本法則に基づいて根拠もきちんと述べること。

● 問 17 質量 1 g の物体を 1 cm s^{-2} の加速度で動かす力の大きさを 1 dyn という (dyn はダインと読む)。1.0 dyn を N 単位で書き換えよ。

2.2 4つの基本的な力

自然界には様々な力が存在するが、根源的には以下の4つのどれかに帰着されるということが、物理学者達の長い苦闘の末に明らかになっている:

- 万有引力
- 電磁気力
- 強い力(核力など)
- 弱い力(ベータ崩壊など)

その他の力、たとえば摩擦力やバネの力などはいずれもこれらから派生する。つまりどのような力も元をたどればこの4つの基本的な力で説明できるのだ。

実は我々の身近な現象に関わる力はほとんどが「万有引力」か「電磁気力」だ。したがって大学1年生の物理学に出てくる力はほぼ万有引力と電磁気力である。

とはいえその他の力も我々に無関係というわけでもな

いのでここで少しだけ説明しておこう。

「強い力」「弱い力」は「万有引力」や「電磁気力」と同じようにそれ自体で科学的専門用語である。何かの基準よりも強い(または弱い)力を指すのではない。

「強い力」は原子核の中で陽子や中性子を同居させる力である。そもそも陽子は電磁気力によってお互いに反発する性質がある(陽子と中性子や、中性子どうしにはそういう反発力はない)。ところが水素以外の原子では原子核の中に複数の陽子が存在する。互いに反発しあはずの複数の陽子が原子核という狭い空間で同居しているのだから、別の力がそれらを束ねているはずだ。それが「強い力」である。

「弱い力」は放射性元素が関与する現象、特に原子核の「ベータ崩壊」(陽子が陽電子とニュートリノを発生して中性子に変わるなど)で働く。

例 2.1 原子力発電所の事故で漏れ出した放射性セシウム ^{137}Cs の原子核は、ベータ崩壊して放射性バリウム ^{137}Ba の原子核に変わる。

例 2.2 放射性炭素 ^{14}C は、ベータ崩壊して窒素 ^{14}N に変わる。この現象は考古学などで過去の生物遺体の年代測定(それがいつ頃できたものかを推定すること)に使われる。

- 問 18 自然界の根源的な4つの力とは何か?

2.3 力の一般的な性質

個々の力について具体的に学ぶ前に、まず力の一般的な性質について学んでおこう。ここで述べるのは、その力が何であっても例外なく成り立つようなことだ。なお以後しばらく「物体」は質点と同義語と考えて欲しい。物体の大きさや形を考えねばならないときは逐次そのように言及する。

- 力には大きさと向きがある。つまり力はベクトルである。
- ベクトルの数学に基づいて、複数の力を足し合わせたりひとつの力を複数の力に分解して考えてもよい。特に、ある物体に複数の力が働く場合、結果的にはその物体には、それらの力をベクトルとして足し算したものの、すなわち合力のみが働くと考えてよい。

- 物体に働く力（合力）がゼロであるとき（これを力のつりあいという）、静止している物体は静止し続ける^{*3}。これは後に述べる「慣性の法則」の特殊な場合だ。
- 2つの物体 A, B において A が B に力を及ぼすとき、それと同じ大きさで逆向きの力を B が A に及ぼす。これを作用・反作用の法則という。

よくある間違い 1 作用・反作用の法則とは？と聞かれて「物体 A が物体 B に作用をおよぼすとき...」のように答える...「力」を「作用」と言い換えてはダメです。以前に注釈でも述べましたが物理学では「作用」は別の意味を表す言葉です。

よくある質問 36 ではなぜ「作用」・反「作用」の法則というのですか？ ... わかりません。私はこの名前は失敗だと思います。でも慣習だから仕方ありません（泣）

よくある質問 37 力は平行四辺形を描いて合成できることを中学で習いましたが、それは力がベクトルだからなのですね。でも力は自然科学の概念、ベクトルは数学的な概念ですね。それらが結びつくことが釈然としません。力がベクトルであることの根拠や理由は何なのでしょう？ ... 話はむしろ逆で、「そのようなベクトル的な性質を持つ量を考えてそれを力とよぼう」ということです。そうすれば先ほどの「よくある質問」でも述べたように、自然現象をうまく説明することができるのです。その根拠は実験事実との整合性です。

ではこれから具体的な力について学んでいく。

2.4 万有引力

万有引力は、質量を持つ物体どうしが引き合う力である。すなわち、2つの質点（それぞれの質量を M と m とする）が距離 r だけ離れていれば、次式で表されるような F を大きさとする力がそれぞれに働き、それらの向きはお互いが引っ張る向きである（なぜだかわからないがそういうふうに世界はできている）。

万有引力の法則

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad (2.1)$$

ここで G は万有引力定数とよばれる定数で、以下の値である（なぜだかわからないがそういうふうに世界はでき

ている）：

$$G = 6.6741 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1} \quad (2.2)$$

G の値は記憶しなくてもよいが式 (2.1) は記憶せよ。

式 (2.1) は英国の物理学者アイザック・ニュートンが発見した。どうやって？惑星の運行を説明するためにいろいろな数式を試行錯誤したのだ。ニュートンだけでなくガリレオ、ティコ・ブラーエ、ケプラー等の学者を巻き込んだ長い苦闘の成果である。ちなみにニュートンはこれを発見したとき、英国では腺ペストという感染症が大流行していたため、彼はロンドンの大学キャンパスを離れて実家に戻っていた。たっぷり暇があったのでいくらでも研究ができたのだろう。

さてこの式よりもさらに万有引力を一般的に説明する理論が「一般相対性理論」である。しかし一般相対性理論はほとんどの大学1年生には手に負えない理論なので、我々は式 (2.1) を万有引力の基本法則（根源的な法則）とみなそう。

ところで質量とはそもそも何だろうか？それは物体に万有引力を生じさせるような、物体の属性である。では万有引力とは何か？それは質量を持つ物体どうしに働く力だ。この議論は循環論法だ。質量を定義するのに万有引力の概念が必要で、万有引力を定義するのに質量の概念が必要だ！こうして見ると世の中は全てが論理的にすっきり説明できるものではなく、どこかで「そういうものがあるのだ」と認めねば話はじまらない。というわけで物体を特徴づける量として質量というものが存在することを天下一りに認めよう^{*4}。

前節で学んだ作用・反作用の法則のために、質量 M の物体が質量 m の物体を引く力と、その逆、つまり質量 m の物体が質量 M の物体を引く力は、互いに向きは逆だが大きさは同じだ。つまり、質量の大きな物体が質量の小さな物体を引く力は質量の小さな物体が質量の大きな物体を引く力と同じ大きさなのだ。

さて万有引力が最も活躍するのは天体現象だ。星は万有引力によって物を引きつける。万有引力の法則、すなわち式 (2.1) に関しては、地球を含めて

$$\text{球状の星は、その中心に質量が集中している} \\ \text{とみなして扱える。} \quad (2.3)$$

ことがわかっている^{*5}。たとえば地球の表面に立つ質量

^{*3} 静止とはとりえず「位置を変えないこと」と思っておいてほしい。

^{*4} 質量は万有引力とは無関係に「慣性の大きさ」という面もある。

^{*5} ただし星の密度は球対称であること。なお、この事実は万有引力の法則をもとに数学的に証明されることだが、ここではその

m の君に地球が及ぼす万有引力を考えると、ざっくり言って、 M として地球の質量を、 r として地球の半径を考えればよい。

● 問 19 地球の半径を $r = 6400 \text{ km}$ 、地球の質量を $M = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$ とする。地表において質量 $m = 1.0 \text{ kg}$ の物体が受ける、地球からの万有引力が 9.8 N であることを示せ（有効数字 2 桁でよい）。ヒント：単位を埋め込んで計算しないと失敗するよ！

よくある質問 38 万有引力はどんな物体の間にもはたらいているのですか？たとえば人と人の間とか。… 質量を持つ物体ならどんな物体の間にも働いています。もちろん人と人の間にも働いていますよ。

2.5 重力と重力加速度

万有引力については前節で述べたことが全てなのだが、実際に地球上に住む我々にとってそれをどう扱うかについては気をつけるべきことがいくつかある。本節ではそれについて述べる。

地球の表面付近にある物体は、地球から受ける万有引力だけでなく、地球の回転（自転）による遠心力（後述）も受けている。この 2 つの合力を我々は「地球から受ける力」と感じるのだ。このような事情は月や火星などの他の天体でも同様だろう。そこで、天体の表面付近において、天体とともに運動（自転・公転）する物体に働く、万有引力と遠心力の合力を、その天体から受ける重力とよぶ。

重力の大きさを F とし、質量を m とすると、何らかの比例係数 g を用いて

$$F = mg \quad (2.4)$$

と書ける。このときの g 、すなわち

$$g = F/m \quad (2.5)$$

を重力加速度と定義する。以後、しばらくこの g について考えよう。

まずなぜ g のよび方に「加速度」という言葉がついているだろう？ それは g の次元を考えればわかる。さきほど学んだように F の SI 単位は N （ニュートン； kg m s^{-2} ）、 m の SI 単位は kg なので、 g すなわち F/m

の SI 単位は $\text{kg m s}^{-2}/\text{kg} = \text{m s}^{-2}$ 。したがって g は加速度の次元を持つのだ*6。

次に g の値がどのように決まるか考えよう。 m を地表の物体の質量、 M を地球の質量とする。地球中心から地表までの距離（つまり地球半径）を r とする。これを「地球（の中心）から物体までの距離」としてよいだろう。したがって地表の物体が地球から受ける重力の大きさ F は、式 (2.1) から

$$F = \frac{GM}{r^2} m \quad (2.6)$$

となる。ここで

$$g = \frac{GM}{r^2} \quad (2.7)$$

と置けば式 (2.4) が得られる。式 (2.7) に実際の G 、 M 、 r の値を（問 19 でやったように）代入すると

$$g = 9.8 \text{ m s}^{-2} \quad (2.8)$$

である（この値は記憶せよ）。

ところがこれはあくまで近似的な議論であり、厳密には正しくない。先述したように地球の自転による「遠心力」も考慮しなければならない。遠心力は第 7 章で詳しく学ぶが、回転軸から遠いほど大きい。地球で言えば、高緯度より低緯度のほうが回転軸（地軸）から遠いので遠心力は大きい。また、遠心力の向きは回転軸から遠ざかる向きである。低緯度の場合、それは地表面から見れば概ね上向きである（赤道だと真上）。したがってほぼ下向き（地球の中心向き）である万有引力を遠心力はいくぶん打ち消すのだ。その結果、低緯度ほど重力は弱くなる、すなわち g が小さくなるのだ。

また、地球の形は完全な球形ではなく、赤道付近がわずかに膨らんだ楕円体っぽい形をしている。だから式 (2.3) でやったように地球の中心に質量が集中しているとみなすのは厳密にはダメである。さらにまた、地球内部の密度は均一ではなく偏りがある。そういうことが総合的に影響して、 g は地表の場所によって複雑なパターンでばらつくのだ。そのことを逆に利用して、重力加速度の計測から地球内部の構造や地下水の様子等を調べることも行われている。これは地学（地球科学）であり、特にこのように地球の精密な重力や形状を調べる学問を測地学という。

詳細は述べない。気になる人はまず大学の数学をしっかりと勉強しよう。

*6 加速度はベクトルなのだから g は「加速度」ではなく「加速度の大きさ」ではないか？ と思う人もいるだろう。その通りである。慣習的に「の大きさ」が省略されていると考えよう。

重力加速度が一定ではないという事実は、農学や生命科学でも注意が必要なポイントである。それが次の問題でわかるだろう：

● 問 20 化学実験では試薬を量り取るときに電子天秤を使う。電子天秤で量る重さはその場の重力加速度に比例する。北海道大学（札幌市）と筑波大学で同じ電子天秤を調整せずに使ったら重さの測定値は何%くらい違うか？ ヒント：「電子天秤の校正 札幌 茨城」などをキーワードにしてインターネットなどで調べよ。

これを意識しないと北大と筑波大で同じ実験をしたつもりでも試薬の量が異なってしまう、違う実験結果になりかねない。また、農作物の取引で高緯度の街と低緯度の街で測った重さが違う！ということがトラブルの原因になるかもしれない。

● 問 21 重力加速度とは何か？

よくある間違い 2 重力加速度とは？ と聞かれて式 (2.8) または式 (2.7) を答えてしまう... そう答えてしまったら g の値が場所によって異なることが説明できません。

さきほど g が加速度の次元を持つことを示したが、 g は実際に加速度として意味を持っている。君が地表付近で何かの物体を落としたら、その物体は加速度 g で加速しながら落下するのだ。そのあたりの事情は後で詳しく述べる。

重力加速度 g の値についてもうひとつ考慮すべきことがある。高度（標高）だ。 g の大部分は式 (2.7) で決まるのだが、その r が変われば当然、 g の値も変わる。

● 問 22 高度 100 m まで上がった野球のボールと、高度 10,000 m の上空を飛ぶ旅客機と、高度 36,000 km の上空を飛ぶ静止衛星では、それぞれ g の値は地表での値の何パーセントほどになるか？ 式 (2.7) によって見積もれ。それぞれの r は地表での r の何倍になるか？

この問題でわかったように、地表と上空 100 m 程度では g は 0.003 パーセント程度しか変わらない。この違いが野球ボールの飛距離に及ぼす影響は（詳細は省略）、100 m の飛距離に対して 3 mm 程度になる。ボールを質点とみなすモデルではボール 1 個分の大きさ（70 mm 程度）の誤差を暗に許容するので、この程度の違いは十分に無視できるので、 g の値は一定値としてよからう。しかし、ロケットを静止衛星の軌道まで打ち上げるときは、さすがに g を一定値にして計算してはダメである。

このように物理学の議論のほとんど全ては何らかの「近似」や「無視」を含んでいる。物理学を使った議論の結末が何かおかしいときは、そのあたりに原因を求めて考えることが必要である。

ただし、だからといって何もかも厳密に精密に考えようとするのもよくない。というのも物理学は精度を追求すればするほど理論が難しくなり、立式や計算が大変になるからだ。問題設定に応じて「これはこだわっても仕方ないな」というものを切り捨てて適切に単純化すること、つまり「モデル化」が重要なのだ。

● 問 23 月の質量は地球の質量の $1/81.3$ 、月の半径は地球の半径の $1/3.68$ である。月の表面で月から受ける重力の大きさは地球の表面で地球から受ける重力の大きさの何倍か？ ヒント：式 (2.1)。 M と r の両方が変わること注意到。

ここで注意。実は純粋な物理学では「重力」と「万有引力」は同じ意味の言葉とされている。一方で地学や測地学などの分野では、本節でそうだったように重力と万有引力を使い分ける。我々は純粋な物理学の理論よりも地球環境などの応用に近い分野なので、これらを使い分ける立場をとるのだ。しかし物理学者の書いた教科書などでは重力を万有引力の意味で使うことがあるので注意しよう。

よくある質問 39 地球の中心に行けたら重力はどのように働くのでしょうか？ ... 全方向からの万有引力が打ち消しあって 0 になります。要するに「無重力」です。

よくある質問 40 地球の質量は一定ですか？ いろんな反応が起こって絶えず変わっているイメージです。... 地球には隕石等が宇宙から飛来して質量を増やす一方、地球大気から（重力をふりきって）宇宙に飛散する分子や原子もあり、質量を減らす。そんなこんなで地球の質量は絶えず微妙に増減しているでしょう。

2.6 計測器の校正とトレーサビリティ

ここで話題はさらに脇道にそれる。といっても大切な話である。

前節で、質量を測る電子天秤は場所によって違った計測値を示すことを述べ、それはトラブルの原因になり得ることを述べた。そのような誤差は重力加速度のばらつきが原因だったりするが、それだけではない。機械の劣化や温度・湿度の変化による機械部品のゆがみなど、

様々な原因があって起きる。

ではそういう誤差はどうやって避けるのだろうか？

端的に言えば、計測器（電子天秤等）が正確な値を示すように調整するのだ。すなわち質量があらかじめ正確にわかっている物体（分銅など）をその計測器に載せて測り、計測値と真値（あらかじめ正確にわかっている値）との関係式（それを検量線という）を求めるのだ。

このような作業を計測器の校正という。校正は電子天秤だけでなく他の様々な物理量の計測機器についても同様に必要である。それぞれあらかじめ正確に値のわかっている対象を計測し、検量線を作るのだ。そして実際の測定値を検量線で計算し直して誤差の小さい値に直すのだ。

と言っても多くの機器は電子化されており、校正で求めた検量線は計測器の中のコンピュータに記憶され、計測値は自動的に計算し直して表示してくれるのでユーザーが普段使うときはいちいち校正を意識することは少ないだろう。

よくある質問 41 なんだ、じゃあ校正のことは心配する必要はありませんね... とんでもない!!! その校正作業は結局は誰かがやらねばならないのです。計測器は校正してこそ価値があるのです。大学だと研究室の先生か大学院生か研究員などの人が、ひそかにやっています。業者さんに依頼してやってもらうこともあります。そういう「舞台裏」を想像・理解するためにも様々な計測の誤差になる要因を知っておく必要があります。それも物理学を学ぶ目的のひとつです。

では校正に使う「あらかじめ値の正確にわかっている対象」はどうやって用意するのだろうか？ その値が正確だということはどうやって保証するのだろうか？ 答は「校正しようとする機器よりも精度の高い機器で測った対象を使う」である。ではその「精度の高い機器」はどうやって校正するのか？ 「それよりさらに高精度な機器で測った対象を使う」のだ。そのようなことを日本で（または世界で）最も正確な機器（国家標準または国際標準）にたどり着くまで繰り返すのだ。これを「計測器のトレーサビリティ」という。こうして世の中にあるたくさんの計測機器を遡るとひとつの基準に到達するような体制を社会で構築・維持するのだ。それは科学技術社会の重要な基盤なのだ。

よくある質問 42 「最も正確な機器」の精度はどうやって保証するのですか？ ... それが先端の物理学です。物理学の基本法則から高い精度で結果を理論的に予想でき、なおかつ計測も可能な現象を測ることで校正します。つまり最後は物理学の

理論と比較して校正するのです。それは大掛かりな装置で大変な作業になります。そのような仕事をどれだけ高い精度で行えるか？ それは一国の科学技術のレベルを決める重要な任務であり、専門の研究機関が担います。日本ではつくばにある産業技術総合研究所がその役割を担っています。

● 問 24 校正とは何か？ 計測器のトレーサビリティとは何か？ 本書の説明を確認した上で、インターネット等でさらに調べて気づいたこと・興味を持ったことを述べよ。

2.7 kgf（キログラム重）という単位

ところで力の単位である N（ニュートン）は物体が加速する現象に基づいて定義されているのでちょっとイメージしにくい。我々が日常で「力」を感じるのは加速現象よりもむしろ、やはり重力にまつわる現象、つまり「重さ」ではないだろうか。

そこで多くの人が「重さ」に基づいた単位で力を表したいなと思う。それが kgf という単位である。kgf はキログラム重とか重量キログラムと読む。kgf は

$$1 \text{ kgf} := 9.80665 \text{ N} \quad (2.9)$$

と定義されている。kgf はもともと 1 kg の物体に地球表面でかかる重力の大きさとして定義されていたが、前述したようにそれは地球の場所場所で微妙に異なるので、定義としてはイケてない。そこで式 (2.9) を使って N と関連付けることで kgf は定義し直されたのである。

重力加速度 g は

$$g = 1 \text{ kgf/kg} \quad (2.10)$$

と表すことができる。なぜか？

$$\begin{aligned} 1 \text{ kgf} &:= 9.80665 \text{ N} = 9.80665 \text{ kg m s}^{-2} \\ &= (9.80665 \text{ m s}^{-2}) \text{ kg} = g \text{ kg} \end{aligned} \quad (2.11)$$

である。この式の最左辺と最右辺を kg で割ると式 (2.10) が得られる。

よくある質問 43 中学では 1 N は約 100 g と習いましたが ... それは間違いです。式 (2.9) から

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kgf}/9.80665 = 0.102 \text{ kgf} \quad (2.12)$$

です。これは「0.102 kg の物体に地表付近でかかる重力」なので、ざっくり「1 N は約 100 g の物体の重さ」と言っても OK です。しかしこの「の物体の重さ」を省略するのは間違いです。

よくある質問 44 そんなのどうだっていいじゃないですか？ ... いえ、ここは譲れません。N は力の単位であり、g は質量の単位です。力と質量は別の物理量なので、どうやっても換算はできません。たとえば 1 L という量（体積）を K という温度の単位で表現することはできないでしょ？ それと同じようなことです。

よくある質問 45 中学の先生が間違っていたのですか？ ... そのような間違いを教える先生がおられるというのは信じがたいですが、先生がそうおっしゃったなら残念ながらそれは間違いです。でもありがちなのは、先生はちゃんと「の物体の重さ」までおっしゃったのに生徒がそれを聞きのがした、あるいは読み飛ばしたというケースです。

● 問 25

- (1) 質量 2.0 kg の物体に 3.0 m s^{-2} の加速度を与えるような力を kgf を用いて表わせ。
- (2) 質量 150 g の物体に 0.40 kgf の力を加えたらどのくらいの加速度が生じるか？

2.8 電荷どうしが引き合ったり反発し合うクーロン力

次に電磁気力について考えよう。電磁気力とは「電荷」を持つ物体に働く力のことだ。では電荷とは何だろう？

物質を構成するのは原子核や原子、イオンなどであり、それらを構成するのは電子や陽子、中性子、中間子など、「素粒子」とよばれる微細な粒子だ。なぜだかわからないが、それぞれの素粒子には、電荷という固有の性質（物理量）がある。

電荷の性質として

- 電荷は正と負という符号のある量である。
- 電子 1 個と陽子 1 個は同じ大きさかつ逆符号の電荷を持っている。

ということが知られている。その理由は根本的にはわかっていない。そのようにこの世界は作られているのだと言うしかない。

そして電子 1 個や陽子 1 個が持つ電荷の大きさ（絶対値）を電荷素量とよび^{*7}、それは

$$q_e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (2.13)$$

^{*7} 電気素量とか素電荷ともよばれる。

である^{*8}。C というのは電荷の単位であり、クーロンとよぶ。SI 基本単位で表せば $1 \text{ C} = 1 \text{ A s}$ （アンペア・秒）だ（これが C の定義でもある）。

上で述べた「電荷の性質」から、電子の電荷は $-q_e = -1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$ 、陽子の電荷は $+q_e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$ である。

よくある質問 46 電荷素量の値は覚えるべきですか？ ... 高校と違って大学では「これは覚えなさい」「これは覚えなくてよろしい」というような指示はほとんどありません。何を覚えるかは学習者であるあなた自身が決めるのです。これは大事だ、便利だ、と思えば覚えればよいし、そうでなければ覚えなくても構いません。何が大事かもあなたが判断するのです。そういう建前はともかく（笑）、電荷素量はやはり大事な量なので有効数字 4 桁程度、つまり $1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ くらいは覚えておくといよいのではと思います。

素粒子以外の物体（原子核、原子、イオン、分子、あるいはもっと大きな物体）は複数の素粒子で構成される。通常、その中には正の電荷を持った素粒子や負の電荷を持った素粒子が混在している。そのような場合、その物体の電荷は各素粒子の持つ電荷の総和（正の値と負の値を加えて差し引きした量）として定義する。たとえば水素原子は 1 個の陽子と 1 個の電子から構成されるが、陽子の電荷は q_e 、電子の電荷は $-q_e$ というように、同じ大きさ（電荷素量）で逆符号なので、その総和（ $q_e - q_e$ ）は 0 である。したがって水素原子の電荷は 0 とみなす。

正の電荷と負の電荷のどちらかが多いときだけ、その物体は 0 以外の電荷を持つことになる。物体が 0 以外の電荷を持つときはその物体は「帯電している」という。

帯電している粒子のことを荷電粒子という。電子や陽子、原子核、イオンなどは荷電粒子だ。荷電粒子のことを電荷ということもある。

電荷や荷電粒子の説明がひとしきり片付いたところで、いよいよ電磁気力の説明に入る。

まず電磁気力のひとつを紹介しよう：「粒子 1」と「粒子 2」という 2 つの荷電粒子があるとき、それらの間には電荷に応じてお互いが引きあう力（引力）またはお互いを遠ざけあう力（斥力）が働く（なぜだかわからないがそういうふうには世界はできている）。その斥力を F とすると、 F は以下の式を満たす（なぜだかわからないがそういうふうには世界はできている）：

^{*8} q_e は電荷素量を表すのによく使われる記号。この他に e という記号も使われるが、ネイピア数（自然対数の底）とかぶってしまっていて紛らわしい（泣）。

クーロンの法則

$$F = \frac{k q_1 q_2}{r^2} \quad (2.14)$$

ここで q_1, q_2 は粒子 1 と粒子 2 がそれぞれ持つ電荷, r は粒子間の距離であり, 斥力は 2 つの粒子を結ぶ直線に平行な向きに働く。 k は定数で, 有効数字 4 桁では $k = 8.987 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$ だ。この式 (2.14) を クーロンの法則 (Coulomb's law) とよび, このように記述される電磁気力を クーロン力 (Coulomb force) とよぶ^{*9}。クーロンというのはこの法則を見つけた物理学者の名前だ。 k の値は記憶しなくてもよいが式 (2.14) は記憶しよう。

クーロン力は電荷を持つ物体に働く力だ。一方, 重力は質量を持つ物体に働く力であった。興味深いことに, これらの数学的な表記, すなわち式 (2.14) と式 (2.1) は互いによく似ている (なぜだかわからないがそういうふうに世界はできている)。したがって, 重力に関して成り立つ議論, 特にその数学的な扱いはクーロン力にも通用することが多いし, その逆も然りである。

よくある質問 47 性質も似ているのでしょうか? この 2 つの式は統合できるのでは? ... 地球中心で重力がゼロになるように, 一様に帯電した球の中心では電場がゼロになる, などのよく似た性質があります。しかしこれらの式の統合には誰も成功していません。

さて, 上述のように電荷には正電荷と負電荷の 2 種類がある。式 (2.14) の q_1, q_2 は正や負の値をとり得るのだ。そして q_1 と q_2 が同符号 (両方とも正, もしくは両方とも負) のとき, 式 (2.14) では F は正になり, そのとき 2 つの粒子の間には斥力 (互いに遠ざける力) がはたらく。一方, q_1 と q_2 が異符号 (片方が正で片方が負) のとき, F は負になり, 斥力の逆方向つまり引力 (互いに引き合う力) がはたらくことになる (ここが重力との大きな違いだ。重力には引力しかない。また「負の質量」は無い)。

- 問 26 クーロンの法則とは何か?
- 問 27 電荷素量とは何か?
- 問 28 互いに 1.0 m 離れたところに存在する 2 個の電子の間にはクーロン力と重力の両方が働く。そのクー

^{*9} クーロン力は「クーロン力」ではなく「クーロンの力」である。ばかばかしいが念のため (笑)。

ロン力を F_e , 重力を F_g とする。(1) F_e の大きさを求めよ。(2) F_g の大きさを求めよ。ただし電子の質量 m_e は, $9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ である。(3) F_g は F_e の何倍か?

2.9 電場, 磁束密度, ローレンツ力

前節で学んだクーロン力は, 荷電粒子が静止していようが運動していようが無関係に働く。ところが電磁気力にはもう 1 種類あって, それは荷電粒子が運動しているときにのみ働くような力である。それらを含めて正確に言えば次のようになる (今は詳細は理解しなくてよい):

電荷 q を持つ荷電粒子に働く力 $\mathbf{F}$ は, 何らかの 2 つのベクトル $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ を用いて次式のように書けることがわかっていて ($\mathbf{v}$ は荷電粒子の速度)。

ローレンツ力

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.15)$$

式 (2.15) で表される力を ローレンツ力 という。このような形で荷電粒子にローレンツ力を及ぼすようなベクトル $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ をそれぞれ 電場 と 磁束密度 とよぶ (定義)^{*10}。

ここで $\times$ という記号が出てきた。これはただの掛け算ではなくベクトルの 外積 というものである。今はとりあえずこれは理解できなくてもよい (知りたい人は数学の教科書を参照せよ)。「そんなものがあるのか」という程度の理解で OK。

よくある質問 48 「今は理解できなくてよい」のならここで教えなくてもよいのでは? ... 「見たこと・聞いたことがある」というのが大事なのです。それが伏線になり, 皆さんの学習効率を高めるのです。

式 (2.15) はローレンツ力を定義する式であり, 同時に電場と磁束密度を定義する式でもある。たとえば「磁束密度とは?」と問われたら, 式 (2.15) をさらっと書いて, この $\mathbf{B}$ のことですよと言えばよいのだ。

- 問 29 (1) ローレンツ力とは何か? (2) 電場の定義を述べよ。(3) 磁束密度の定義を述べよ。

よくある間違い 3 式 (2.15) の $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{v}, \mathbf{F}$ を細字で書いてしまう... それらはベクトルなので太字で書くべきです。

$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$... ダメ

^{*10} そして磁束密度にある定数をかけたものを 磁場 という (詳細は割愛する)。

$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \dots$ OK

● 問 30 (1) 電場の単位を SI 基本単位で表わせ。(2) 磁束密度の単位を SI 基本単位で表わせ。ヒント: 電場と磁束密度の定義である式 (2.15) に戻って考える。電荷と電場の積が力になるので, 電場の単位は力の単位/電荷の単位。同様に電荷と速度と磁束密度の積が力になるので... (以下略)

式 (2.15) の第 1 項は荷電粒子がどのような運動状態にあっても (静止していても運動していても) 同様に働く力である。ところが第 2 項は荷電粒子の速度に依存する力である。速度が 0 の場合は第 2 項は 0 なのだ。つまりローレンツ力には, 荷電粒子に対していつでも同様に働く力と, その粒子が動いているときだけ働く力という 2 種類の力からなるわけだ。そして前者を電気力, 後者を磁気力 (または磁力) という。

前節で学んだクーロン力は式 (2.15) の右辺の第 1 項に相当する「電気力」である。実際, 式 (2.14) で q_2 を q と置いて書き直せば

$$F = q \frac{k q_1}{r^2} = qE \quad \text{ここで, } E = \frac{k q_1}{r^2} \quad (2.16)$$

となる (ほんとは F も E もベクトルのはずだから太字のはずだが, ここではそれぞれの大きさだけを考えよう。ベクトルで考えたいなら章末参照)。これは, 電荷 q_1 を持つ荷電粒子が作る電場 E から, 電荷 q を持つ荷電粒子が力を受けるという解釈である。

● 問 31 1 個の電子から 1.0 m 離れた点での電場の大きさは? ヒント: 式 (2.16)。

この問題でわかったように「1 個の電子の作る電場の大きさ」は距離 r が変われば変わる。つまり 1 個の電子のまわりの各位置で, その電子が作る電場というものが存在するのだ。そのように, 電場は空間の各位置に存在する量である。磁束密度も同様に, 空間の各位置に存在する量である。空間の各位置に存在する量のことを「場」という。

電磁気学において本質的な研究対象は, 電気力や磁気力ではなくむしろこれらの「場」である。そして電場が変わるとそれにつられて磁束密度が変わり, 磁束密度が変わるとそれにつられて電場が変わるということがわかっていく (そのように世の中はできている)。その基本法則をマクスウェル方程式という。それを理解するにはベクトル解析という, 多くの大学 1 年生には未知の数

学 (場の微分と積分に関する数学) が必要なので^{*11}本書では扱わない。また, 特殊相対性理論というものを使うと電場と磁場が統一されるのだが, それも難しすぎるので本書では学ばない。

よくある質問 49 高校で磁力を習ったとき, フレミングの左手の法則というのがありました... 式 (2.15) があればフレミングの左手の法則は不要です。式 (2.15) はフレミングの左手の法則を包含し, それよりも一般性の高い, 強い式なのです。ただしこれを使いこなすには「外積」を理解する必要があります。がんばって数学を勉強してください!

よくある質問 50 磁力は電荷を持った粒子が運動しているときに働くとのことですが, 静止した磁石同士にはたらく磁力はどうなのですか? ... 磁石の中では電子のスピンというもののせいで電流が流れており, それが磁力を作ります。

よくある質問 51 高校では「磁気力に関するクーロンの法則」というのを習ったのですが, 磁石同士に働く力はそれで説明できるのでは? ... 磁荷とよばれる量を考え, 2 つの磁荷 m_1, m_2 が距離 r だけ離れているとき, 両者の間に働く斥力 F は次式のようになるという法則ですね (k_m はある定数):

$$F = \frac{k_m m_1 m_2}{r^2} \quad (2.17)$$

この式を教育現場で教えることには異論があります。というのも, この式は見かけほど単純でも便利でもないのです。まず実験的な事実として, 「磁荷」という量を考える場合, それは単体では存在せず, 常にプラスとマイナスがペアになった状態で存在します。電荷は「プラスの電荷」や「マイナスの電荷」がそれぞれ単体で存在しますが, 磁荷はそうではないのです。にもかかわらずこの式は, m_1 と m_2 という 2 つの単体の磁荷が存在するかのような式なのです (m_1, m_2 がペアになっているから問題ないじゃないかと思うかもしれないけど, そういうことではないのです。この式は m_1 と m_2 の「間」に働く力を述べているので, 「 m_1 と m_2 は別物」という設定なのです)。したがって現実の状況にこの式を適用しようとする, ひとつの「プラスの磁荷とマイナスの磁荷のペア」と別の「プラスの磁荷とマイナスの磁荷のペア」の間に働く力を求めることになり, この式を 4 つ立てなければならないのです。一方, 上で述べたローレンツ力とマクスウェル方程式^{*12}は, そのような不自然さは無く, 普遍的に磁力を扱うことができるのです。したがって私は式 (2.17) すなわち「磁気力に関するクーロンの法則」は必要は無いし, 「磁荷」という量を考える必要も無いと

^{*11} 「ライブ講義大学生のための応用数学入門」で学べる。

^{*12} そこから導出されるビオ・サヴァールの法則というのが現実的な問題設定ではよく使われます。

思っています。実際、これらを使わずに電磁気学を教える教科書はたくさんあります。

よくある質問 52 電磁気力とローレンツ力は同じ意味ですか? ... ほぼそうなのですが、若干微妙なところがあります。というのも特にミクロな粒子の運動は本質的には量子力学を使わないと表現できないものであり、量子力学での荷電粒子の運動は、電場や磁束密度ではなくそれらに関係しているけど別の場である「スカラーポテンシャル」「ベクトルポテンシャル」という量で表現されるのです。つまり、電磁気力を量子力学で扱うと式 (2.15) には出る幕が無いのです。そういう意味でローレンツ力は電磁気力のひとつの表現と考えればよいでしょう。

2.10 発展: 重力やクーロン力をベクトルで表す式

(発展的内容なので興味ある人だけ読めばよい。)

ところで力はベクトル(大きさを持つ量)なのだから、式 (2.1) を力の大きさだけでなく力の向きまできちんと表現できるような式に書き直してみよう。図

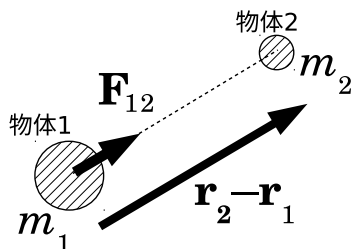


図 2.1 物体 1 が物体 2 に及ぼす重力 $\mathbf{F}_{12}$ 。

2.1 のように、物体 1 と物体 2 があり(ともに質点とみなす)、それぞれの質量を m_1, m_2 とし、それぞれの位置ベクトルを $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ とする(大学ではベクトルを太字で書き表す!)。物体 1 が物体 2 から受ける重力(ベクトル)を $\mathbf{F}_{12}$ とする。まず物体 1 と物体 2 を結ぶ(物体 1 から物体 2 に向かう向きの)ベクトルは $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ である(わからなければ数学の教科書を参照)。そしてその大きさは物体 1 と物体 2 の距離、すなわち式 (2.1) の r である。つまり式 (2.1) は

$$F = \frac{G m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \quad (2.18)$$

と表すことができる。また $\mathbf{F}_{12}$ の向きは $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ と同じ

向きなので、 $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ という単位ベクトル(大きさ 1 のベクトル)で向きが表される。したがって $\mathbf{F}_{12}$ は次式のように表すことができる(この右辺の左半分は式 (2.18) であり右半分は向きを表す単位ベクトル)：

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{G m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (2.19)$$

まとめると次式のようなになる(目指していた式)：

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{G m_1 m_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (2.20)$$

同様の考え方でクーロン力(式 (2.14))を力の方向まで記述できるように書くと次式のようなになる：

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{k q_1 q_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (2.21)$$

ここで $\mathbf{F}_{12}$ は粒子 1 が粒子 2 に及ぼす電気力(ベクトル)、 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ はそれぞれ粒子 1 と粒子 2 の位置ベクトルである。

よくある質問 53 式 (2.21) にはなぜマイナスがついているのですか? ... マイナスは $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ に掛かっていると考えればわかるでしょう。つまり $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, つまり「粒子 2 から粒子 1 へ向かう向き」です。それは粒子 1 にとっては「粒子 2 から遠ざかる向き」です。そちらを向く力は斥力です。これは電荷が同符号のとき($q_1 q_2 > 0$ のとき)、電気力は斥力であるということに整合します。というかそこを整合させるためにマイナスが必要だったのです。($q_1 q_2 < 0$ のときは向きが逆転して式 (2.21) は引力になることもわかるでしょう)。

2.11 解答

答 16 (略解) 1.5 m s^{-2}

答 18 重力・電磁気力・強い力・弱い力

答 19 略。ヒント：式 (2.1) に適切に値を代入して計算。ただし r は km で与えられているので m に換算すること。つまり $r = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ とすること。

答 21 地表付近にある質量 m の物体が地球から受ける重力は mg と書ける。このときの定数 g が重力加速度^{*13}。

^{*13} たまに重力加速度とは GM/r^2 であるという人がいるが、間違い。なぜならこの式は地球を静止した完全な球体とみなしており、この式に従えば地表のどこでも同じ値になってしまうから。実際の g の値は場所によって微妙に異なる。たとえば地下に重いものがある場合は、その直上の地表付近では g は大きくなる。低緯度では地球の自転による遠心力(後に学びます)の影響も g の値に入ってくる。また、ウィキペディアなどには「地球表面付近において物体が受ける重力の加速度」が重力加速度

答 22 地球中心から地表までの距離を r_1 , 地球中心から上空 (野球ボール, 旅客機, または静止衛星) までの距離を r_2 とする。地表の重力加速度を g_1 , 上空の重力加速度を g_2 とすると, 式 (2.7) より,

$$g_1 = G \frac{M}{r_1^2}, \quad g_2 = G \frac{M}{r_2^2}, \quad \text{したがって,}$$

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \left(\frac{6400 \text{ km}}{r_2} \right)^2 \quad \text{である.}$$

野球ボールの場合, $r_2 = 6,400 \text{ km} + 100 \text{ m} = 6,400.1 \text{ km}$ を上の式に代入すると $0.999968 \dots$ 。したがって地表での 99.997 パーセント。旅客機の場合, $r_2 = 6,400 \text{ km} + 10,000 \text{ m} = 6,410 \text{ km}$ を上の式に代入すると $0.9969 \dots$ 。したがって地表の 99.7 パーセント。静止衛星の場合は $r_2 = (6400 \text{ km}) + (36000 \text{ km}) = 42000 \text{ km}$ を上の式に代入すると $0.023 \dots$ 。したがって地表の約 2 パーセント。

答 23 地球の半径を r_1 , 月の半径を r_2 , 地球の質量を M_1 , 月の質量を M_2 とする。問題文より $M_2/M_1 = 1/81.3$, $r_2/r_1 = 1/3.68$ 。さて質量 m の物体が地表にあるとき地球からうける重力を F_1 , 月の表面にあるとき月からうける重力を F_2 とすると, 式 (2.1) より

$$F_1 = G \frac{M_1 m}{r_1^2}, \quad F_2 = G \frac{M_2 m}{r_2^2} \quad \text{したがって,}$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{M_2}{M_1} \times \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 = \frac{1}{81.3} \times 3.68^2 = \frac{1}{6.00}$$

したがって $1/6$ 倍。

答 25 (略解; レポートは導出過程も書くこと) (1) 0.61 kgf (2) 26 m s^{-2}

答 28 (1) 式 (2.14) より, $F_e = 8.987 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \times (1.602 \times 10^{-19} \text{ C})^2 / (1 \text{ m})^2 = 2.3 \times 10^{-28} \text{ N}$

(2) 式 (2.1) より, $F_g = 6.7 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \times (9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})^2 / (1 \text{ m})^2 = 5.5 \times 10^{-71} \text{ N}$

(3) $F_g/F_e = 2.4 \times 10^{-43}$

注: このようにクーロン力は重力よりもはるかに大きい。米国の物理学者リチャード・ファインマンはこれを「光が陽子 1 個の端から端まで通り過ぎるのにかかる時間と, 宇宙の年齢との違いくらい大きい」と表現している。

であると書かれているが, これもダメ。「重力の加速度」とは何か? 重力が加速されるのか? 重力によって何かが加速されるのか? 地面に置いてある石は重力を受けるけど加速されていないよね?

答 31 電場と磁束密度の定義式 (2.15) で, 今は $B = 0$ として両辺を電荷 q で割り, 両辺の絶対値をとって $|F| = F$, $|E| = E$ とすれば $E = F/q$ である。この F に式 (2.14) ($q_1 = q$, $q_2 = q_e$ とする) を代入すると, $E = F/q = k q_e / r^2$ 。 $q_e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$, $r = 1.0 \text{ m}$, $k = 8.987 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$ を代入して計算すると, $E = 1.4 \times 10^{-9} \text{ N/C}$ 。

よくある質問 54 解答を省略するの, やめてください。... これは悩ましい話です。このテキストは 10 年以上かけて作っていますが, 最初の頃は問題の解答が雑だったり「略」が多かったのです。その頃は学生がよく「問題が解けません...」と言って質問にきました。私は彼らと一緒に考えて「正解」だけでなく考え方や勉強法も助言できました。学生の中には, 解答のついていない問題を友達と一緒に考えているうちに数学や物理学の楽しさにのめりこんでしまい, 数学や物理学が大好きになってしまったという人達もいました。

しかし学生から「解答をつけてください」と言われて丁寧に解答をつけるようにしたら, 学生は質問に来なくなりました。そして「解答を丸暗記して再現しただけ」のような答案が増えました。数学や物理学にハマる学生も減りました。

そこで私は気づきました。正解を教えることで学生が成長するなら教えればよい。しかし正解を教えることが学生の成長を損なうこともあるのだと。

学問は「誰かが作った正解を真似したり丸暗記するもの」ではなく, 自分の頭で納得するまで考えるものです。そこが苦しくもあり, 楽しくもあるのです。そうやって人は成長し, 科学は発展するのです。その意味で「問題の解答」はむしろ悪影響をもたらすものではないかと私は悩んでいます。あなたはどう思いますか?

よくある質問 55 でも自力で解いた後の答え合わせには正解を教えてもらうことが必要です。... そもそも「正解」は主観的なものであり, 「誰から見ても完璧な正解」が存在する保証は無いのですよ。実際, 教員や教科書が与える「正解」には間違っていることも多いのです。だからあなたにとっての正解は誰かが与えるものでなく, あなたが作るものです。いろんな観点から考え抜いて「これが正しい!」とあなた自身が納得し, 人にも自信を持って説明できるならそれが「正解」です。お互いの「正解」を比べて議論しながら「より正しい正解」を作るのです。学問は本来そういうものです。

よくある質問 56 でも解答が無いと勉強の効率が悪いです。いくら考えてもわからなくて詰んだとき, 解答がなければどうすればよいのですか? ... その気持ちはよくわかります。そういうときこそ局面を開くべく様々な工夫をして様々なことを学ぶのです。先生に質問に行く, 友達同士で一緒に考える, 図書館で関連する本を探す, ネットの検索や掲示板を使う,

などを自分から試みるのです。そうする中で粘り強さや対人スキルや質問能力などが養われ、人間的にも成長するのです。それが（長期的にみれば）効率の良い学びなのです。

よくある質問 57 そこまで物理学や数学に熱くはなれませんか。... ではその問題をスルーして先送りしますか？それもアリでしょう。他にもやりたいことや、やらなきゃいけないことがありますもんね。実際、多くの研究者も解けない問題やわからない理論を先送りしたまま何年も抱えていたりするものです。どういう選択をするかはあなた次第です。

よくある質問 58 でもそれだと単位がとれないかもしれないじゃないですか ... 1, 2 問できなくても単位を落とすことは減多にないと思いますが、それも嫌ならば諦めずに何かするほうがよいでしょうね。とりあえず勇気を出して先生に質問してはどうでしょう？

第3章

様々な力

3.1 糸やロープに働く張力

ここまでは主に根源的な4つの力について学んだ。ここからはこの4つの力から派生する力について学ぼう。まずは張力という力だ。

例として、君は天井から垂れ下がったロープに吊り下がって静止しているとしよう。簡単のためロープの質量は無視する。ロープのどこかが弱ければそこで切れて君は落下するだろうから、ロープは端から端まで丈夫でなければならない。当たり前の話だが、これは君に働く重力がロープの全ての箇所にも働くからである。

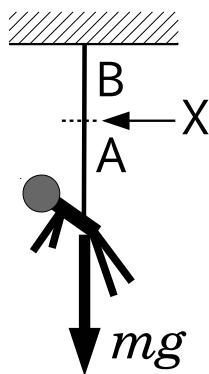


図 3.1 ロープに吊り下がる人

ではロープの任意の1箇所 X を考えよう。そこより下の部分をロープ A、そこより上の部分をロープ B とよぼう。本来はロープ A とロープ B は X で繋がっていて1本のロープなのだが、便宜上そう名づける。

さてロープ A はロープ B を下向きに引っ張っている。これは直感的に明らかだ。

一方、同時にロープ B はロープ A を上向きに引っ張っている。これは作用・反作用の法則で説明できる（ロープ A を「物体 A」、ロープ B を「物体 B」として考えればよい）。わかりにくければ、次のように考えてもよい：仮にロープ B がロープ A を上向きに引っ張っていないとすると、「君の体とロープ A を合わせた物体」に

働く力は重力のみである。しかし今、「君の体とロープ A を合わせた物体」はロープに吊られて「静止」している。静止しているからには「力のつりあい」が成り立たなくてはならない。したがって、ロープ B は X においてロープ A に「君に働く重力と同じ大きさで反対向き（上向き）の力」を及ぼしていると考えざるを得ない。

これらの考察6（「君に働く重力と同じ大きさの力は、ロープの任意の箇所にも働いている」「ロープの任意の箇所では、そこを挟んで互いに逆向きに同じ大きさの力が働いている」）から、次のような結論が得られる：ロープの端に力が働く場合、それと同じ大きさの力が、ロープの任意の箇所において、その箇所を挟んで互いに逆向きに働く。

このような力を張力とよぶ（慣習的には T で表すことが多い）。張力には以下のような性質がある（というかこれらが張力の定義である）：

- 張力は糸状の物体（ロープなど）に働く。
- 張力は糸の各箇所、糸（の接線）に平行に働く。
- 糸にかかる摩擦力や、糸自体の質量にかかる重力が無視できる限り、張力の大きさは糸のどこでも同じである。
- 張力は引っ張りの向きにしか働かない。つまり、張力のかかった糸を任意の箇所、2つに分けて考えると、両者が及ぼすのは互いに引き合う力であり、押し合う力はない。

ところで不幸にして X が弱かったらどうなるだろう？ロープは重力のために X 付近で次第に伸びていき、ついには切れてしまうだろう。すると君に働く重力に抗っていた力は消え、君は重力に引かれて落下してしまう。ただし、その場合でも、ロープが完全に切れる寸前まで張力は存在するのだ。

- 問 32 図 3.2 のように、片端が壁にとりつけられた綱を力 F で引く場合（上）と、両端を力 F で引く場合

(下)では、綱にかかる張力の大きさは、どちらも F で等しい。このことを説明せよ。

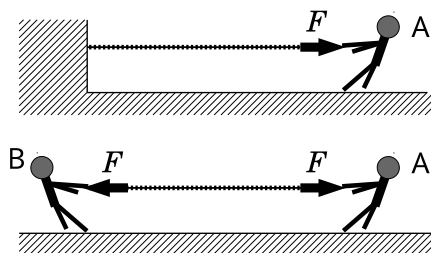


図 3.2 壁対人の綱引き(上)と、人対人の綱引き(下)

よくある質問 59 下の図で綱にかかる力は F でなく $2F$ ではないのですか? ... なぜそう思ったのですか?

よくある質問 60 なぜって、2 方向から引っ張っているから足し合わせて $F + F$ で $2F$ ですね? ... それは変ですよ。P.14 で述べたように、力の合成はベクトルで考えるべきです。2 つの力の方向は互いに逆だから、それらを足すなら単純に 2 倍にはなりません。

よくある質問 61 え!? では $F - F$ でゼロですか? ... はい、実際、綱全体にかかる力(合力)はゼロです。

よくある質問 62 でも張力の大きさは F だって言ってませんでした? ... 「綱全体にかかる力」と「張力」は違います。張力は綱を 2 つの部分に分けて考えたときに、片側がもう片側を引っ張る力です。

● 問 33 図 3.3 のように、質量 m の君は、天井に吊り下げられた滑車に通されたロープの片端を体に結び、もう片端を手を持って、自らの力で自らの体を持ち上げようとしている。君の手がロープを引く力は $mg/2$ であることを示せ(つまり体重の半分の力で君は自分を持ち上げることができるのだ)。

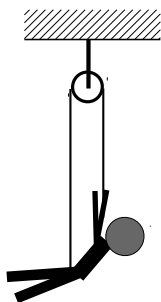


図 3.3 自力で上昇しようとする人

● 問 34 図 3.4 のように、君は天井から固定された滑車 A と自由に上下できる滑車 B (動滑車) を利用して、質量 m の物体をロープで持ち上げようとしている。滑車の質量は無視し、ロープと滑車の間の摩擦は無いものとする。ロープは一端が天井に固定され、滑車 B と滑車 A を通って、もう一端が君の手に握られている。君がロープを引っ張るのに必要な力は $mg/2$ であることを示せ。ヒント: ロープにかかる張力を T とすると、滑車 B には上向きに $2T$ の力が働く。

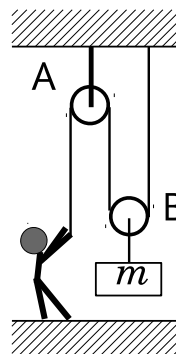


図 3.4 動滑車を使って物を持ち上げる

よくある質問 63 要するに天井と人が半分ずつ引っ張っているということ? ... そうです。

問 34 の考え方を援用すれば、図 3.5 のように、動滑車の数を増やせば増やすほど小さな力で物を持ち上げることができるということがわかるだろう。

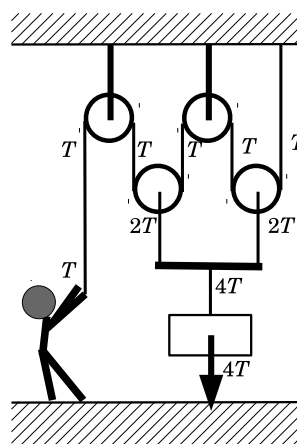


図 3.5 2 個の動滑車を使えば必要な力は $1/4$ になる。

● 問 35 君の手がロープを引っ張るとき、その力の根源は何か?自然界に存在する 4 つの根源的な力に帰着して説明せよ。

3.2 水圧と大気圧

農学や環境科学では水が重要である。灌漑水をどのように制御するか？土の中や作物・樹木の体内でどのように水が分布すれば作物や木がよく育つか？魚や水草を良好な温度や酸素濃度に置くにはどのように水を循環させればよいのか？そのような場面が無数にある。

そこで本節では水に少しこだわった話をしておく。これは大学の力学の標準的なメニューにはほとんど出てこない話だが「農学部物理」には必要な話題である。

まず水圧を復習しよう。水圧は水中や水の端（水と接触する物体との境界面）で発生する圧力である。圧力は面積あたりの力（の大きさ）である^{*1}。

水圧の例を考えよう。

例 3.1 深さが一定の四角い水泳プールがある。水平方向の 2 辺の長さをそれぞれ a, b とし、深さを H とする。容積は abH である。ここに水を満たす。水の密度（単位体積あたりの質量）を ρ とすると、プールを満たす水の質量（＝密度×体積）は ρabH である。したがって水にかかる重力の大きさ（つまり重さ）は $\rho abHg$ である（ g は重力加速度）。この重力をプールの底面（面積 ab ）が支えなければならないので、プールの底での水圧は、 $\rho abHg/(ab) = \rho gH$ である。

同様に、気圧は気体の内部や端（気体と接触する物体との境界面）で発生する圧力である。特に地球や他の星をとりまく大気の圧力を大気圧という。

● 問 36 以下の問に答えよ。

- (1) 水深 1 m のプールの底での水圧が約 100 hPa になることを示せ。
- (2) それは大気圧（有効数字 2 桁で 1000 hPa）の何倍か？
- (3) 地球上の海の平均水深は 3700 m である。その水深での水圧を求め、大気圧の何倍か求めよ。

これらのように、水や大気に重力がかかると水圧や大気圧が生じる。

例 3.2 大気圧は時と場所によって変動するが、標高 0 では約 1000 hPa、つまり約 100000 N/m^2 である。つまり面積 1 m^2 の地表面の上空に、約 100000 N の重さの大気載っている。重力加速度を $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ とすると、その質量は約 $10000 \text{ kg} = 10 \text{ t}$ である。

よくある質問 64 え!!?? 空気ってそんなに重いんですか?? そんなんで人の体はなぜ潰れないのでしょうか? ... びっくりですよ。我々が日常的に暮らすこの地上は、実はこれほど大きい圧力の環境なのです。それでも人は平気なのは進化の結果なのでしょう。ちなみに火星の大気圧は地球の $1/100$ 未満らしいですよ。火星人が地球に来たらしんどいだろうねー（笑）

よくある質問 65 例 3.2 で重力加速度を 10 m/s^2 とするの、違和感あります。 9.8 m/s^2 ではないのですか? ... その前に約 1000 hPa や約 100000 N/m^2 というざっくりな量が出てきたでしょ? だから重力加速度もざっくりの値でよいのです。 9.8 より 10 の方が切りが良くて計算が楽ですよ? 実際にも低気圧や高気圧が来ることで、980 hPa から 1020 hPa 程度の気圧は日常的に発生します。したがって 1000 hPa に対して $\pm 20 \text{ hPa}$ 、つまり 2 パーセント程度の変動があることを許容する設定での議論だと判断できます。 9.8 m/s^2 と 10 m/s^2 の差も 2 パーセント程度です。だからその差を許容したのです。

よくある質問 66 そういふのはどう判断するのですか? ... 話の文脈や雰囲気を読むのです。ああこの話はこのくらいのざっくり加減の話なんだな、という暗黙の了解です。日常でもあるではないですか。昨日何時に寝た? → 11 時半くらいかな? のような話。11 時 28 分 37 秒に寝たなどとは言いませんよね。寝に落ちる瞬間はそもそも曖昧ですし。

よくある質問 67 科学がそんなアバウトなのでよいのですか? ... よいというか仕方ないのです。どのような科学的議論も精度の限界はあります。その議論の精度ではそこだけにこだわって気にしても仕方ないということがあるのです（最初の章の概算の話思い出して下さい）。それを許容できないなら、そもそもの議論の枠組み（依拠する法則やモデル、数値の設定など）から見直すべきなのです。

きっちりやるところとアバウトでやるところを適切に判断して区別するのは大切なことです。その判断は対象に関する知識や経験に基づきます。ここでは気圧の変動がどのくらいあるかという知識です。闇雲に雑にやってよいわけではないのです。

ここで注意!! 実は、地上の水の中の圧力は、水にかかる重力だけでなくその上の大気にかかる重力も加わっている。というかプールの底から見ればその上には水と大気の両方が重なって覆いかぶさっているのだから、両方の重さがかかるのは当たり前である。したがって地球上にある水の中の圧力は、大気圧 + 水にかかる重力による水圧である。

たとえば水深 1 m での「水にかかる重力による水圧」

^{*1} この定義は実は微妙であり、後で検討する。

は 100 hPa 程度だが、実際のその場所での圧力はそれに 1000 hPa の大気圧が載って 1100 hPa 程度になる。

よくある質問 68 え!? 問 36 では 100 hPa って言ってましたよね? 水圧ってどちらのことを言うのですか? ... ケースバイケースです(笑)。多くの場合は大気圧を除外して水にかかる重力による水圧だけを意味します。

よくある質問 69 ケースバイケースって、それで誤解したら大変じゃないですか!! ... そうです。だからこの話をしたので。世の中にはこのような誤解のもとが随所にあります。そして多くの人はそれに気づいていないのに、先程のように「重力加速度を 10 m/s^2 にしてよいのですか?」のようなことは気にするのです。何か変ですよ。

よくある質問 70 人間が地上にいるとき大気圧に押し潰されないでいられるのは、どのような力が内側からはたいているのですか? また、もし人間が体ひとつで大気圧の小さいものすごく高い場所に行ったとしたら破裂するのでしょうか? ... 人体の大部分は水であり、そもそも(液体の)水は圧力がかかってもあまり変形しません。それが「潰れない」ことのひとつの理由。また、肺に空気がありますが、鼻を介して肺は外気とつながっているのでその圧力は基本的に外気の圧力(大気圧)と同じ。したがって肺の空気は大気圧と同じ圧力で押し返すから肺もつぶれない。ただし人間が体ひとつで潜水する場合はこれが成り立ちません。特に水圧のために肺の空気が圧縮されます。そのため、ある程度以上の深さに潜ると人間の体に働く浮力(それは体積に比例する; 後述)が小さくなって、人間の体は勝手に沈んでいくそうです(テレビでやっていました)。

逆に気圧の低いところ、特に真空中では液体が沸騰します(圧力が低くなると液体の沸点は下がる)。

よくある間違い 4 重力が存在しないと水圧は存在しないと思っている... 無重力の空間でも水の入った PET ボトルをぎゅっと握ればボトル内の水に水圧は発生します。

3.3 水圧の大事な性質、パスカルの原理

水圧に関する重要な性質について述べる。ボールを水中深くに沈めると、ボールは水圧を受けて圧縮されて小さくなるが、そのとき楕円形になったりせず球形のまま小さくなる。なぜか? 想像上でボールの表面を多くの小さなタイルの集まり(多くのタイルからできているサッカーボールのようなイメージ)と考えると、タイルはそれぞれいろんな方向を向いているがそれらにかかる水圧は常にタイルに垂直で同じ大きさなのだ(だからボー

ルは均等に圧縮されて球形のまま縮む)^{*2}。

この例のように、一般に、静止した水では水圧は面に対して垂直に力を及ぼし、水圧の大きさは面の向きによらず同じ大きさである、という性質がある。これをパスカルの原理(図 3.6)という。これは中学校や高校物理基礎で習ったがその理由を知る人は少ないだろう。特になぜ「面の向きによらず同じ大きさ」なのだろうか? それについて考えよう。

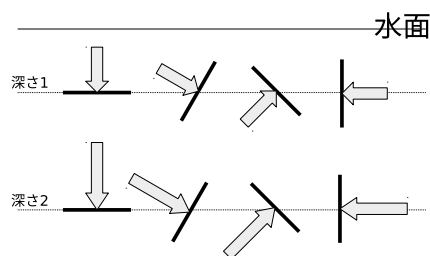


図 3.6 水の中で様々な向きの面に働く水圧。同じ深さなら、面(太い線分)の向きがどうであれ面にかかる水圧は同じ大きさで、面に垂直に力を及ぼす(パスカルの原理)。深さが違えば水圧の大きさ(矢印の長さ)は違う(深いほうが大きい)。

ある深さの水の中にサイコロ状の水の塊をイメージしよう。そのサイコロの外側にも水は切れ目なく続いているのであくまで想像上の「水のサイコロ」である。ここで外側の水の存在を忘れてそのサイコロだけについて考えてみよう。そしてそのサイコロが仮想的に薄いビニールの膜で包まれていたとしよう。そのサイコロの2つの側面を君が両手で挟んで押すとサイコロはどうなるだろう? もちろん押した面の方向には縮み、それ以外の面の方向に水ははみ出ようとするだろう(それはマヨネーズのボトルを両手でぎゅっとしたとき、マヨネーズが口からにゅるっと出るのと同じことだ)。

つまり「特定の面での圧力が大きいと水のサイコロは変形する」のだ。そしてこの対偶は「水のサイコロが変形しないならば、つまり水が静止していれば、どの面にかかる圧力も同じ」となる。つまりパスカルの原理が成り立つ^{*3}。

^{*2} ただしこれは十分に小さいボールについての話。この後の浮力の節で述べるように、水圧は深さによって変わるので実際はボールの大きさに応じてボールの上の部分よりも下の部分に大きな水圧がかかる。

^{*3} ただしこれは厳密な証明ではない。マヨネーズのたとえで直感に訴えてわかった気にしただけである。でもとりあえずそれで納得してもらえれば十分だ。

3.4 浮力は圧力の不釣り合いで生じる力

船が水に浮かぶのは「浮力」のためであり、我々が水中で体を軽く感じるのも浮力のためである。そもそも浮力とは何で、どのような仕組みで生じるのだろうか？ここではそれを述べる。

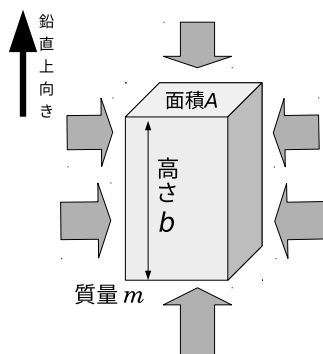


図 3.7 水中に浮遊する直方体状の物体（浮力の説明図）。図の余白は水で満たされていると考えて欲しい。水圧による力（矢印）が各面に働く。左側面と右側面に働く力どうしは大きさが同じで向きが逆なので打ち消す。同様に手前側面と奥の側面に働く力（図ではごちゃごちゃするので省略）どうしは大きさが同じで向きが逆なので打ち消す。上面に働く力より下面に働く力のほうが大きい。したがって差し引き上向きの力がこの物体に働く。

まず静止した水の中に直方体形の物体がどっぷり浸かっている状態を考えよう（図 3.7; 物体は浮き上がり沈み込んだりしないように、極細の糸で上から吊るされたり水の底に係留されていると考える）。その上面や下面の面積（直方体を水平に切った断面積）を A 、直方体の高さを b と置く。この直方体の上面に相当する深さ（水面からの距離）を h とすると、下面に相当する深さは $h + b$ である。この物体に働く力を考えよう。

まず、この物体に働く重力がある。それは鉛直下向きで大きさは mg である（ m は物体の質量）。とりあえずこれは浮力に関係ないので脇においておく（後で再登場する）。

次に直方体の各面に働く水圧による力がある。ところが側面で相対する面に働く「水圧による力」は、それぞれ面に垂直で、互いに逆向きである。そして（同じ深さなので）パスカルの原理によって同じ大きさである。したがって打ち消し合う。

残るのは上面と下面のそれぞれにかかる圧力による力だ。上面での水圧の大きさは既に述べたように ρgh であり、それによる力は下向きで大きさ（＝圧力×面積）は

ρghA である。同様に下面での水圧の大きさは $\rho g(h + b)$ であり、それによる力は上向きで大きさは $\rho g(h + b)A$ である。下面にかかる力の方が大きいのだ。

したがってこれらの合力は上向きでその大きさは $\rho g(h + b)A - \rho ghA$ 、つまり ρgAb となる。これが浮力だ。すなわち浮力は物体の表面にかかる圧力（による力）が釣り合わないことで生じる力である。

ここで Ab は物体（直方体）の体積である。すると ρAb は物体と同じ体積の水の質量と同じであり、したがって ρgAb は「物体と同じ体積の水の重さ」と同じである。

つまり水中の物体にかかる浮力はその物体と同じ体積の水の重さと同じ大きさで鉛直上向きにかかるのだ。

ここでこの物体に働く重力が再登場する。これと浮力のバランスで、浮力が勝てば物体には正味で上向きの力がかかり、物体は浮き上がろうとするし、重力が勝てば沈もうとする。

よくある質問 71 無重力空間でも浮力はあるのですか？ ... 無重力では重さはゼロですから浮力もゼロです。

ここでは話を簡単にするために直方体形の物体で考えたが、これはどんな形状の物体についても言える。それを証明しよう。

静止した水中に任意の形の物体が浮遊しているとしよう。想像の中でその物体を水そのもので置き換えてみる。するとその「物体と同じ形の水の塊」はまわりの水と実質的には境目がなく存在できるから静止していられる。つまりその「水でできた物体」に働く重力と浮力は釣り合うはずだ。そして浮力は物体の表面にかかる水圧による力の合力だから、全く同じ形をした元の物体にも同じ浮力がかかるはずだ。したがって物体にかかる浮力は「同じ体積の水にかかる重さ」と同じ大きさである。

よくある質問 72 この証明があれば直方体に関する先程の証明は無用では？ ... まあそうです（笑）。でも物事はいろんな観点から考えることで深い理解・納得に至りますから。

よくある質問 73 水の中はなぜ無重力ですか？ ... ちょっと語弊がありますね。「密度が水と等しいような物体」に限って水の中は「無重力」です。それは重力と浮力が釣り合うからです。さっきは「脇においておく」と言いましたが（笑）、物体には鉛直下向きに重力が働いています。そして物体には鉛直上向きに「物体と同じ体積の水に働く重力」と同じ大きさの浮力が働いています。もし物体の質量が同じ体積の水の質量と同じならば（つまり物体と水の密度が互いに同じならば）、「物体にかかる重力」と「物体と同じ体積の水に働く重力」は

同じになりますから、「物体に働く重力」と「物体に働く浮力」は同じ大きさで互いに逆向きなので打ち消し合って合力は0、つまり「無重力」になります。

3.5 応力と圧力

ここまで水圧や大気圧を論じてきたが、ここではより一般的に、圧力とは何かを論じよう。化学の授業などでは、圧力は容器の壁に対して気体や液体が及ぼす力を面積で割ったもの、ということが出てくる。しかし本当は圧力はもう少し慎重に定義すべき量なのだ。そのことを説明しよう。

圧力の前にまず応力というものを定義する必要がある。それは面にかかる力を面積で割ったもの（すなわち単位面積当たりの力）である。ここで君は「それは圧力ではないか?」と思うかもしれないが、その疑問は保留にして先を読んで欲しい。

この「面にかかる力」は面に対して様々な方向を持つ可能性がある。たとえば君が消しゴムで鉛筆の字を消すとき、消しゴムを紙に押し付けながら横に滑らす力、つまり消しゴムと紙の接触面に対して斜め方向の力が発生する。この力を消しゴムと紙の接触面の面積で割れば応力である。

応力を「面に垂直な成分」(押し付ける力)と「面に平行な成分」(滑らす力)に分解して、前者を垂直応力、後者をせん断応力とよぶ。消しゴムの例で言えば、消しゴムを紙に押し付けるのが垂直応力、消しゴムを紙に沿ってずらそうとするのがせん断応力だ。

例 3.3 底面積が $A = 4 \text{ cm}^2$ の消しゴムを、大きさ $F = 2 \text{ N}$ で紙面から $\theta = 60$ 度の向きの力で紙面に押し付けた。そのとき消しゴムの底面と紙の間に発生する応力を考えよう。

垂直応力は $F \sin \theta / A = 2 \text{ N} \times (\sqrt{3}/2) / (4 \text{ cm}^2) \doteq 0.43 \text{ N cm}^{-2} = 4.3 \times 10^3 \text{ Pa}$ 。

せん断応力は $F \cos \theta / A = 2 \text{ N} \times (1/2) / (4 \text{ cm}^2) \doteq 0.25 \text{ N cm}^{-2} = 2.5 \times 10^3 \text{ Pa}$ 。(例おわり)

では応力と圧力はどう違うのだろう? 端的に言えば圧力は応力の一種である。

ここで「パスカルの原理」を思い出そう。すなわち、静止した水には「同じ位置なら面の向きによらず同じ大きさの垂直応力が面にかかる」という性質がある。こうい

う性質がある場合は、その応力の大きさが圧力^{*4}である。

実は、静止していない(流れている)水や、静止していても消しゴムのような(流れることがそもそもできない)物体はこの性質を持たない。つまり流水の中や消しゴムの中では、同じ位置でも面の向きによって垂直応力の大きさは変わるしせん断応力が発生しうるのだ(その理由は線型代数という数学が必要なのでここでは述べない)。そのような場合は「その位置で互いに直交する3つの面のそれぞれでの垂直応力の大きさ^{*5}の平均値」を圧力という。

よくある質問 74 圧力って単位面積あたりの面を垂直に押す力の大きさって高校では習いましたが... 高校「物理基礎」の教科書(たとえば啓林館, 2015年)にはそう書いてありますね。要するに(圧縮を正とするような)垂直応力のこと。正確ではありませんが、高校生にはそれが限界なのでしょう。皆さんは大学生なのできちんとした定義をここで述べました。

よくある質問 75 なら直立した人の足の裏にかかる圧力は体重/足裏の面積というのは嘘ですか? ... 厳密に言えば間違いです。それは鉛直上下方向の垂直応力であり、圧力に一致するとは限りません。しかしその人の足裏に接する血管の中の圧力は(血流の流れを無視すれば)それに一致するとしてよいでしょう。

さて、当然ながら応力や圧力の単位は力の単位を面積の単位で割ったものである。国際単位系(SI)では N/m^2 である。 $\text{N} = \text{kg m s}^{-2}$ なので、これは $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$ とも書ける。この単位を Pa (パスカル)とよぶことは既知だろう。

よくある質問 76 「電圧」は電気の圧力ですか? ... 違います。電圧は圧力ではありません。電圧は P.52 で定義します。英語では voltage と言って「圧」に相当する語は入っていません。

よくある質問 77 ではなぜ日本語では「圧」という字が電圧にあるのですか? ... わかりません(泣)。紛らわしいですが、私は単なる記号として受け入れています。漢字の意味や語感からその単語の意味やイメージを作るとするのは、日常では我々はよくやりますが、科学では誤解の元ですから、あまりやらないほうがよいでしょう。

^{*4} ただし圧縮を正の応力と定義する場合。

^{*5} ただし、圧縮を正、引っ張りを負とする。なおこの「3つの面」は互いに直交しさえすれば任意の向きでよい。いろんな選択肢があるが、それぞれで定義した圧力は結果的には同じ値になる。

ここで「流体」という概念について説明しよう。まずガスボンベの中のガス、プールやコップの中の水、消しゴムのように、一定の大きさの空間を気体や液体や固体がみっちり連続的に埋めることで構成される物体を連続体という。

そして「静止状態ではせん断応力が働かないような連続体」を流体と定義する。（液体の）水は流体である。すなわちプールやコップの中で静止している水にはせん断応力は存在しない。なぜか？ もしそれが存在したら水は静止せず、流れて変形するのだ^{*6}。

そして流体、すなわちせん断応力が働かないような連続体にはパスカルの原理が成り立つということが数学的に証明できる^{*7}。つまり流体とはパスカルの原理が成り立つような連続体のことであると言ってもよい。

● 問 37 流体とは何か？「せん断応力」という言葉を使う定義と「パスカルの原理」を使う定義をそれぞれ述べよ。

よくある質問 78 つまり流体って液体と気体のことですか？ ... そうとも限りません。固体なのに流体というものもあります。たとえば地球内部のマントル。地殻の下の厚さ 3000 km 程の部分で、ここは高温な岩石からなりますが、液体ではなく固体です。しかし非常に小さな速さで変形していることがわかっています（マントル対流）。また、氷も固体ですが流体です。山岳地帯（アルプスやヒマラヤ）や高緯度地帯（グリーンランドや南極）にある氷河は数 100 m から数 1000 m もの厚さの氷が自重で変形して、ゆっくり変形・流動しています。

さて圧力は上の定義から、向きを持たない量である。水圧は圧力の一例である。もちろん静止した水の中で水圧のせいで何かの物体に力が及ぼされるとき、その力はベクトル（向きを持つ）なのだが、その向きは「圧力」がもともと持っているものではなくて、圧力を引き受ける物体の表面の向きが決める（面に垂直な向きになる）。だから圧力自体に向きを考えることはできないし、その必要もない。したがって「圧力」は本質的にはベクトルではなくスカラー量なのだ。

よくある質問 79 でも中学校や高校では

$$\text{力} = \text{圧力} \times \text{面積} \quad (3.1)$$

って習いましたが、力はベクトルですよね。でも面積は当然

スカラーだし、もし圧力がスカラーなら、圧力 × 面積 はスカラーになってしまい、ベクトルにはならないです。矛盾していませんか？ ... 実は面積は本来はベクトルとして扱うべきものなのです。それは「面積ベクトル」という概念で、「その面に垂直な向き」を向きとし、「その面の面積」を大きさとするようなベクトルです。そして、単位面積あたりの力とは応力であり^{*8}、圧力はその中に含まれるのです。つまり上の式は

$$\vec{F} = \text{応力} \text{ かける } \overrightarrow{\text{面積ベクトル}} \quad (3.2)$$

と解釈するのが正しいのです。

よくある質問 80 では「応力」はベクトルですか？ スカラーですか？ ... 既に「面の向き」が決まっている場合は応力の向きも決まっているので、式 (3.2) を忘れて面積をスカラーとみなして応力をベクトルとみなすという考え方もアリでしょう。しかしいろんな場合を含めてちゃんと考えるなら、式 (3.2) が大切な式です。この式は右辺の面積ベクトルに応力をかけることで力というベクトルになるという式です。つまり応力は数学的にはベクトルをベクトルに写す「写像」であり、それは数学的にはスカラーでもベクトルでもない、テンソルという概念になります（応力テンソルといいます）。これはいずれ数学で学ぶ「線型写像」や「行列」で説明できるものです。まあ今はあまり気にしないでスルーして下さい。

3.6 弾性力（フックの法則）

次にバネについて考えよう。バネは伸び縮みすると元に戻ろうとする力を発揮する。それを表す法則をここで考えるのである。なお、この話はいずれ拡張されて、バネ以外の多くの「変形すると元に戻ろうとする力を生じよう物体」（楽器の弦、ゴムボール、鉄骨、野菜や果物、多原子分子、地球など）にも適用される。バネはその最も基本的なモデルなのだ。

まずバネの一端を壁かどこかに固定して、そこからバネを直線上で伸び縮みさせることを考えよう。バネのもう一端（壁ではない側）を点 P とよぶ。直線上に x 軸をとり、その上での点 P の座標を x としよう。

バネに力がかかっていない（だらんとした）状態を自然状態、そのときのバネの長さを自然長とよぶ。自然状態での点 P の位置を原点 ($x = 0$) としよう。

バネが点 P で発揮する力を F とすると、 F は点 P の位置 x に依存する関数である。それを $F(x)$ と書こう。その関数を具体的に知らなくても、点 P が位置 x_0 の近

^{*6} パスカルの原理のところでマヨネーズで説明したことがそれである。

^{*7} 正確には、せん断応力が存在しないときは垂直応力の大きさは面の向きによらず等しいということが証明できる。

^{*8} ただし応力は多くの場合、連続体の内部に生じるものであり、物体どうしの境界に働く力（後述する摩擦力や垂直抗力など）を応力ということはほとんどない。

くをうろうろしている場合に限れば、線型近似（「ライブ講義 大学1年生のための数学入門 第5章」を使って

$$F(x_0 + \Delta x) \doteq F(x_0) + F'(x_0)\Delta x \quad (3.3)$$

となる（ $F'(x)$ は $F(x)$ の導関数）。 Δx は P が x_0 からどれだけ離れているかを表す量である。そのような量（基準として考えている場所からどれだけ離れているか）を**変位**という。ここで $x_0 = 0$ としてみよう。そのときはバネは自然状態だから $F(0) = 0$ である（図 3.8 の上の図）。すると上の式 (3.3) は

$$F(\Delta x) \doteq F'(0)\Delta x \quad (3.4)$$

となる。この式は Δx が 0 に十分に近い量のときは良い近似で成り立つ。そこで Δx が十分に 0 に近い範囲に限定して、近似の誤差を無視できると仮定（モデル化）すると、 $F(\Delta x) = F'(0)\Delta x$ となる。ここで形式的に Δx を x と書き直せば^{*9}、

$$F(x) = F'(0)x \quad (3.5)$$

となる。ここで $F'(0)$ の符号について考えよう。バネの力は戻ろうとする方向に働くのだから、変形（変位）と逆向きに働く。したがって x が正なら F は負、 x が負なら F は正である。したがって式 (3.5) において $F'(0)$ は負であるはずだ。そこで形式的に $F'(0)$ を $-k$ と書き換えよう。このとき k は正の定数である。すると式 (3.5) は

フックの法則

$$F = -kx \quad (3.6)$$

となる。これを**フック（Hooke）の法則**という（ちなみにこれを発見したロバート・フックは細胞を発見して cell と名付けた人物でもある）。

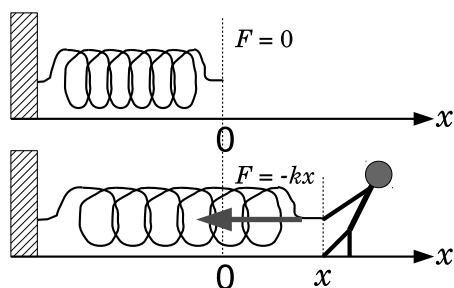


図 3.8 フックの法則

バネの話に戻すと、 F はバネが端に及ぼす力（バネの端についた物体がバネから受ける力）、 x はバネの伸び、 k は**バネ定数**と言われる定数である。

このように、本来は複雑かもしれない関数を一次関数（一次式）で近似する考え方を**線型近似**という。要するにフックの法則は力と変形（変位）の関数の線型近似式に過ぎず、バネ定数とはその関数の微分係数（の絶対値）に過ぎない。

式 (3.6) から明らかに、バネが伸びるほど力の大きさは大きくなる。繰り返すが右辺のマイナスは、バネの伸びの方向（ x の符号）と力の方向（ F の符号）が逆だよということを示す。バネは伸びると（ x が正だと）縮もうとする力、つまり引っ張る力を生じるから F は負になる。一方、バネは縮むと（ x が負だと）伸びようとする力を生じるから F は正になる。

● 問 38

- (1) フックの法則とは何か？
- (2) バネ定数とは何か？
- (3) バネ定数の SI 単位は？

さてこの「法則」は万有引力の法則やクーロンの法則よりもずっと一般性の低い「しょぼい」法則である。フックの法則は限定的な例にしか成り立たない経験則に過ぎない。実際、バネをどんどん伸ばすとまっすぐな針金になってしまっ、それ以上は伸びようがない。無理に伸ばすとぶちっと切れてしまう。したがってフックの法則はバネの伸び（ x ）がゼロに近いときにしか成り立たない。また、そもそもなぜこのような力が生じるかという、バネの中の物質を構成する原子や分子どうしが引き合う力（主に電気力）がその根源にあるからである^{*10}。

式 (3.6) はバネだけに成り立つのではなく、一般に多くの物質や物体に成り立つ。たとえば橋を構成する鉄骨は荷重や自重によって伸び縮みする。フックの法則に従うような力を**弾性力**とよぶ。弾性力によって変形する物体を**弾性体**とよぶ。そう考えるとフックの法則は「法則」というよりもむしろ弾性力や弾性体の定義であるとも言えるだろう^{*11}。

● 問 39 弾性力とは何か？弾性体とは何か？

● 問 40 弾性体ではない存在として「塑性体」という

^{*9} Δx のままでも不都合は無いが、 Δ を書くのがめんどくさいので x と書くのだ。

^{*10} ただし基本法則からフックの法則を導くのは簡単ではない。

^{*11} ただし違う立場の定義もあるので注意。

ものがある。塑性体とは何か調べよ。

よくある質問 81 高校ではフックの法則は $F = kx$ で習ったのですが、 $F = -kx$ との考え方の違いは？ ... $F = kx$ と書くときは力の大きさだけを考えていますが、 $F = -kx$ の場合は力の向きまで考えています。

さて、例としてバネ定数 k のバネを天井からつるし、その先端に質量 m の物体を吊り下げて静止させる。バネ自体の質量は無視しよう。ではバネはどのくらい伸びるだろうか？

鉛直下向きに x 軸をとり、物体をつるす前のバネの先端の x 座標を 0 とする。物体をつるしてバネが x だけ伸びたとき、物体にかかるバネの弾性力は $-kx$ 、物体にかかる重力は mg である（ただし g は重力加速度）。前節で述べた「物体が静止している場合、その物体に働く力（合力）はゼロである」という法則（「力のつりあい」）から、この物体が静止するにはこの 2 つの力の和がゼロでなければならない。したがって

$$-kx + mg = 0 \quad (3.7)$$

したがって $kx = mg$ 、したがって

$$x = \frac{mg}{k} \quad (3.8)$$

である。これがバネの伸びである。

● 問 41 同じ物体と同じバネを月面に持って行って同様の実験をするならば、バネの伸びは地球上の何倍になるか？ ヒント：地球上の重力加速度に相当するものは月面上ではどうなるだろうか？

● 問 42 図 3.9 左のようにバネ定数 k のバネを 2 本、平行にならべて天井からつるし、その先端をつなげて、そこに質量 M の物体を吊り下げて静止させる。バネは $Mg/(2k)$ だけ伸びることを示せ。この状況で 2 本のバネをあわせて 1 つのバネとみなすとき、そのバネ定数は $2k$ となることを示せ。ヒント：重力 Mg を 2 本のバネで分担する。バネ定数を求めるにはバネ定数の定義を思い出すこと。（バネの並列）

● 問 43 図 3.9 右のようにバネ定数 k のバネを 2 本、縦につなげて天井からつるし、その先端に質量 M の物体を吊り下げて静止させる。バネは $2Mg/k$ だけ伸びることを示せ。この状況で 2 本のバネをあわせて 1 つのバネとみなすとき、そのバネ定数は $k/2$ となることを示せ。ヒント：こんどは重力を分担できない。上のバネに

も下のバネにも Mg の力がかかる。（バネの直列）

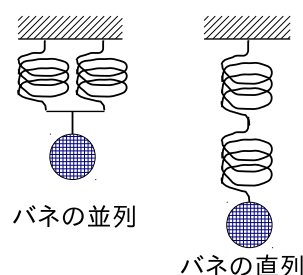


図 3.9 バネの並列と直列

● 問 44 バネ定数 k のバネを a 本だけ縦につないだものを b 本だけ束ねて大きなバネを作ると、そのバネ定数は bk/a となることを示せ（ヒント： n 本の直列を m 本だけ並列）。

断面積 A 、長さ L の棒 X のバネ定数を考える。この棒を無数の小さい（細くて短い）棒の集合（それぞれが弾性体）と考えれば、棒 X の断面積は小さい棒の並列の本数に、棒 X の長さは小さい棒の直列の本数に、それぞれ比例するので、棒 X のバネ定数 k は A/L に比例する。そこで

$$k = E \frac{A}{L} \quad (3.9)$$

と書く。このとき E をヤング率とよぶ。ヤング率は物質に固有の定数（物性値）である。

● 問 45

- (1) ヤング率の SI 単位は？
- (2) 鉄のヤング率を調べよ（「理科年表」*12などを使え）。
- (3) 長さ 10 m、直径 2.0 mm の鉄線の先に 10 kg の物体を吊り下げると鉄線はどのくらい伸びるか？
- (4) (3) で直径を半分 (1.0 mm) にするとどうなるか？
- (5) (3) で鉄のかわりに銅を使うとどうなるか？

ヤング率を使うとフックの法則は以下のように書ける：

$$F = -E \frac{A}{L} x \quad \text{したがって,} \\ \frac{F}{A} = -E \frac{x}{L} \quad (3.10)$$

*12 国立天文台（編）「理科年表」丸善。毎年、最新版が出ているが、基本的なデータはそんなに頻繁には変わらないので、昔の年のものを参照しても大丈夫。

左辺の F/A は単位面積あたりの力で、以前述べた垂直応力（ただしひっぱりを正とする）である。

右辺の x/L は単位長さあたりの伸びであり、「ひずみ」とよぶ。応力を σ 、ひずみを ϵ と書くと、上の式は

$$\sigma = E\epsilon \quad (3.11)$$

と書ける（符号はとりあえず無視した）。これもフックの法則のひとつの表現である。ここで示したフックの法則は、1 方向の伸びと、それと同方向のひずみとの間の関係であったが、それ以外にも様々な方向の応力と様々な方向の歪みに関しても同様の関係が成り立つ。それを総称してフックの法則とよぶ。ただしそれをきちんと表現するには前述したテンソルという数学が必要であり、それは大学 2 年生以降に学ぶ。

● 問 46 (1) 応力の SI 単位は？ (2) ひずみの SI 単位は？

よくある質問 82 フックの法則はバネだけの話かと思っていましたがもっと一般的なものなんですね。... そう。要するに力と変形の線型近似ですからほとんどの物体に成り立ちます。地震の波もフックの法則で説明されます。

3.7 垂直抗力

君が地面に立つとき、君は地球から重力（引力）を受ける。ところが君が静止しているためには君にかかる合力はゼロでなければならない。さもなければ君の体は地面にどんどんめり込んでいくはずだ。「力がどうであれ、そこに固い地面があればめり込んでいくわけがないだろう」と君は思うかもしれない。しかしその考え方は物理学ではダメなのだ。物理学には「固いものにめり込んでいくことはできない」というような法則は存在しない。固いものの表面で物体が静止することもあくまで「力のつりあい」で説明しなければならないし、説明できるものなのだ。

君の足下に固い岩があったとしよう。その岩は君の体重のせいでごくわずか（ほとんど観察されないくらいわずか）だが変形するのだ。その変形をもとに戻そうとする力、つまり弾性力が君の体を押し返すのだ。それが重力と釣り合って君の体にかかる合力はゼロになり、君は地上で静止できるのだ。

このように、物体が固い面に対して垂直に力かけると、面はほとんど変形せずに（といっても弾性力を発揮する程度には変形するが）それと等しい大きさで逆向

きの力を面は物体に対して働く。その力を垂直抗力とよび、慣習的に N で表す^{*13}。

これは物体と「固い面」との間の「作用・反作用の法則」のことなのでは？ と君は思うかもしれない。それは早計である。仮に垂直抗力が無くても作用・反作用の法則は成り立つ。君の体に働く重力は地球が君を引っ張る力であり、その反作用として君は地球を引っ張る。君の足元に地面があったとしても、その地面がゆるゆるの状態、君を全く支えてくれないならば、君の体は加速度を持って地中に沈んでいくだけだ。それでも作用・反作用の法則は（君の体と地球との間で）成り立っている。

でも、もしそこに固い地面があるならばその地面が垂直抗力を発揮して君の体を支えるのである。逆に言えば、ほとんど変形せずに垂直抗力を発揮してくれるような面のことを「固い面」と言うのだ^{*14}。

よくある質問 83 黒板を手で押すとき、黒板がわずかに変形してその弾性力が手を押し返すことで手が静止するという話を別の授業で聞きました。でも手と黒板の間に作用・反作用の法則がはたらくなら、黒板は変形しないでも同じ大きさで逆向きの力が手にはたらくと思います。大きさが同じなら釣り合うんじゃないんですか？ ... とても良い質問です。作用・反作用の法則を学ぶとき、多くの人が感じる疑問です。今学んでいる垂直抗力とも関わりが深いので一緒に考えてみましょう：物体が動く（運動状態を変える）かどうかは「その物体に働く力」が釣り合っているかどうかで決まります。ところが作用・反作用の法則は「その物体に働く力」と同じ大きさで逆向きに「相手の物体に働く力」があるという話です。なので「大きさが同じで向きが逆」ということだけを切り出して「ならば力は釣り合うのでは？」と考えるのは早計です。手が物体を押す力と物体が手を押し返す力が「釣り合っている」としても、そのことは物体の運動にも手の運動にも直接的には無関係なのです。つまり作用・反作用の法則と力のつりあいは無関係なのです。

例としてボール投げを考えましょう。ボール投げの際、手はボールに力をかけますが、その力はボールを加速することに寄与します（これは後に学ぶ運動方程式で説明されます）。一方、ボールは等しい大きさで逆向きに手を押し返します（作用・反作用の法則）。だからボールを投げるときに手は負担を感じるのです（だからピッチャーには体力が必要）。このときボールにかかる力は釣り合っていない。手にかかる力（ボールから受ける反作用の力と、腕の筋肉が手を押し返す力）も釣り合っていない。

*13 N の由来は normal force. normal は「普通の」だけでなく「垂直な」という意味がある。

*14 この例では、君の体に働く力は地球から受ける重力と、固い地面から受ける垂直抗力である。これらの釣り合いによって君の体は静止する。一方、固い地面の表層に働く力は、君の体に働く垂直抗力の反作用（上から下に押し返す力）と、より下の地面から受ける弾性力（下から上に押し返す力）、そしてその層に働く重力（下向き）である。これらの力が釣り合うことで、地面表層も静止する。

手が黒板を押すとやがて動かなくなるのは、筋肉（それは肩から手首にかけての部分）が手（手首から先の部分）を押そうとする力と、黒板が弾性力（それは結局は垂直抗力）で手を押そうとする力が釣り合うからです。その弾性力は、黒板がわずかに歪むことで発生します。したがって手が黒板を押し始めてから黒板が十分に歪むまでの間は、黒板の弾性力は手が押す力よりも弱いので、黒板は徐々に押し込まれて変形します。その過程では手が押す力の「余り」は、黒板の変形を加速することに寄与します（後に学ぶ「運動方程式」で説明できます）。そしてそれらの和、つまり手が押す力と同じ大きさで逆向きの力を手は黒板から受けます（これが作用・反作用の法則）。これは変形の途中で変形しきったときでも同じこと。ところが変形しきったときは黒板の加速度はゼロになるので、結局、手が押す力と黒板の弾性力は等しい大きさになります。

よくある質問 84 物体に力がかかるときごくわずかでもめり込むなら、かなり長い時間、力をかけていたらその物体はへこみますか?... 力の大きさと素材によりますがそういう場合も多いでしょう。短時間では弾性的な（変形に比例した反発力を生じ、力が取り除かれると元に戻る）物体も、長時間、それなりの力にさらされ続けると反発力を徐々に失い、変形が戻らなくなったりします。この性質を弾塑性とよびます。「レオロジー」という学問分野で扱います。

垂直抗力の扱いに慣れるために以下のような例を考えよう。図 3.10 のように傾斜角 θ のなめらかな斜面に質量 m の物体が載っている。この物体には重力 mg が鉛直下向きに働いている。

このとき図 3.10 のように、鉛直下向きの重力 mg は斜面に沿った方向の力と斜面垂直方向の力に分解して考えてもよい。前者の大きさは $mg \sin \theta$ 、後者の大きさは $mg \cos \theta$ である。

と言われてもなぜ斜面に沿った方向と斜面垂直方向に分解するのだろうか？ そうするのが便利だからだ。というのも、もし斜面が固ければ物体が動き得るのは斜面に平行な向きだけで、斜面に垂直な方向には動けない。したがって斜面に垂直な方向では物体に働く力は釣り合っているはずだ。それをまずあぶり出せば物体にかかる合力は求めやすくなる。

さて話を戻すと、物体にはもともと重力の斜面垂直成分 ($mg \cos \theta$) が働いているからそれと同じ大きさで物体を斜面に垂直に押し返す垂直抗力 N があるはずだ（図 3.11）。一方、今考えている斜面はなめらかなので斜面に沿った方向には斜面は物体に力をおよぼさない（つるつるしている!）。結局、物体に働く重力と斜面から物

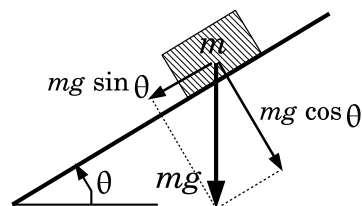


図 3.10 斜面に載った物体とそれにかかる重力

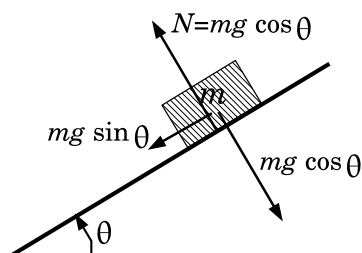


図 3.11 物体は斜面から垂直抗力 N を受ける。

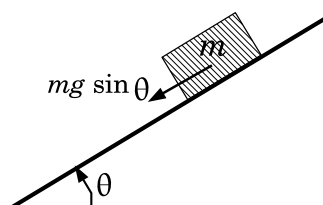


図 3.12 結局、物体は斜面に平行な力だけを受ける。

体が受ける垂直抗力を足し合わせると、物体に働く力として図 3.12 のように斜面に沿った重力 $mg \sin \theta$ だけを考えればよいことになる。

● 問 47 図 3.13 のように、傾斜角 30° と 60° の 2 つのなめらかな斜面にそれぞれ質量 3 kg と質量 m の物体が載せられ、滑車を介してロープでつながり静止している。物体と斜面の間の摩擦は無く、滑車とロープの間にも摩擦は無く、ロープの質量は無視できるほど軽いとする。 m を求めよ。ヒント：ロープにかかる張力の大きさを T とする。まず左の物体が静止する条件から T の大きさが求まる。そして同じ大きさ T の張力が右の物体にもかかる。

よくある質問 85 斜面と滑車の問題は高校時代に挫折したところだ。... 滑車を介したロープはどこでも張力が同じというのがポイントです。

（以下は発展的な内容なので読み飛ばしても構わない）垂直抗力は物体の位置をある面内に限定するために出てくる力である。もちろんそれは面の弾性力などから発

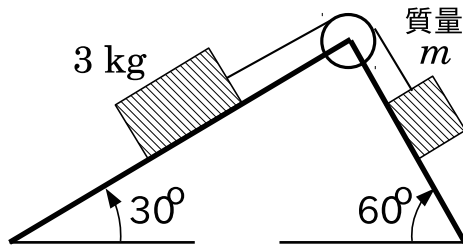


図 3.13 2つの斜面上に載せられロープでつながって静止する2つの物体

生するのだが、物理学の問題として解析する際は、その向きや大きさは、物体が面にめり込んだりしないように（辻褄が合うように）決められる。一般的に、位置や運動を制限するような条件を拘束条件とよび、拘束条件を実現するために働く力を拘束力（constraint force）という。垂直抗力は拘束力の一種であり、「物体がその面にめり込まない」という拘束条件を実現する。張力も拘束力の一環であり、「物体どうしの（糸に沿った）距離を変えない」という拘束条件を実現する。現実的・実用的な状況では運動の多くは拘束条件を伴うが、拘束条件を扱う力学の一般論はかなり難しい。

3.8 摩擦力（クーロンの摩擦法則）

我々は日常経験から、物体と物体を接触させたまま動かす（ずらす）には力が必要だと知っている。ということは接触する物体どうしにはそれらを「ずらすまい」とする力が働くのだろう。そのような力を摩擦力という。ここではそれを司る「クーロンの摩擦法則」というものを紹介しよう。

まず物体どうしが接触面を介して接触面に対して垂直に互いに押し合う力（つまり垂直抗力）の大きさを N とする。2つの物体が互いの位置関係を変えない、つまり相対的に静止している場合（ずれない場合）は、摩擦力は静止摩擦力とよび、その大きさ F_s は

$$F_s \leq \mu N \quad (3.12)$$

を満たす。 μ は静止摩擦係数とよばれる定数で、接触面の物質や状態に依存する。

不等号“ $\leq$ ”は次のような理由による：物体が互いに静止しているからには「ずらそうとする力」と「ずらすまいとする力」（摩擦力）が釣り合うべきである。となると静止摩擦力は「ずらそうとする力」と同じ大きさで反

対の向きの力が発揮される必要があり、それで十分である。すなわち「ずらそうとする力」が小さければ静止摩擦力は小さく、「ずらそうとする力」が大きければ静止摩擦力も大きい。したがって静止摩擦力は状況に応じて臨機応変に決まるのだ。とはいえ「ずらそうとする力」があまりに大きいと静止摩擦力は限界を迎え、それ以上抗うことができない（その結果、物体どうしは滑り始める）。その限界を最大摩擦力とよび、それが右辺の μN である。

よくある質問 86 ちょっと何言っているのかわからずイメージがわかりません... 難しいことは言っていないよ。床に置かれた机を手で水平方向に押すことを考えましょう。押す力が小さければ机は動きませんよね。動かないということは力がつりあっている。つまり「机を押す力」と同じ大きさで逆向きの力が机にかかっているはず。それは床が机の足との接触面を介して机に及ぼす静止摩擦力です。押す力を徐々に強くしていけばやがて机は動き出します。その寸前の摩擦力が最大摩擦力です。

よくある質問 87 ちょっとわかってきました。でも最大摩擦力はなぜ垂直抗力に比例するのですか？ ... それが「クーロンの摩擦法則」のキモのひとつなのですが、経験則（実験的・経験的事実を根拠とする法則）です。イメージとしては上の例で机の上に誰かが乗っているときは机をずらすのにより大きな力が必要ということです。

よくある質問 88 それは単に机に人が乗って重くなるからではないですか？ ... そうですよ。その「重くなる」ことが垂直抗力 N に反映され、したがって最大摩擦力が大きくなるのです。

また、接触面を介して2つの物体が相対的に運動している場合（ずれる場合）は、摩擦力は動摩擦力とよび、その大きさ F_m は

$$F_m = \mu' N \quad (3.13)$$

となる。 μ' は動摩擦係数とよばれる定数で、 μ 同様に接触面の物質や状態に依存する。

式 (3.12) と式 (3.13) をセットでクーロンの摩擦法則という。この「クーロン」は電気的な力の「クーロン力」のクーロン（Coulomb）氏と同一人物である。偉い学者は一人でいくつもの法則を発見するので、後世の我々は「クーロンの法則」といってもどの法則だ? と混乱してしまうのだが、まあそれは仕方がない。

さて多くの場合、 $\mu' < \mu$ である。すると $\mu' N < \mu N$ だから、動摩擦力（左辺）は最大摩擦力（右辺）より小さい。それがなぜなのかは様々な説があるが決定打は無い。

よくある質問 89 なぜもなにも「最大」摩擦力なのだから他の摩擦力はそれより小さいのは当然では？ ... あなたはものわかりが良すぎます。言葉のイメージに引きずられて簡単に分かった気になってはいけません。最大摩擦力は式 (3.12) で述べられているように、あくまでも静止摩擦力の最大です。それがなぜか動摩擦力よりも大きい、と言っているのです。不思議じゃありませんか？ しかも $\mu' N \leq \mu N$ ではなく $\mu' N < \mu N$ なのです。静止摩擦力が限界（最大摩擦力）を超えて物体が動き出すと、途端に摩擦力がガクッと小さくなるのです。

よくある質問 90 そう言われると不思議ですね...。なぜ $\mu' < \mu$ なのですか？ どういうイメージですか？ ... $\mu' < \mu$ となる理由は完全にはわかっていません。よく言われるのが、静止状態では接触面での微妙な凹凸が互いにかみ合って抵抗が大きいのにに対し、動いているとなかなか凹凸がかみあわず滑りやすくなるという説明です。

$\mu' < \mu$ は自動車の安全運転には決して忘れてはいけない大事な法則である。

例 3.4 安全走行中の自動車のタイヤは地面をしっかりとグリップしながら回転している。すなわち、どの瞬間でも接地面ではタイヤと地面は互いにズレずに相対的に静止している^{*15}。つまりタイヤと地面の間には静止摩擦力が働いており、自動車が加速したり減速（ブレーキ）したりするときにタイヤと地面がずれるのを静止摩擦力が防いでくれているのだ。ところが、加速・減速があまりに急だと（急アクセル・急ブレーキ・急ハンドル）、タイヤと地面をずらすようとする力が大きく働く。もしそれが最大摩擦力 μN を超えてしまうと、タイヤと地面のグリップは外れ、滑り始める。すると摩擦力は動摩擦力に変わるのでガクッと小さくなる（ $\mu' < \mu$ ）。つまり車の滑動に抗う力は大きく失われる。するとブレーキもアクセルもハンドルも効かなくなり、車は制御不能になる。多くの場合はこういう状況は高速で発生するので、何かに衝突したときのダメージは大きい。大変危険である。自動車学校で急アクセル・急ブレーキ・急ハンドルが戒められる理由は $\mu' < \mu$ なのだ。

^{*15} 静止していると車は前に進めないじゃないか？ と思うのは早計である。次の微小時間にタイヤは回転して、次の面が地面をグリップする。それを繰り返して車は前進するのだ。

よくある質問 91 「車のブレーキは、タイヤを完全に止めるより少し回しながらのほうが地面との摩擦が大きくなって早く止まれる」と聞いたことがあります。 $\mu' < \mu$ と関係していますか？ ... まさにそうです。タイヤと地面のグリップを外さない限り、動摩擦力よりも大きい静止摩擦力が（最大摩擦力の手前までは）効いてくれます。それを利用したのが ABS（アンチロック・ブレーキング・システム）です。

この「クーロンの摩擦法則」も一般性の低い「しょぼい」法則である。単なる経験則であり、この法則から外れるような例もある。摩擦力は結局、物質どうしが近接して及ぼし合う力なのでおそらく電気力がその根源なのだろう。しかし基本法則からクーロンの摩擦法則を導くことにはまだ誰も成功していない。実は摩擦力の起源や実体はよくわかっていないのだ。クーロンの摩擦法則は多くの人が「しょぼい」と思っているが、誰もそれに代わる法則を見つけ出せないでいる...

よくある質問 92 この法則から外れるような例って具体的には？ ... これは興味がある人だけが読めばよいですが、たとえば土砂や粘土の内部に働く最大摩擦力は式 (3.12) の右辺に定数が加わるような式に修正されます。この定数を粘着力とよびます（このような話は土木工学等で重要）。また水や空気のような流体に働く動摩擦力は速さに依存するため、式 (3.13) のような式では表せません。

● 問 48

- (1) クーロンの摩擦法則とは何か？
- (2) 摩擦係数とは何か？
- (3) 摩擦係数の次元は？
- (4) アンチロック・ブレーキング・システムを説明せよ。

● 問 49 傾斜角 ϕ の斜面上に質量 m の物体が載ってぎりぎり静止している。これよりも少しでも傾斜がきつければ物体は滑り出してしまふ。このとき傾斜角 ϕ と静止摩擦係数 μ の間に次の関係が成り立つことを示せ（このような ϕ を安息角という^{*16}）。

$$\mu = \tan \phi \quad (3.14)$$

式 (3.14) は実際の物体どうしの静止摩擦係数を測る

^{*16} 砂や米粒を上から水平面にパラパラと落とし続けると円錐形の山ができる。その傾斜は砂粒どうしや米粒どうしの摩擦に関する安息角にほぼ対応する。砂や米粒のようなパラパラとした粒の集合を粉流体とよび、それは地すべり等の災害対策から食品工学まで多くの分野に関係する重要な概念である。安息角はその重要な特徴量である。

ときに便利な理論である。2つの物体を接触させ、まず接触面が水平になるように置く。そしてそれらを徐々に傾けていって、片方が滑り出したらそのときの傾きの角 ϕ を分度器で測って式 (3.14) に入れればよい。

さて静止摩擦係数 μ や動摩擦係数 μ' は接触面の物質や状態に依存すると述べたが、接触面の面積には依存しないのだろうか？ つまり垂直抗力が同じであっても、接触面の面積が大きくなったり小さくなったりすることで摩擦力は変わったりしないのだろうか？

実はクーロンの法則（式 (3.12)、式 (3.13)）を前提にすれば「面積には依存しない」ことが数学的に証明される。ここでは述べないが興味のある人は挑戦してみよう（演習問題2）。

3.9 応用：川を流れる水の水压

本章の最後に、農学・環境科学に関連した応用的な話題を扱う。川は水資源の供給源であり、多様な生物の生息地でもある大事なものである。川の水の流れ方はそれらの基盤になる情報であり、その予測や制御には物理学が必要である。

川がプールと違うのは傾斜面の上を流れているということである。図 3.14 は水平面から角 θ だけ傾斜した川を横から見た図である。水は左上から右下に向けて、時間的に一定の速度で流れている。川底に沿って下流方向に x 軸をとり、それに垂直に上向きに z 軸をとる。ここで注意してほしいのは z 軸は鉛直上向きではないということだ。

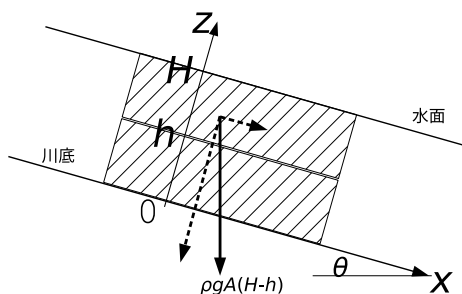


図 3.14 川を流れる水を横から見た図

さて水面が $z = H$ にあるとする。つまり川底から水面まで、 z 軸に沿った距離が H である。この H を「川の深さ」と定義する。

よくある質問 93 え!? 深さって鉛直方向に測るのではない

のですか? ... そこがポイントなのです。もし鉛直方向に測ったら、この場合は H より大きくなりますね。そういうふうには測らないのです。

そして、 $z = h$ の位置では「水深」を $H - h$ と定義する。この位置での水压（水面上にかかる大気圧の影響は考えない） $p(h)$ を求めよう。そのためにはここより上の水塊（ハッチのかかった2つの四角形のうちの上に相当する；底面積を A とする）について、力の釣り合いを考える。この水塊の体積は $A(H - h)$ だから質量は $\rho A(H - h)$ であり（ ρ は水の密度）、鉛直下向きに $\rho g A(H - h)$ という大きさの重力がかかる（ g は重力加速度）。それを斜面に垂直（鉛直ではない）に下向きと、斜面に沿って下流方向に分解すると（図では点線矢印）、それぞれの大きさは $\rho g A(H - h) \cos \theta$ 、 $\rho g A(H - h) \sin \theta$ となる。前者に釣り合うように、この水塊はその下の水塊から同じ大きさで斜面に垂直に上向きの力（垂直抗力）を受ける。つまりこの上下の水塊の境界面（ $z = h$ ）に $\rho g A(H - h) \cos \theta$ という力が発生する。これを面積 A で割るとその場所の水压 $p(h)$ が得られる。すなわち

$$p(h) = \rho g (H - h) \cos \theta \quad (3.15)$$

である。もし傾きが 0 なら（水平で流れていない川） $\theta = 0$ だから $\cos \theta = 1$ となり、 $p(h) = \rho g (H - h)$ となって、プールなどでの水压と同じになる。

ところがこのような理屈を知らないで、水深を鉛直方向で測ってしまい（その場合は $(H - h) / \cos \theta$ になる）、しかも水压を単純にプールと同じように密度 $\times$ 重力加速度 $\times$ 水深で求めると考えてしまうと、

$$p(h) = \rho g (H - h) / \cos \theta \quad (\text{間違い!!}) \quad (3.16)$$

のように思ってしまう。河川の研究をする人はそのようなミスをしてはいけない。

河川や水路や沿岸など、水がある場所・流れる場所の機能や環境は当然ながら水の動きに大きく影響される。ここで挙げたのはごく初歩的な例だが、水の動きを理解・予測するには奥深い高度な物理学が必要なのである。その体系を水理学とよぶ。水に関わる農業、防災、環境、生物学などを研究したり仕事にしようと思う人は、いずれ水理学をしっかり勉強することになるだろう。

- 問 50 斜度 10 度の川で水深が 0.5 m の位置での水压を式 (3.15)（ただし式）と式 (3.16)（間違った式）の

それぞれで計算し、値を比べよ^{*17}。(前者は約 4.8 kPa, 後者は約 5.0 kPa になるはず。回答は有効数字 3 桁で。)

演習問題 1 バネ定数 2.0 N/m のバネを左端から 1.0 N, 右端から 1.0 N の力でそれぞれ引っ張った。伸びはどのくらいか?

演習問題 2 動摩擦係数 μ' は接触面の面積には依存しないことを証明せよ。

実験 1 1 枚のティッシュペーパーから幅 2cm ほどの帯を 2 枚切り出し、それぞれ帯 A と帯 B とよぶ。帯 A はそのままにし、帯 B はねじる(数 10 回)。それぞれの帯について両端をひっぱって引きちぎる。どちらが切れにくい(引きちぎるのにより大きな力が必要)か? また、僅かに湿らせると強さはどうなるか? 結果を述べ、理由を考察せよ。

3.10 解答

答 32 ロープの各箇所仮想的に断面を考える。「壁対人」では人 A がロープを引く力は各断面の左側に大きさ F で右向きにかかる。その反作用は各断面の右側に大きさ F で左向きにかかる。それがロープの左端(壁との接点)まで伝わり、壁との接点では壁はロープから大きさ F で右向きの力を受ける。その反作用としてロープは壁から大きさ F で左向きの力を受ける(この「壁が引く力」がロープの各箇所での左向きの力の源泉であり、そのおかげで「作用・反作用の法則」とつじつまが合う)。これは壁のかわりに別の人がロープを左端で大きさ F の力で左向きにひっぱるのと同じこと。したがって「人対人」でも「人対壁」でも同じことになる。

答 33 君の体には 2 箇所ロープから上向きにひっぱられている。また、ロープの張力 T はロープのどこでも等しい。したがって君の体には上向きに $2T$ の力がかかる。一方、重力によって君の体に下向きに mg の力がかかる。上向きが正になるように座標軸をとると、力のつりあいから $2T - mg = 0$ 。したがって $T = mg/2$ 。一方、君の手がロープを引く力は T に等しいので、結局 $mg/2$ に等しい。

答 34 滑車 B の両端のそれぞれでロープの張力 T が滑車 B を上向きに引く。一方、滑車 B には質量 m の物質

にかかる重力 mg が下向きにかかる。力のつりあいから $2T - mg = 0$ 。したがって $T = mg/2$ 。ロープの張力はロープのどこでも等しいから、君の手にかかる力も T 、すなわち $mg/2$ である。

答 35 君の手がロープを引く力は君の手の筋肉の筋繊維の収縮から生じる。この現象は筋繊維を構成する高分子の変形によって生じる。分子スケールの現象を支配する力はほとんどの場合、電気力である。したがって君の手がロープを引く力の根源は電気力である。

答 38 (1) バネの伸び(変位) x とバネが押す力 F が比例するという法則。(2) フックの法則を $F = -kx$ と書くときの係数 k 。(3) $k = -F/x$ なので F の単位(すなわち $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)を x の単位(すなわち m)で割ればよい。答は $\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$ 。

答 39 力と変位が比例するというフックの法則が成り立つような力を弾性力という。弾性力だけで変形する物体を弾性体という。

答 40 塑性体とは変形すると元に戻らない物体である。(弾性体は力がかかると変形するが、かかる力が無くなれば元にもどる。)

答 41 質量 m の物体が地表にあるとき、バネの伸びが x_0 だったとする。バネの弾性力と(地球からの)重力のつりあいは $-kx_0 + mg = 0$ 。一方、質量 m の物体が月面にあるとき、バネの伸びが x_1 だったとする。月面での(月から受ける)重力は、問 23 より、地表での(地球から受ける)重力の約 $1/6$ なので、バネの弾性力と(月からの)重力のつりあいは、 $-kx_1 + mg/6 = 0$ 。この 2 つの式から mg を消去すれば、 $kx_1 = kx_0/6$ 。したがって $x_1 = x_0/6$ 。したがって月面でのバネの伸びは地表での約 $1/6$ 倍。

答 42 下向きに座標系をとる。左側のバネを A, 右側のバネを B とよぶ。バネ A についてバネが下端に働く力を F , 伸びを x とすると、フックの法則より

$$F = -kx \quad (3.17)$$

である。左右対称なのでまったく同じ式がバネ B についても成り立つ。一方、質量 M の物体にかかる力は 2 つのバネから受ける力、つまり $2F$ と重力 Mg である。物体が静止するには合力はゼロだから

$$2F + Mg = 0 \quad (3.18)$$

これらの式から F を消去すると $-2kx + Mg = 0$ 。し

^{*17} 本当は水の流れの速さに応じて圧力が減るという効果があるが、それはこの問題では無視する。

たがって $x = Mg/(2k)$ である。バネが1本だけのときは $x = Mg/k$ なので(式(3.8)), この結果は k が2倍になったとみなせる。

答 43 下向きに座標系をとる。上のバネを C, 下のバネを D とよぶ。バネ C についてバネが下端に働く力を F_1 , 伸びを x_1 とすると, フックの法則より

$$F_1 = -kx_1 \quad (3.19)$$

である。バネ D についても同様にバネが下端に働く力を F_2 , 伸びを x_2 とすると, フックの法則より

$$F_2 = -kx_2 \quad (3.20)$$

である。一方, 質量 M の物体にかかる力はバネ D が下端に働く力, つまり F_2 と, 重力 Mg である。物体が静止するには合力はゼロだから(力のつりあい),

$$F_2 + Mg = 0 \quad (3.21)$$

である。また, バネ D にかかる力はバネ C が下端に働く力 F_1 と物体がバネ D を引っ張る力(つまり重力)である。バネ D に関する力のつりあいから

$$F_1 + Mg = 0 \quad (3.22)$$

これらの式から $Mg = -F_1 = -F_2 = kx_1 = kx_2$ 。したがって $x_1 = x_2 = Mg/k$ である。2本のバネの伸びの合計 x は $x = x_1 + x_2 = 2Mg/k$ 。バネが1本だけのときは $x = Mg/k$ なので(式(3.8)), この結果は k が1/2倍になったとみなせる。

答 44 問 43 と同様に考えればバネ定数 k のバネを a 本, 縦につなぐと, バネ定数は k/a となる。問 42 と同様に考えればバネ定数 k/a のバネを b 本, 束ねる(並列につなぐ)と, バネ定数は bk/a となる。

答 45

(1) 式(3.9)より, $E = kL/A$ で, k の SI 単位は kg s^{-2} , L/A の SI 単位は $\text{m/m}^2 = \text{m}^{-1}$ なので, E の単位は $\text{kg s}^{-2}\text{m}^{-1}$ 。順番を入れ替えて $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$ などでも OK。なんと! これは Pa, すなわち圧力の SI 単位ではないか!

(2) 約 2.0×10^{11} Pa。

(3) まずこの鉄線のバネ定数 k を求める。 $L = 10 \text{ m}$, $A = 3.14 \times (0.002 \text{ m}/2)^2 = 3.1 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ 。したがって $k = EA/L = 6.2 \times 10^4 \text{ kg s}^{-2}$ 。さて質量 m の物体を吊り下げたときの伸び x は(式(3.8)を使って)

$$x = \frac{mg}{k} = \frac{10 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m s}^{-2}}{6.2 \times 10^4 \text{ kg s}^{-2}} = 1.6 \times 10^{-3} \text{ m}$$

したがって 1.6 mm (約 2 mm) 伸びる。

(4) 伸びはバネ定数に反比例する。バネ定数は断面積に比例する。したがって伸びは断面積に反比例する。したがって直径を半分にする断面積が 1/4 倍になり, 伸びは 4 倍になる。したがって伸びは 6.4 mm になる。

(5) 銅のヤング率は $1.3 \times 10^{11} \text{ Pa}$ 。鉄の約 0.65 倍。伸びはバネ定数に反比例し, バネ定数はヤング率に比例する。したがって伸びはヤング率に反比例する。したがってヤング率が 0.65 倍になれば伸びは 1/0.65 倍。したがって 2.5 mm 程度になる。

答 46 (1) $\sigma = F/A$ より σ の SI 単位は $\text{kg m s}^{-2}/\text{m}^2 = \text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2} = \text{Pa}$ 。(2) $\epsilon = x/L$ より ϵ の単位は $\text{m}/\text{m} = 1$ 。したがって単位無し! (無次元)

答 47 3 kg の物体にかかる重力の, 斜面平行方向の大きさは, $(3 \text{ kg}) \times g \times \sin(\pi/6)$ 。質量 m の物体にかかる, 斜面平行方向の力の大きさは, $mg \times \sin(\pi/3)$ 。これらはともにロープの張力と等しい。ロープの張力 T はロープのどこでも等しいから, $T = (3 \text{ kg})g \sin(\pi/6) = mg \sin(\pi/3)$ 。したがって $m = (3 \text{ kg})g \sin(\pi/6) / \{g \sin(\pi/3)\} = \sqrt{3} \text{ kg} \doteq 1.7 \text{ kg}$

答 48 (1) 物体どうしが接触している場合, 静止摩擦力 F_s と動摩擦力 F_m が $F_s \leq \mu N$, $F_m = \mu' N$ となること。ここで N は物体どうしが互いに接触面に垂直に押し合う力。 μ, μ' は, それぞれ静止摩擦係数, 動摩擦係数とよばれる定数。(2) クーロンの法則が上の式のようにかける時の μ や μ' のこと。(3) $\mu' = F_m/N$ であり, F_m も N も力なので, その比である μ' は無次元。 μ も同様に無次元。

答 49 質量 m の物体に, 斜面に平行にかかる重力(重力の斜面成分)は $mg \sin \phi$ 。これが静止摩擦力 F_s とつりあっている。いま, 静止摩擦力は上限の状態なので, クーロンの摩擦の法則より $F_s = \mu N$ 。ここで N は物体と斜面の間に働く, 斜面に垂直方向の力であり, これは重力の斜面垂直成分に等しい: $N = mg \cos \phi$ 。したがって $F_s = \mu mg \cos \phi$ 。斜面に平行な方向の力のつりあいより $mg \sin \phi = F_s = \mu mg \cos \phi$ 。したがって $\mu = mg \sin \phi / (mg \cos \phi) = \sin \phi / \cos \phi = \tan \phi$ 。

第4章

仕事とエネルギー

注: この章を理解するには「積分」を理解していることが必要。

本章では「エネルギー」について学ぶ。世の中には「エネルギー」という言葉が溢れている。物理学でもエネルギーは大変重要な概念だ。なぜそんなに大事なのだろうか? というかそもそもエネルギーとは何だろうか? それを理解するにはまず「仕事」という概念を定義しなければならない。そこから話を始めよう。

前章で体を滑車に吊るす話や動滑車で物を持ち上げる話、質量の異なる物体を2つの斜面に置いてロープでつないで静止させる話などを学んで、君は不思議に思わなかっただろうか? これらで話はとりあえず力のつりあいや作用・反作用の法則などは成立していた。だが物体をその重さの半分の力で持ち上げられるというのは不思議だ。我々の素直な直感では物を持ち上げるにはその重さ以上の力が必要では? と思ってしまう。しかし実際の自然はそうではない。不思議だ。気持ち悪い。この不思議さをうまく説明し、この気持ち悪さから我々を救ってくれるシンプルな法則は無いのだろうか?

それがここで学ぶ「仕事の原理」そして「仮想仕事の原理」だ。これらは「力のつりあい」をもっと普遍的に述べた物理法則である。「力のつりあい」と等価だが、ある意味それよりも深く根源的な法則なのだ。これらを上手に使うことでいろんな力の大きさがするっとわかってしまう。

4.1 仕事の原理

(この話は中学校や高校でも学んだことを覚えている人も多いだろうが真っ白な気持ちで向き合ってください。)

例 4.1 図 4.1 のように高さ h の丘に質量 m の荷車を押し上げることを考えよう。丘の下の方で運搬者は左側の緩い傾斜 (θ) の斜面 AB で押し上げようか、それ

とも右側のきつい傾斜 (θ') の斜面 A'B' で押し上げようか考えている。どちらの斜面を押し上げるのが楽だろうか? 摩擦は無視する。

直感的に左の (傾斜の緩い) 斜面の方が押し上げるのは楽な気がするが、実はそうでもない。左のほうが押し上げる力は小さくて済むが、そのぶん移動させる距離 (点 A から点 B まで) は長いのだ。

この状況を整理するのが「仕事」という概念だ。仕事とはとりあえずここでは以下のように定義する (後でこの定義は拡張される):

仕事の定義

ある点が動くとき、その点にかかる力について、その移動方向成分と、その点が動いた距離の積を、その力がなした仕事 (work) という。

まず $O \rightarrow A \rightarrow B$ という経路を辿った際に運搬者が発揮する力がする仕事を考えよう。 $O \rightarrow A$ では荷車を水平方向に運ぶが、摩擦が 0 ならば運搬者は荷車を押す力はほぼ 0 であり、したがって $O \rightarrow A$ での仕事は 0 である。そして $A \rightarrow B$ では荷車にかかる重力 (下向きで大きさ mg) の斜面に沿った成分 (大きさ $mg \sin \theta$) に逆らって押し上げる。その距離は $h / \sin \theta$ である。したがって $A \rightarrow B$ での仕事は $mg \sin \theta \times h / \sin \theta = mgh$ となる。つまり $O \rightarrow A \rightarrow B$ の経路での運搬にかかる仕事は mgh だ。同様の検討を $O \rightarrow A' \rightarrow B'$ でも行くと $mg \sin \theta' \times h / \sin \theta' = mgh$ となる。つまり丘に荷車を押し上げることににかかる仕事は左の斜面を経ても右の斜面を経ても同じである。

実はこのような状況は、この「斜面と荷車」の例だけでなくもっと普遍的に成り立つことがわかっており、それを「仕事の原理」という。すなわち

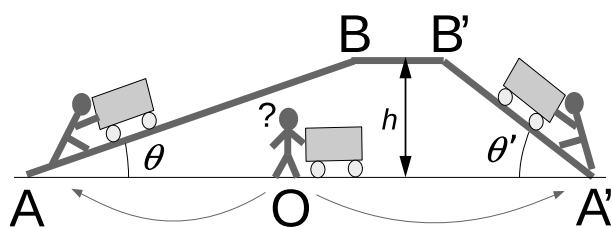


図 4.1 丘に荷車を押し上げる。どちらの斜面を經由するのが楽か？

仕事の原理

摩擦などが働かない状況では、物体を移動させるとき、経路や方法によらず、それにかかる仕事は同じである。

「仕事の原理」は「エネルギー保存則」という、より広くて一般的な基本法則の一部である。実用的にも便利な法則だが、「摩擦など」というあたりが曖昧なので注意が必要である^{*1}。

4.2 仮想仕事の原理

仕事の原理をさらに拡張した「仮想仕事の原理」という不思議な法則がある。

例 4.2 動滑車で物を持ち上げる話（問 34）では、滑車やロープや天井が互いに及ぼす力（張力など）は別とすれば、関与する力は君がロープを下向きに引く力 T と物体に下向きにかかる重力 mg だ。ここで仮想的に君がロープをわずかに手繰り寄せて引き下げたとしよう（図 4.2）。このとき滑車 B が Δx だけ持ち上がったとする。すると当然、物体も同じだけ、つまり Δx だけ持ち上がる。このときロープの動きをたどって考えれば君がロープを手繰り寄せた長さは $2\Delta x$ だとわかるだろう^{*2}。

このとき、下向きに座標をとり、それぞれの力について仕事を考え、それらを合計してみる。

$$T(2\Delta x) + mg(-\Delta x) \quad (4.1)$$

ここで第 2 項の $(-\Delta x)$ のマイナスは、座標の向き（下

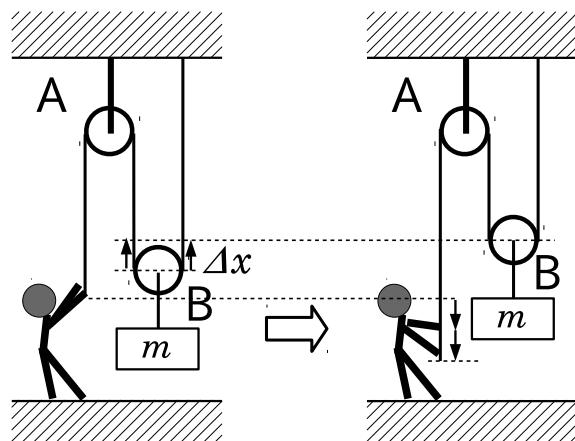


図 4.2 動滑車を使う持ち上げ。物体を Δx だけ上昇させるにはロープを $2\Delta x$ だけ手繰り寄せる必要がある。

向き）とは逆の上向きに物体が移動することをあらわす。で、だまされたと思ってこれを 0 とおいてみよう：

$$2T\Delta x - mg\Delta x = 0 \quad (4.2)$$

すると

$$T = \frac{mg}{2} \quad (4.3)$$

という正しい答えが得られる。これが仮想仕事の原理の例である。（例おわり）

仮想仕事の原理とは以下のようなものである：

仮想仕事の原理

力がつりあっている系では、仮想的な微小変位に伴って外力のなす仕事の総和は 0 である。

「仮想的な微小変位」とは、上の例で言えば君がロープを手繰り寄せる $2\Delta x$ やそれによって物体が上に移動する Δx のことだ。「外力」とは、系の内部で物体同士の間にはたらく力（それを内力という；ここではロープの途中に働く張力や滑車を吊るす天井に働く力など）ではない力のことだ。上の例では君が引く力と、物体にかかる重力のことだ。

なぜ「仕事」とか「仮想的な微小変位」とかの得体の知れぬものを持ち出してこんな「原理」を考えるのだろうか？ それは、これが正しいと仮定すれば、いろんな物事をシンプルに矛盾なく説明できて便利だからだ。なぜこんな原理が成り立つのか、その理由は誰も知らない。自然はそうなっているのだ^{*3}。

^{*1} 詳しく言えば、この原理は物体を動かすのに必要な仕事を経路に依存しないような力（後に学ぶ「保存力」）について成り立つ。しかしこれだけだと明らかにトートロジーであり無意味である。重要なのはそのような要求を満たすような力が現に存在することであり（たとえば重力や静電気力）、そのような力のもとではこの法則が成り立つ。

^{*2} 滑車 B の左右端からそれぞれ長さ Δx だけ上の部分が、手繰り寄せた後には無くなっている。これらの長さの合計は（左右にそれぞれ 1 つずつあるので） $2\Delta x$ である。

^{*3} ただし「力のつりあい」から数学的に導かれる部分もある。

この例では、確かに動滑車のおかげで、ロープを引っ張る力は半分になったが、そのかわり、手繰り寄せる長さは倍になってしまった。つまり、同じ高さだけ持ち上げようとする、かかる力が半分なら、手繰り寄せる長さ（距離）を倍にしなければならない。つまり、たとえ必要な力の大きさは動滑車などで変えることができて、力と距離の掛け算、つまり仕事は、変えることができない。それが自然の摂理なのだ。だから、仕事という概念が便利なのだ。

もうひとつの例を考えよう。前章で考えた、2つの斜面に物体を置いてロープでつないで静止させる話である。

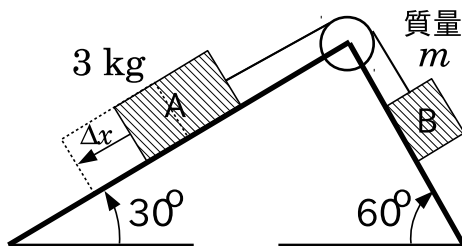


図 4.3 2つの斜面に載せられ、ロープでつながって静止する2つの物体。図 3.13 改変。

例 4.3 前章の問 47 において、物体 A を斜面に沿って左下向きに Δx だけ動かしてみよう（図 4.3）。すると、ロープにつながっている物体 B も、斜面に沿って左上向きに Δx だけ動くはずだ。このとき、物体 A に関して重力がなす仕事は、 $(3 \text{ kg})g\{\sin(\pi/6)\}\Delta x$ である。一方、物体 B に関して重力がなす仕事は、 $-mg\{\sin(\pi/3)\}\Delta x$ である。マイナスがつくのは、物体 B が重力と逆方向（上方向）に移動したからだ。仮想仕事の原理より、

$$(3 \text{ kg})g\left(\sin \frac{\pi}{6}\right)\Delta x - mg\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)\Delta x = 0 \quad (4.4)$$

ここから、 $m = \sqrt{3} \text{ kg}$ が出てくる。（例おわり）

● 問 51

- (1) 仕事とは何か？
- (2) 仕事の単位を SI 基本単位による組み立て単位で表せ。それを J（ジュール）とよぶ。
- (3) 仮想仕事の原理とは何か？

● 問 52 君はてこの原理を聞いたことがあるだろう。これは仮想仕事の原理から導くことができる。図 4.4 上

のように、支点 S の上に左右に長さ l_1, l_2 を持つ「てこ」が置かれ、左右それぞれの端にそれぞれ質量 m_1, m_2 の物体 1, 2 が載っている。これを、図 4.4 下のように、左側が下がるように、仮想的に小さな角 θ だけ下げる。このとき、

- (1) 左端がもとの状態から h_1 だけ下がり、右端がもとの状態より h_2 だけ上がるとすると、

$$h_1 = l_1 \sin \theta \quad (4.5)$$

$$h_2 = l_2 \sin \theta \quad (4.6)$$

となることを示せ。

- (2) 物体 1 における重力による仮想仕事は $m_1 g l_1 \sin \theta$ 、物体 2 における重力による仮想仕事は $-m_2 g l_2 \sin \theta$ となることを示せ。
- (3) 仮想仕事の原理より、次式（てこの原理）を導け：

$$m_1 l_1 = m_2 l_2 \quad (4.7)$$

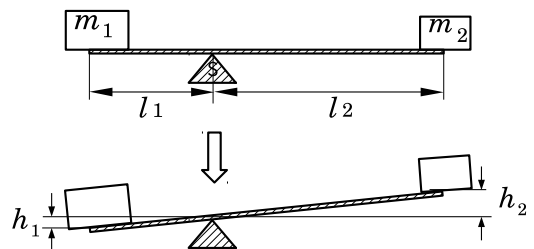


図 4.4 仮想仕事の原理からてこの原理を導く。

前章で述べたように、物体が静止しているとき、力のつりあいを実現している。しかし実は、大きさを持つ物体についてはそれに加えて、上述の「てこの原理」に相当する、モーメントのつりあいというものも実現する。モーメントとは、簡略に言えば、ある点（支点）からの距離と、それに直交する力との積だ。そして、モーメントのつりあいとは、モーメントの合計が 0 になるということだ。高校物理を学んだ人は聞いたことがあるだろう。しかし、これをきちんと正しく記述し、理解するには、数学で「ベクトルの外積」というのを学ばねばならないので、今は詳述しない（第 11 章、第 12 章で学ぶ）。ただし、ここでは、「仮想仕事の原理は、力のつりあいだけでなく、モーメントのつりあいまでも含んだ、一般性の高い法則だ」ということを認識しておこう。

● 問 53 図 4.5 のようなジャッキについて、半径 r のハンドルを 1 回転すると、上載物は Δy だけ持ちあがる

とする。摩擦は無視する。

- (1) ハンドルをまわすのに必要な力を F とする。ハンドルを1回転するとき、君の手がなす仕事は

$$2\pi r F \quad (4.8)$$

であることを示せ。

- (2) 上載物の質量を m とする。ハンドルを1回転するとき、重力のなす仕事は

$$-mg\Delta y \quad (4.9)$$

であることを示せ。

- (3) 次式を示せ：

$$2\pi r F - mg\Delta y = 0 \quad (4.10)$$

- (4) 次式を示せ：

$$F = \frac{mg\Delta y}{2\pi r} \quad (4.11)$$

- (5) $m = 1000 \text{ kg}$, $r = 0.2 \text{ m}$, $\Delta y = 0.003 \text{ m}$ のとき、 F はどのくらいか？

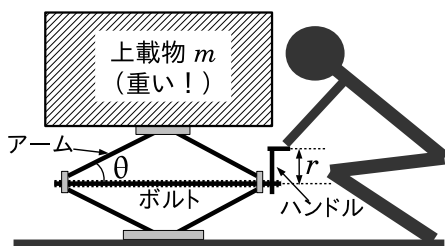


図 4.5 ジャッキで物を持ち上げる。

よくある質問 94 仮想仕事の原理の「仮想的な微小変位」はどうして仮想的である必要があるんですか？ ... 「微小変位」という考え方自体がそもそも仮想的です。バランスしている系に少しでも変化を加えたらバランスが崩れるかもしれない。でも「バランスを崩さない程度に小さな変位」というのが微小変位であって、そもそもそんなのは厳密・現実的に無理では？ という気持ちがあるから「仮想」なのです。

よくある質問 95 仮想仕事の原理に鳥肌が立ちました。自然の不思議さを感じざるを得ません。... このような原理を見つける旅が、学問としての物理学なのでしょう。

よくある質問 96 仕事の定義って中学校で習いましたっけ？ 覚えていないのですが... ... そういう人は結構いますが(笑)。

習ったはずですが。中学生はまだ幼いので、物事の重要性や意味がわからず、それが何？ というかんじでスルーしたのでしょう。

4.3 エネルギーは仕事を一般化した概念

さて、仮想仕事の原理では「仕事」という量が重要な働きをした。それにとどまらず、仕事は物理学の全般にわたって重要な役割を果たす概念だ。例として図 4.2 の例をもういちど考えよう。君がロープを引くことで

$$2T\Delta x$$

という仕事をしたとき、同時に質量 m の物体にかかる重力が

$$-mg\Delta x \quad (4.12)$$

という仕事をした。このとき仮想仕事の原理から、両者の和は0である。

君がロープを引くことによって君は仕事をし、実際される。しかしその努力は重力に逆らって物体が上昇したという結果（重力による負の仕事）に残っている。この上昇した状態で物体に別のロープとか滑車とかてこをつければ、今度は物体が下がることによってまた別の物体を持ち上げることができるだろう。

このような話はお金のやりとりに似ていないだろうか？ A 君が B 君に 1000 円を譲渡したとする。なぜそんなやりとりが起きたかとか、それによって2人の関係はどうなるか、という観点を無視すれば、2人以外の人にしてみれば、お金のやりとりは2人の間で完結している（2人あわせた収支は0である）。そして A 君からもらった1000 円で、こんどは B 君が C さんから何かを買うことができる。

物理学における仕事は、この話の「お金」のような役割をする。A 君、B 君、C さん、... とお金が手渡されていくように、君がロープを引くことでなした仕事は後々まで形を変えながら様々なところに受け渡されるのだ。そのように仕事を普遍化した量を、物理学ではエネルギーという。これはとても大事なので大きく書いておこう：

エネルギーの定義

仕事か形を変えた量、もしくは仕事に形を変えることができる量をエネルギーという。

エネルギーは仕事と同じ次元を持ち、その単位は SI 単

位系では J である。

● 問 54 エネルギーとは何か?

エネルギーには様々な形態がある。熱もエネルギーだ。なぜか? たとえば気体に熱を加えると膨張し、まわりのものを移動させることができる。つまり仕事ができる。だから熱はエネルギーである。

光もエネルギーの一形態だ。なぜか? 太陽光を浴びると暖かくなる、つまり熱を受け取ることができる。熱はエネルギーなので、光はエネルギーを運ぶのだ。

熱は後に学ぶ「運動エネルギー」というタイプのエネルギーに帰着させて考えることができる。また、この章の後半で学ぶ「ポテンシャルエネルギー」というタイプのエネルギーもある。物質が化学反応するときに出る熱や光は、物質の分子レベルでのポテンシャルエネルギーの変化によるものである。

さて仕事についてもう少し丁寧に数学的に意味づけよう。

さきほど仕事とは「力と、その力が働く点が”力と同じ向き”に動いた距離との掛け算」であると述べたが、それが成立するのは、その点の移動中に力がほとんど変化しないことが必要である（でなければどの時点での力を掛け算すればよいかわからない）。では移動中に力が次第に変化するような場合は仕事はどのように定義されるのだろうか?

いま、ある物体に力 F がかかっているとき、それを力の向きに Δx だけ動かす。 Δx だけ動かす間には F は変化しないと考える。するとその力がする仕事 ΔW は

$$\Delta W = F \Delta x \quad (4.13)$$

である。これは仕事の定義だ。これをたくさん繰り返すことを考えよう。いま、座標上で位置 x_0 にある物体を位置 x_1 まで運ぶとする。この間、物体にかかる力は変化するかもしれないが、 x_0 から x_1 まではとても近くて、その間の力の変化は無視できるくらいに小さいとする（逆に言えば、力の変化が無視できるくらいに x_0 と x_1 を近づける）。つまり、この間の力は F_1 でほぼ一定値とみなせる。このときの仕事 ΔW_1 は、上の式から

$$\Delta W_1 \doteq F_1 \Delta x_1 \quad (4.14)$$

である（ $\Delta x_1 = x_1 - x_0$ とする）。位置 x_1 まで来た物体は、こんどは x_1 のすぐ近くの位置 x_2 まで運ばれ、その間、物体にかかる力は F_2 で一定であるとする（ただし F_2 は F_1 と同じとは限らない）。このときの仕事 ΔW_2

は、同様に

$$\Delta W_2 \doteq F_2 \Delta x_2 \quad (4.15)$$

である（ $\Delta x_2 = x_2 - x_1$ とする）。以下同様に物体をすこしずつ $x_3, x_4, \dots, x_n$ まで順次運び（ n は正の整数）、各ステップでは物体に $F_3, F_4, \dots, F_n$ というそれぞれ一定値の力がかかっていると、各ステップでの仕事は

$$\begin{aligned} \Delta W_3 &\doteq F_3 \Delta x_3 \\ \Delta W_4 &\doteq F_4 \Delta x_4 \\ &\dots \\ \Delta W_n &\doteq F_n \Delta x_n \end{aligned} \quad (4.16)$$

となる。これらを辺々で合計すれば

$$\sum_{k=1}^n \Delta W_k \doteq \sum_{k=1}^n F_k \Delta x_k \quad (4.17)$$

となる。左辺は物体を x_0 から x_n まで運ぶときの全体の仕事であり、これを W と書こう:

$$W \doteq \sum_{k=1}^n \Delta W_k \doteq \sum_{k=1}^n F_k \Delta x_k \quad (4.18)$$

ここで n を十分大きくとって、 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の分割を十分に細かくすれば、すなわち式 (4.18) の極限として

$$W = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n F_k \Delta x_k \quad (4.19)$$

を考えれば、積分の定義（数学の教科書参照）より次式が成り立つ:

—— 仕事の定義（力が一定でない場合） ——

物体が位置 $x = a$ から位置 $x = b$ まで移動するとき、物体にかかる力 $F(x)$ のなす仕事 $W_{a \rightarrow b}$ は

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b F(x) dx \quad (4.20)$$

ここで x_0 を a に、 x_n を b に、 W を $W_{a \rightarrow b}$ に、それぞれ改めて書き換えた。 $F(x)$ は x の各点で物体が受ける力だ。この式 (4.20) は、仕事の定義式 (4.13) を「力が次第に変化する場合」に拡張した（つまり、より一般性の高い）仕事の定義式である。

例 4.4 バネの力のなす仕事を考えよう。バネが伸びたり縮んだりするとき、その伸びや縮みが大きいほど力は強い。つまり力が一定ではない。そこでバネが伸びたり縮んだりするときの仕事は単純に「力かける距離」ではダメで、式 (4.20) を使わねばならないのだ。

ではバネ定数 k のバネについた物体を動かすときの仕

事を求めよう。物体の位置を x とし、バネが伸びる方向に x 軸をとる。バネの自然状態では $x = 0$ としよう。物体が位置 x にあるときにバネが物体に及ぼす力を $F(x)$ とすると、フックの法則(式(3.6))より $F(x) = -kx$ である。すると物体を位置 $x = x_0$ から位置 $x = x_1$ まで動かすときにバネの力がなす仕事 $W_{x_0 \rightarrow x_1}$ は、式(4.20)より次式のようになる:

$$W_{x_0 \rightarrow x_1} = \int_{x_0}^{x_1} (-kx) dx = -\frac{1}{2}k(x_1^2 - x_0^2) \quad (4.21)$$

● 問 55

- (1) 上の説明を再現して式(4.21)を導け。
- (2) バネ定数 6.0 N/m のバネを自然状態から 3.0 m だけひき伸ばすとき、バネの力がなす仕事は?
- (3) このバネを自然状態から 3.0 m だけ押し込むとき、バネの力がなす仕事は?

例 4.5 一定の質量 m の物体が高さ h_0 から h_1 まで移動するとき、重力のなす仕事 $W_{h_0 \rightarrow h_1}$ を求めよう。座標軸を上向きにとると、重力は、式(2.4)より

$$F = -mg \quad (4.22)$$

である。 g は重力加速度である。右辺のマイナスは重力が座標軸の向きとは逆向きであることを表す^{*4}。したがって、式(4.20)より、仕事は次式になる:

$$W_{h_0 \rightarrow h_1} = \int_{h_0}^{h_1} (-mg) dx \quad (4.23)$$

ここでもしも g が一定なら(質量 m はもともと定数であることに注意)この積分は定数関数 $(-mg)$ の積分なので簡単に実行できて、次式のようになる:

$$\begin{aligned} W_{h_0 \rightarrow h_1} &= -mg[x]_{h_0}^{h_1} = -mg(h_1 - h_0) \\ &= mg(h_0 - h_1) \end{aligned} \quad (4.24)$$

もっともこの状況では力 $-mg$ が一定なので、わざわざ積分を持ち出さなくても「力かける距離」で十分だ。力は $-mg$ で距離は $h_1 - h_0$ でその積は $-mg(h_1 - h_0)$ となり、式(4.24)に一致する。(例おわり)

よくある質問 97 式(4.24)で $mg(h_1 - h_0)$ ではダメですか? ... ダメです。 $h_0 - h_1$ と $h_1 - h_0$ では符号が逆になってしまいます。符号には意味があるのです。もし $h_0 > h_1$ なら(つまり物体が下がる時)、式(4.24)では W は正になります。

これは「力(重力)の向き」と「移動の向き」が一致するので仕事は正になるということに対応します。そしてもし $h_0 < h_1$ なら(つまり物体が上がる時) W は負です。これは重力に逆らって動く状況であり、重力のする仕事は負になるということに対応します。あなたの提案する $mg = mg(h_1 - h_0)$ は、あえて言えば「重力のする仕事」ではなく「重力に逆らって物体を移動させる誰かの手の力のする仕事」です。

よくある質問 98 例 4.5 で座標軸は下向きじゃダメですか? ... OK ですよ。その場合 $F = mg$ となり、 $W_{h_0 \rightarrow h_1} = mg(h_1 - h_0)$ 。これは本文の結果とは符号が逆のように見えますが、今の場合は h が大きいと低いので、結局、物体が下がる時 $h_0 < h_1$ となり、そのとき $W_{h_0 \rightarrow h_1}$ は正になる。という結論は変わりません。本文で座標を上向きにとったのは「高いところほど h が大きい」ほうが我々の空間認識では直感に素直だからです。

● 問 56

- (1) 仕事の定義(式(4.20))から出発して式(4.24)の導出を再現せよ。
- (2) 質量 140 g の野球ボールが高さ 50 m から地表まで重力に引かれて移動する(要するに落下する)とき、重力のする仕事を求めよ。
- (3) 質量 60 kg の人が駿河湾の海岸(標高 0 m)から富士山頂(標高約 3800 m)まで移動する(要するに登山する)とき、重力のする仕事を求めよ。

実は例 4.5 は、「もしも g が一定なら」は厳密には成立しない。というのも、前章で述べたように重力加速度 g の値は標高によって変化する。この運動では高さ(標高)が変化するのだから、 g は一定ではない。したがって物体にかかる力 $-mg$ は一定ではなく、式(4.23)の積分で $-mg$ を「定数関数」とみなすことは厳密には正しくない。つまり式(4.24)は、 g の変化が実質的に無視してもかまわないような状況(ごく小さな標高変化での議論とか、あまり精度にこだわらない議論)に限定的に許される「近似」である。

ではこの仮定を外す、つまり g の標高依存性を考慮に入れるとどうなるだろうか? それが次の例である:

例 4.6 質量 m の物体 A が質量 M の物体 B から万有引力を受けながら、物体 B からの距離が R_0 から R_1 まで変化する。このとき万有引力のなす仕事を求めよう。座標軸を物体 B から物体 A の向きにとると、万有引力

^{*4} 式(2.4)では力の向きを考えず、力の大きさだけを考えていたことに注意せよ。

は、式 (2.1) より

$$F = -\frac{GMm}{x^2} \quad (4.25)$$

である。ここで右辺のマイナスは万有引力が座標軸の向きとは逆向きであることを表す^{*5}。式 (4.20) より

$$\begin{aligned} W_{R_0 \rightarrow R_1} &= \int_{R_0}^{R_1} \left(-\frac{GMm}{x^2} \right) dx = \left[\frac{GMm}{x} \right]_{R_0}^{R_1} \\ &= \frac{GMm}{R_1} - \frac{GMm}{R_0} \end{aligned} \quad (4.26)$$

となる。特に物体 A が無限遠から距離 R まで物体 B に近づくときは、 $R_0 = \infty$, $R_1 = R$ として、式 (4.26) は次式のようになる：

$$W_{\infty \rightarrow R} = \frac{GMm}{R} \quad (4.27)$$

(例おわり)

- 問 57 式 (4.26) を導出せよ。

式 (4.26) と式 (4.24) は似たような話題だったので、両者の関係を確認しておこう。前者で物体 B を地球とし、地球の半径を r とする。 $R_0 = r + h_0$, $R_1 = r + h_1$ とすれば、式 (4.24) の状況になる。すると式 (4.26) は次式のようになる。

$$W_{h_0 \rightarrow h_1} = \frac{GMm}{r + h_1} - \frac{GMm}{r + h_0} \quad (4.28)$$

- 問 58

- (1) $y = 1/(1+x)$ という関数を考える。 x が十分に 0 に近いときは $y \doteq 1-x$ と近似できることを示せ (ヒント：線型近似)。
- (2) $y = 1/(a+x)$ という関数を考える (a は正の定数)。 $a \gg |x|$ の近いとき、 $y \doteq (1/a) - (x/a^2)$ と近似できることを示せ。ヒント： $y = (1/a)\{1/(1+x/a)\}$ と変形し、 x/a を前小問の x に相当するものとみなして前小問を利用。
- (3) $r \gg h_1$ かつ $r \gg h_2$ と仮定して次式を導け：

$$W_{h_0 \rightarrow h_1} \doteq \left(\frac{GM}{r^2} \right) m(h_0 - h_1) \quad (4.29)$$

- (4) $GM/r^2 = g$ であることを式 (2.7) で確認し、それを用いて式 (4.26) と式 (4.24) の関係を述べよ。

- 問 59 質量 m の質点を高さ h から地表まで移動させるときに重力がなす仕事を E とする。

- (1) E を式 (4.24) と式 (4.26) のそれぞれを用いて表せ (前者を E_1 , 後者を E_2 とする)。
- (2) $m=10$ kg として、 $h = 100$ m (野球のホームランボールの高度), $h = 10$ km (旅客機の飛行高度), $h = 1000$ km (人工衛星の高度) のそれぞれの場合で E_1 と E_2 を求めて比較せよ。有効数字 3 桁程度で。なお地球を半径 $R = 6370$ km, 質量 $M = 5.972 \times 10^{24}$ kg の球とし、重力加速度を $g = 9.823$ m s⁻² とする。物体に働く力は重力以外の力、たとえば自転による遠心力などは考えない。
- (3) h が大きい場合に E_1 と E_2 が違う値になるのはなぜか？

ところで式 (4.20) は、以下のようなトピックとして「化学」でも出てくる。

- 問 60 気体を膨張させたり圧縮したりするときの仕事を考えよう。ある気体が断面積 A のシリンダー (筒状の容器) に入っており、上面がピストンで蓋してある。鉛直上向きに x 軸をとり、シリンダーの底面で $x = 0$ とする。ピストンは x 軸にそって上下に動くことができる。最初、ピストン (つまり蓋) は $x = h$ にあって静止しているとする (図 4.6)。ピストンは十分に軽いとし、重力を無視する。気体の圧力を P とする。

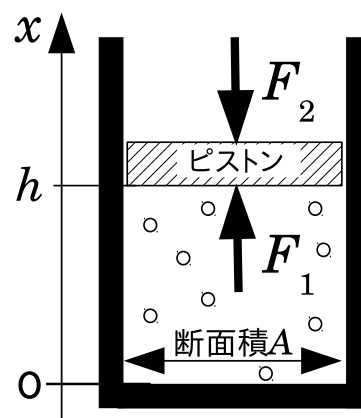


図 4.6 気体が入ったシリンダー。

- (1) 気体の体積 V は $V = Ah$ と表せることを示せ。
- (2) 気体がピストンに及ぼす力 F_1 は

$$F_1 = PA \quad (4.30)$$

となることを示せ。

^{*5} 式 (2.1) では力の向きを考えず力の大きさだけを考えていたことに注意せよ。

- (3) 外部からピストンにかかる力(それを外力という^{*6})を F_2 とすると

$$F_2 = -PA \quad (4.31)$$

となることを示せ。

- (4) 次にピストンをゆっくり動かして $x = h + dh$ の位置に移動させることを考えよう。 $dh > 0$ なら気体は膨張し、 $dh < 0$ なら気体は圧縮される。 dh は微小であり、ピストンが $x = h$ から $x = h + dh$ まで動く間に F_1 や F_2 はほとんど一定であるとみなす。このとき外力がなす仕事 dW は

$$dW = F_2 dh = -PA dh \quad (4.32)$$

となることを示せ。

- (5) 体積の変化を dV とする。すなわちピストンの移動後に気体の体積は $V + dV$ になったとする。次式を示せ:

$$dV = A dh \quad (4.33)$$

- (6) 式 (4.32), 式 (4.33) より次式を示せ:

$$dW = -P dV \quad (4.34)$$

- (7) ピストンを大きく動かし、体積が V_1 から V_2 になるまで変化させることを考えよう。この間に外力がなす仕事 $W_{V_1 \rightarrow V_2}$ は次式のようになることを示せ:

$$W_{V_1 \rightarrow V_2} = - \int_{V_1}^{V_2} P dV \quad (4.35)$$

- (8) ここで気体は理想気体であるとしよう。つまり理想気体の状態方程式:

$$PV = nRT \quad (4.36)$$

が成り立つとする (n はモル数, R は気体定数, T は絶対温度)。次式が成り立つことを示せ:

$$W_{V_1 \rightarrow V_2} = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV \quad (4.37)$$

- (9) ここでさらにピストンの移動は十分にゆっくりでありその過程では温度 T は一定であるとする、次式が成り立つことを示せ:

$$W_{V_1 \rightarrow V_2} = nRT \ln \frac{V_1}{V_2} \quad (4.38)$$

^{*6} この外力が具体的に何によるものかはケースバイケースであり、ある場合は誰かが手で押さえ込んでいるのかもしれないし、ある場合はシリンダー外部に充満する気体の圧力によるものかもしれない。この問題ではその詳細は気にしない。

- (10) 1 モルの理想気体を摂氏 0 度 (一定) で体積を半分まで圧縮するとき外力がなす仕事を求めよ。

式 (4.34) は、化学や熱力学で非常によく出てくる式だ。ここでは外力がなす仕事を考えたが、気体 (の圧力) がなす仕事を考えると、それは外力がなす仕事の符号を逆にしたものである (なぜなら気体がピストンにおよぼす力は外力がピストンにおよぼす力の逆だから)。それを dW' とすると、 $dW' = -dW$ なので

$$dW' = P dV \quad (4.39)$$

となる。この式もよく使われるので、式 (4.34) との違いをよく理解しておこう^{*7}。

4.4 ポテンシャルエネルギー (位置エネルギー)

さて、式 (4.20) をみると、仕事 $W_{a \rightarrow b}$ は始点 $x = a$ と終点 $x = b$ の関数だ。特に始点 a をどこかに固定してそれを基準点とよび、 a のかわりに O と書こう (O はゼロではなく origin の O)。そして b を改めて x と書けば、仕事 $W_{O \rightarrow x}$ は x の関数だ。その意味は「基準点から位置 x まで物体を運ぶときの仕事」である。この $W_{O \rightarrow x}$ の符号を変えたものを ポテンシャルエネルギー という (単に「ポテンシャル」と言うこともある)。すなわち

ポテンシャルエネルギーの定義 (1)

$$U(x) := -W_{O \rightarrow x} \quad (4.40)$$

で定義される関数 $U(x)$ をポテンシャルエネルギーという。ここで $W_{O \rightarrow x}$ は、物体を基準点から位置 x まで運ぶときに物体にかかっている力がなす仕事である。

例 4.7 上の例 4.5 で地面 $h = 0$ を基準点とし、 h_1 を改めて h とおけば、 $W_{O \rightarrow h} = W_{0 \rightarrow h} = -mgh$ である。このときポテンシャルエネルギーは、式 (4.40) から

$$U(h) = mgh \quad (4.41)$$

である。(例おわり)

つまり物体を高く持ち上げるほど重力によるポテンシャルエネルギーは大きくなる。で、持ち上げられた物

^{*7} 化学や熱力学では教科書によって外力のなす仕事を dW とするものと、気体がなす仕事 (すなわちここで dW' とあらわしたものを) dW とするものがあるので、気をつけよう。

体は、てこや滑車を使えば、別の物体を持ち上げる「仕事」をすることができる。つまりポテンシャルエネルギーとは、力を受けている物体が、ある位置にあることによって持つエネルギー、つまり位置に付随するエネルギーである。

ポテンシャルエネルギーは中学校や高校で学んだ位置エネルギーと同じ概念である。ただし大学では位置エネルギーという言葉は使わない。

よくある質問 99 同じなら「位置エネルギー」でよいのでは？なぜわざわざポテンシャルエネルギーというのですか？…物理学の正式な用語は「ポテンシャルエネルギー」です。でも中高生には「ポテンシャルって何よ？」となるでしょうから、わかりやすく言い換えているのです。

よくある質問 100 「位置エネルギー」の方がわかりやすいから、そっちを正式な用語にすべきでは？…そう言われても私にはどうしようもありませんし、私はもう慣れたので違和感はありません。慣習ってそんなものです。

● 問 61 ポテンシャルエネルギーとは何か？位置エネルギーとどう違うか？

● 問 62 地面を基準点とし、地面から高さ h にある質量 m の物体のポテンシャルエネルギー（重力による） $U(h)$ が mgh に（近似的に）等しいことを（ g は重力加速度）ポテンシャルエネルギーの定義から出発して導出せよ。

● 問 63 バネ定数 k のバネについた物体を考える。バネの自然状態を原点かつ基準点として、物体が位置 x にあるときバネの弾性力によるポテンシャルエネルギー $U(x)$ は次式のようになることを示せ。また、関数 $U(x)$ をグラフに描け。

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (4.42)$$

ところで式 (4.40) の右辺の $W_{O \rightarrow x}$ は物体にかかっている力がなす仕事だ。例 4.7 では重力がなす仕事がそれに相当する。ところが現実的には重力がかかっている物体がひとりでの重力に逆らって上に移動したりはしない。誰かが重力に逆らう力をかけてその物体を持ち上げねば物体は上に移動しない。そのような「誰かの力」がなす仕事 $W'_{O \rightarrow x}$ を考えると*8、それは重力のなす仕事

とは同じ大きさでありながら符号が逆である（力の向きが逆だから）。すなわち $W'_{O \rightarrow x} = -W_{O \rightarrow x}$ だ。それを使うとポテンシャルエネルギーは以下のように定義することもできる：

ポテンシャルエネルギーの定義 (2)

$$U(x) = W'_{O \rightarrow x} \quad (4.43)$$

で定義される関数 $U(x)$ を、ポテンシャルエネルギーという。ここで $W'_{O \rightarrow x}$ は、物体を基準点 O から位置 x まで運ぶときに、かかっている力の逆らって誰かがなす仕事である。

例 4.7 では、物体を地面から高さ h まで君が持ち上げるとすれば、君は物体に上向きに mg という大きさの力をかけ、上向きに h だけ移動させねばならないので、そのとき君が（重力に逆らう力で）なす仕事は $W'_{O \rightarrow h} = mgh$ だ。したがってポテンシャルエネルギーは、式 (4.43) から、 $U(h) = mgh$ となり、それは式 (4.41) に一致する（つじつまが合っている）。

式 (4.40) と式 (4.43) は互いに等価であり、どちらの定義を採用してもかまわない。これらの2つの定義は教育的な意味で「わかりやすさ」に一長一短があるのだ。前者は右辺にマイナスが出てくるのがちょっと不自然でわかりにくい。後者はそこに実在している力とは別の力を誰かが発揮すると想定するという点でわかりにくい。そこでこれらの欠点を解消した第3の定義がある。すなわち

ポテンシャルエネルギーの定義 (3)

$$U(x) = W_{x \rightarrow O} \quad (4.44)$$

で定義される関数 $U(x)$ を、ポテンシャルエネルギーという。ここで $W_{x \rightarrow O}$ は、物体を位置 x から基準点 O まで運ぶときに、物体にかかっている力がなす仕事である。

例 4.7 で、物体が高さ h から地面（基準点；高さ 0）まで落下することを考えれば、下向きに mg という大きさの重力がかかって、下向きに h だけ移動するので、そのとき重力がなす仕事は $W_{h \rightarrow 0} = mgh$ である。したがってポテンシャルエネルギーは、式 (4.44) から、 $U(h) = mgh$ となり、それは式 (4.41) に一致する（つじつまが合っている）。

*8 ここで $W'_{O \rightarrow x}$ のダッシュは「微分」という意味ではない。単

に $W_{O \rightarrow x}$ と区別するための印である。

もちろん式 (4.40), 式 (4.43), 式 (4.44) は互いに等価であり, どれを定義として採用してもかまわない(ちょっと考えれば $W_{x \rightarrow O} = W'_{O \rightarrow x} = -W_{O \rightarrow x}$ であることがわかるだろう)。教科書や学者によってどの定義を採用するかは様々だ。しかし物理学の実体としてはどれも同じことだ。

● 問 64 質量 m の物体が質量 M の物体から距離 R だけ離れているときの, 万有引力によるポテンシャルエネルギー $U(R)$ を考える。無限遠 ($R = \infty$) を基準点とすると, $U(R)$ は次式のようになることを示せ。また, 関数 $U(R)$ をグラフに描け。

$$U(R) = -\frac{GMm}{R} \quad (4.45)$$

よくある質問 101 無限遠が基準点ってどういうことですか? ... 文字通りの意味です。式 (4.40) では物体を無限遠から運んでくるという意味になりますし式 (4.44) では物体を無限遠まで物体を運ぶということになります。と言っても違和感ありますよね。普通基準点といえば $x = 0$ とか $f = 0$ みたいに座標がゼロのところを選びますからね。しかし重力は距離が 0 に近づくほどどんどん強くなるので, 座標がゼロのところに物体を持って行くと仕事は無限大になってしまいます(式 (4.26) の R_1 を 0 に近づけてみてください)。その結果, ポテンシャルエネルギーも無限大になってしまいます。それは具合が悪いので, あえて座標がゼロのところではなく, 逆に無限に遠いところを基準点にするのです。

よくある質問 102 具合が悪いって... そんな主観的な理由で勝手に基準点を選ぶのってテキトーすぎじゃないですか? ... それでうまくいくから OK なのです。ポテンシャルエネルギーはその値自体ではなく, その差や変化を使います(いずれ学ぶ「力学的エネルギー保存則」で経験します)。その際, どこが基準点かは, どうでもよくなります。

実は式 (4.45) は式 (4.41) を一般化した式である。前者から後者を導出できるのだ。やってみよう。今, 地球の質量を M , 地球の半径を r , 地表からの高さを h とすると, 地表から高さ h にある質量 m の物体のポテンシャルエネルギー(無限遠を基準点とする)は, 式 (4.45) より

$$U(r+h) = -\frac{GMm}{r+h} \quad (4.46)$$

となる(この U と式 (4.41) の関数 U は別物であることを注意)。関数 $f(x) = -GMm/(r+x)$ の線型近似は

(よくわからないという人は問 58 の解答を参照),

$$-\frac{GMm}{r+x} \doteq -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r^2}x \quad (4.47)$$

となる($x \doteq 0$ とする)。ここで高さは地球の半径に比べて十分に小さいとしよう。つまり $h \ll r$ とする。すると $h \doteq 0$ と仮定できて, 式 (4.47) で $x = h$ とすれば

$$\begin{aligned} U(r+h) &= -\frac{GMm}{r+h} \\ &\doteq -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r^2}h \end{aligned} \quad (4.48)$$

となる。ここで地表での重力を考えれば

$$\frac{GMm}{r^2} = mg \quad (4.49)$$

である。これを使って式 (4.48) を書き換えると

$$U(r+h) \doteq -\frac{GMm}{r} + mgh \quad (4.50)$$

となる。つまり

$$U(r+h) + \frac{GMm}{r} \doteq mgh \quad (4.51)$$

となる。なんと!! この右辺 (mgh) は式 (4.41) の右辺に一致しているではないか! なぜだろう?

式 (4.51) 左辺の第一項 $U(r+h)$ は「物体を高さ h から無限遠まで移動する仕事」である(ポテンシャルエネルギーの定義 (3) より)。また, 式 (4.51) 左辺の第二項 GMm/r を式 (4.45) と比べると, これは物体が地表にあるときのポテンシャルエネルギー(無限遠を基準点とする)の符号を変えたものである。つまり「物体が地表から無限遠まで移動するときの仕事」の符号を変えたもの, つまり「物体が無限遠から地表へ移動するときの仕事」である。

したがって式 (4.51) の左辺は「物体を高さ h から無限遠まで移動し, そこから地表まで移動するときの仕事」, 要するに「物体を高さ h から地表へ移動するときの仕事」, つまり「地表を基準とする, 物体のポテンシャルエネルギー」である。それは式 (4.41) の左辺と同じことを意味している。つじつまがあっているではないか!!

● 問 65 以下の値をそれぞれ求めよ。必要な数値は各自で調べよ。

- (1) 地上 10 m の高さにある, 質量 2 kg の物体に関する, 重力のポテンシャルエネルギー。(地表を基準点とする)
- (2) 長さ 10 m, 直径 2 mm の鉄線を 1 mm 伸ばしたと

き、鉄線の弾性力のポテンシャルエネルギー。(伸ばす前の端を基準点とする)

- (3) 月にに関する地球の重力のポテンシャルエネルギー。(無限遠を基準点とする)

● 問 66 傾斜角 θ の滑らかな斜面に沿って、質量 m の物体を斜距離 L だけ運びあげた。かかった仕事は？ また、ポテンシャルエネルギーの変化は？

4.5 保存力

ここでひとつ注意。ポテンシャルエネルギーという考え方は、物体にかかる力が保存力 (conservative force) という、ある種の力についてのみ定義される。保存力とは、物体を移動させるときその力がなす仕事が移動の経路によらず、出発点と到達点だけで決まるというような力である。

そもそもポテンシャルエネルギー $U(x)$ は、物体をある特定の位置 (基準点) から位置 x まで運ぶときに力がなす仕事 $W_{O \rightarrow x}$ を用いて定義された。

もしもこの $W_{O \rightarrow x}$ が移動の経路によってまちまちな値をとりうるならば (それは保存力ではないということ)、 $W_{O \rightarrow x}$ の値が x で一意的に定まらない。つまり $U(x)$ の値が一意的に定まらないので、ポテンシャルエネルギーが定義できないのだ。

我々の知る力の多くは保存力である。ひとつの例外は摩擦力だ。摩擦力は保存力ではない。

● 問 67 保存力とは何か？

● 問 68 上の問について以下のような回答があった。それぞれについて、正しいか正しくないか、正しくないならどこがどのように間違っているかを述べよ。

- (1) 「物体を移動させるとき、どの経路をたどっても仕事が変わらないもの」
- (2) 「物体を移動させるとき、その力がなす仕事が、移動の経路によらず、出発点と到達点だけで決まること」
- (3) 「物体を移動させるとき、その力がなす仕事が、移動の経路によらず一定であるような力」
- (4) 「物体を移動させるとき、移動の経路によらず一定であるような力」

● 問 69 摩擦力が保存力でないことを証明しよう。

- (1) 物体を位置 x_0 から位置 x_1 に運ぶときの仕事を W_{01} とし、その逆戻り、つまり物体を位置 x_1 から位置 x_0 に運ぶときの仕事を W_{10} とする。もし力が保存力なら $0 = W_{01} + W_{10}$ となることを示せ (ヒント: 物体を x_0 から x_0 まで運ぶ経路には「何も動かない」とか「 x_0 から x_1 までを往復する」などがある。)

- (2) 摩擦力では上の式が成り立たないことを示せ。

● 問 70 傾斜角 θ の斜面に沿って質量 m の物体を斜距離 L だけ運び上げた。物体と斜面の間の動摩擦係数を μ' とする。かかった仕事は？ また、重力のポテンシャルエネルギーの変化は？

4.6 仕事率

単位時間あたりになされる仕事のことを仕事率という。すなわち、時間 Δt の間に仕事 ΔW が行われた場合、仕事率 P は

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (4.52)$$

と定義される。ここで仕事率が時々刻々と変わるような場合についても対応できるように、 Δt として十分に短い時間をとると

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (4.53)$$

となる。つまり仕事率は時刻 t までになした仕事 $W(t)$ を時刻 t で微分したものであると言ってもよい。

例 4.8 質量 m の物体を Δt の時間をかけて高さ Δh まで持ち上げる場合を考えよう。仕事 ΔW は $mg\Delta h$ となる。仕事率 P は

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{mg\Delta h}{\Delta t} \quad (4.54)$$

となる。 Δt を 0 に近づけると

$$P = mg \frac{dh}{dt} \quad (4.55)$$

となる。 dh/dt は物体を持ち上げる速度だ。これを v とおくと

$$P = mgv \quad (4.56)$$

となる。(例おわり)

仕事率の単位は、SI 単位系で表すと $\text{kg m}^2 \text{s}^{-3}$, もし

くは同じことだが J s^{-1} だ。この単位をワットといい、 W とあらわす。

よくある質問 103 W という記号に混乱してしまふ。先程 W は仕事を表していましたが今は W は仕事率ですか？ 仕事と仕事率って同じなのですか？ ... 違います。よく見て下さい。先程まで「仕事」を表していた記号は W ではなく W です。斜めな文字でしょ？ そして今、仕事率の話で使っている W は斜めではないでしょ？ W と W は全く意味が違います。前者は仕事（英語で work）を表す記号（というか変数）です。後者は仕事率の単位「ワット」を表す記号で、スコットランドの科学者 James Watt の姓の頭文字です。同じアルファベットになったのは偶然です。

よくある質問 104 紛らわしくないですか？ ... 確かにちょっと紛らわしいですが、科学では変数を斜字体で表し、単位を立てて表すということが国際的な取り決め（国際単位系）で決まっています。そのようなことに注意を払えばよいのです。

● 問 71 質量 2.0 kg の物体を、地表付近で 3.0 m/s の速さで持ち上げる時の仕事率を求めよ。

式 (4.52) を見ると仕事率は「仕事を時間でわったもの」だとわかる。この関係を逆転すると、仕事率に時間をかけたら仕事になることがわかる^{*9}。なので仕事の単位（ということはエネルギーの単位でもある）として「仕事率かける時間」という単位を使うこともできる。その代表例が Wh （ワット時）という単位だ（ W は仕事の単位で h は時間の単位である）。 1 W の仕事率を 1 時間続けたときの仕事（やそれに相当するエネルギー）が 1 Wh だ。

● 問 72 1 Wh のエネルギーを J を単位として書きなおせ。

4.7 電位・電位差・電圧

小中学校理科でよく「電圧」とか「ボルト」というのが出てきた。しかし実は電圧の定義は小学生や中学生が理解できるようなものではないのだ。あのときは電圧は「水路の高さ」とか「その差」とかいう喩え話で教えられたが、ここで本当の定義を君に教えよう。その前に以下の問題をやって欲しい：

● 問 73 電荷 Q を持つ物体 1 が原点にあり、電荷 q を持つ物体 2 が位置 x にあるときの、クーロン力によるポテンシャルエネルギー $U(x)$ は次式になることを示せ：

$$U(x) = \frac{kQq}{x} \quad (4.57)$$

ただし無限遠を基準点とする。 k は式 (2.14) に現れる定数である。

前問のように、電氣的な力（クーロン力）によるポテンシャルエネルギーは電荷に比例する。そこで、電氣的なポテンシャルエネルギーについてはそれをその場所の電荷で割った値で表現することが多い。それを電位とよぶ。つまり電位とは「その場所の単位電荷あたりのポテンシャルエネルギー」と定義するのだ。

電位の単位は SI 単位系では J C^{-1} である。これを V と書き「ボルト」とよぶ。

空間の 2 点の間の電位の差を電位差という。電位差の SI 単位は電位と同じく V である。

● 問 74 問 73 の続き。

- (1) 物体 1 が位置 x に作る電位を式であらわせ。
- (2) 100 年ほど前の理論（ボーア模型という；後述）では、水素原子は陽子から $0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$ の付近に電子があると考えられていた。その付近の電位は何 V か？

空間の 2 つの点の間を仮想的に荷電粒子を移動させるとき、かかる仕事を電荷で割ったもの（単位電荷あたりの仕事）を、その 2 点間の電圧とか起電力という（定義）。電圧や起電力の SI 単位も V である。

多くの場合、電位差と電圧（起電力）は同じだ。ただし電位差と電圧が異なることもある。それは、電氣的な力がクーロン力だけでなく、磁場の時間的变化によってももたらされる場合である。その場合は電氣的な力は保存力ではなくなる（経路によって仕事が変わる）。その詳細については諸君の現在の数学力ではちょっと手に余るかもしれないので本書では述べない。とりあえずそういう場合は電位差よりも電圧や起電力という言葉が用いられる、ということを頭の片隅に置いておこう。

● 問 75

- (1) 電位とは何か？
- (2) 電圧とは何か？
- (3) 電位の単位を SI 単位系で述べよ。

^{*9} 正確には仕事率を時刻で積分したものが仕事になる。

- (4) 2.0 V の電位に 0.30 C の電荷があるときのポテンシャルエネルギーを求めよ。
- (5) 1.0 V の電位に電子が 1 個あるときのポテンシャルエネルギーを求めよ。

問 75(5) で考えた, 1 V の電位にある電子 1 個のポテンシャルエネルギーの絶対値である $1.602176634 \times 10^{-19}$ J は 1 eV とよばれる。eV は エレクトロン・ボルト という新たな単位であり, 電子や原子や分子の様々な形のエネルギーを表現するのによく使う。特に化学でよく使う。

4.8 電流・電力・電力量

P.19 で電荷とは何かを学んだ。ここでは「電流」を学ぼう。導線の中などで, ある場所を多くの荷電粒子が次々と通り過ぎるとき, 通り過ぎた荷電粒子の電荷の総量を, それにかかった時間でわったものを電流という(定義)。すなわち単位時間あたりに通り過ぎる電荷が電流である。

定義から, 電流は, C/s (クーロン毎秒) という単位で表現できることがわかる。C/s という単位を A (アンペア) という^{*10}。

電氣的な力によって行われる仕事の仕事率 (単位時間あたりの仕事) を電力という(定義)。特に電圧 V の 2 点間を電流 I が流れているときの仕事率は VI となる。なぜか? 電荷 q が電圧 V の 2 点間を移動するときの仕事は qV である (それが電圧の定義!)。それを時間 Δt で行ったなら, 仕事率は $qV/\Delta t$ だ。ところが $q/\Delta t$ は移動した電荷を時間で割ったものだから, それは電流 I である。したがって仕事率は VI 。

V の単位は V, つまり J/C であり, I の単位は A だから, VI の単位は J A/C である (ここで出てきた斜字体の V と立体の V は互いに意味が違うことに君は気づいているだろうか? SI 単位系の規定では斜字体は変数, 立体は単位を表す約束だった!)。ここで $C=A \cdot s$ であることを思い出すと, J A/C は結局, J/s, つまり W (ワット) になる。うまくつじつまが当たっているではないか!

電氣的な力によって行われる仕事を電力量という。電力量を時間で微分したもの (単位時間あたりの電力量; つまり電氣的な力によって行われる仕事率) が電力であ

る。電力を時間で積分すると電力量になる。電力量は仕事なのでその SI 単位は J (ジュール) である。しかし一般社会では先述の Wh (ワットアワー) という単位がよく使われる。

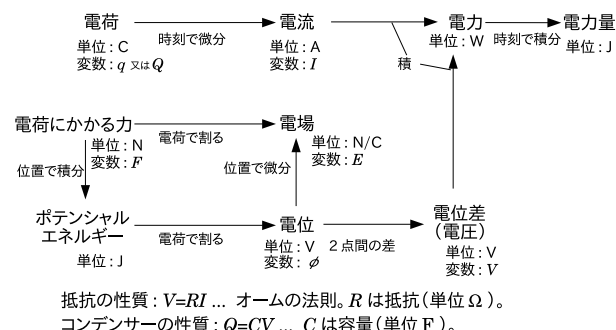


図 4.7 電気に関する概念の関係図。斜字体と立体の区別に注意せよ。斜字体は変数を、立体は単位を表す。変数には、よく使われる記号を示すが、人によって例外もあることに注意せよ。単位の読み方は、A: アンペア, C: クーロン, F: ファラド, J: ジュール, N: ニュートン, V: ボルト, W: ワット, Ω : オーム

● 問 76 電流・電力・電力量をそれぞれ簡潔に説明せよ。またそれぞれの SI 単位を述べよ。

● 問 77 電池の容量 (電荷) を表すのに A h という単位がよく使われる。ある自動車のバッテリー (8000 円くらい) は 36 A h の容量だった。

- (1) このバッテリーが流すことのできる電荷の総量を求めよ。
- (2) このバッテリーができる仕事の総量を求めよ。ただしこのバッテリーも含めて自動車のバッテリーはほとんどが電圧 12 V である。
- (3) ある車はこのバッテリーを積んでいる。この車のヘッドランプは LED (発光ダイオード) であり, 片方が 23 W の消費電力である。左右両方のヘッドランプをつけっぱなしにしたらどのくらいの時間でバッテリーは空っぽになるか?

演習問題 3 昔は水田に水を入れるのに足踏み水車というものを使った。足踏み水車を使って灌漑水路から水田 (面積 1 a) に水を入れようと思う。灌漑水路の水面と水田の間には畦があり, 畦は水路水面よりも 50 cm 高い。この水田に水深が 0 cm から 5 cm になるまで水を 5 時

^{*10} A は SI 基本単位のひとつなので, 本来は $C=A \cdot s$ が C の定義なのだが, 君は $A=C/s$ が A の定義だと思っておくほうがわかりやすいだろう。

間で汲み上げる場合の仕事率を求めよ。

演習問題 4 頂角 60 度の円錐があり、その中腹に質量 100 g の糸の輪が水平にかぶさっている。糸にかかる張力の大きさを求めよ。ただし円錐表面と糸の間には摩擦は無い（つるつるしている）とする。重力加速度は $g=9.8 \text{ m s}^{-2}$ とする。

演習問題 5 1 辺の長さが L のピラミッド（正八面体の上半分）を地表付近に建設するのに必要最小限のエネルギー E を求めよう。ピラミッドを構成する石の密度を ρ とする。ピラミッドは隙間なくびっちり石が詰まってできているものとする。ピラミッドの自重などで石は変形したりしないとする。求める精度は有効数字 2 桁程度とする。(1) ピラミッドの高さ H を L を用いて表わせ。(2) 高さ h から $h + dh$ にある部分の体積 dV を、 H, h, dh を用いて表わせ（ $h < H$ とし、 dh は微小量とする）。(3) その部分の質量 dM を求めよ。(4) その部分を地表面から持ち上げるのに必要な仕事 dE を求めよ。(5) 前小問の結果を $h = 0$ から $h = H$ まで積分して、 E を L, g, ρ を用いて表わせ。

4.9 解答

答 51 (1) 力と、その力が働く点が力と同じ向きに動いた距離との積。(2) $\text{J} = \text{N m} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$ 。(3) 力がつりあっている系では仮想的な微小変位に伴って外力のなす仕事の総和は 0 である。

答 52

(1) 略（ヒント：直角三角形の高さを三角関数で表す）。(2) 物体 1 について重力は鉛直下向きで $m_1 g$ である。その重力が働く点である物体 1 の、重力方向（鉛直下向き）への変位^{*11}は h_1 であり、それは前問より $l_1 \sin \theta$ である。したがって重力が物体 1 にした仕事は $m_1 g h_1 = m_1 g l_1 \sin \theta$ 。

物体 2 については重力は鉛直下向きで $m_2 g$ である。物体 2 の重力の方向（鉛直下向き）への変位は $-h_2$ である（マイナスがつくのは重力とは逆向きだから）。それは前問より $-l_2 \sin \theta$ である。したがって重力が物体 2 にした仕事は $-m_2 g h_2 = -m_2 g l_2 \sin \theta$ 。

(3) 仮想仕事の原理より、前問の 2 つの仕事の和は 0 だから $m_1 g l_1 \sin \theta - m_2 g l_2 \sin \theta = 0$ 。したがって $m_1 l_1 = m_2 l_2$ 。

^{*11} 位置の変化量のことを変位（displacement）という。

答 53

(1) ハンドルをまわす距離は $2\pi r$ 。ハンドルを回す力はハンドルの移動（回転）の方向と常に一致しており、その大きさは F 。したがってハンドルを 1 回転させるときに回す手がなす仕事は $2\pi r F$ 。

(2) ハンドルが 1 回転するとき上載物は Δy だけ持ち上がる。このとき上載物にかかる重力は下向き（上載物の移動とは逆方向）に mg の大きさでかかるから、重力のなす仕事は $-mg\Delta y$ となる。

(3) ハンドルが 1 回転することを微小な変位とみなせば、仮想仕事の原理より、ハンドルを回す手がなす仕事と重力がなす仕事の和は 0 である。したがって与式が成り立つ。

(4) 前小問の式を $F =$ のように変形すればよい。

(5) 前小問の式に各数値を代入して 23 N。これは約 2 kg の物体にかかる重力、つまり 2 リットル入りのペットボトルを直接持ち上げる程度の力である。ジャッキを使えばそれで 1000 kg の上載物を持ち上げることができるのだ。

答 54 仕事は形を変えた量、もしくは仕事に形を変えることができる量。

答 55

(1) 略。

(2) $k = 6.0 \text{ N/m}$, $x_0 = 0 \text{ m}$, $x_1 = 3.0 \text{ m}$ として上の式に代入すると、 -27 J 。

(3) $k = 6.0 \text{ N/m}$, $x_0 = 0 \text{ m}$, $x_1 = -3.0 \text{ m}$ として上の式に代入すると、 -27 J 。

(2) と (3) はともに負の値になることに注意せよ。バネは引き延ばす時も押しこむ時も「移動の方向」と「バネが発揮する力の方向」は逆向きだからである。

答 56 (2), (3) は有効数字 2 桁で考える。

(1) (略)

(2) $m = 0.14 \text{ kg}$, $h_0 = 50 \text{ m}$, $h_1 = 0 \text{ m}$ として $W = mg(h_0 - h_1) = 0.14 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times (50 \text{ m} - 0 \text{ m}) = 69 \text{ kg m}^2 \text{s}^{-2} = 69 \text{ J}$ 。

(3) $m = 60 \text{ kg}$, $h_0 = 0 \text{ m}$, $h_1 = 3800 \text{ m}$ として $W = mg(h_0 - h_1) = 60 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times (0 \text{ m} - 3800 \text{ m}) = -2.2 \times 10^6 \text{ J}$ 。

(3) が負の量になることに注意。重力の向きと移動の向きが逆だからである。なお富士山登山は実際は鉛直上下方向ではなく斜めに移動するが、そのうち水平方向の移動は重力に対して

直交する向きなので、重力のなす仕事には関係しない。このことは後の章で学ぶ。

答 58 (略解) (1) $f(x) = 1/(1+x)$ として, $f(0) = 1$, $f'(x) = -(1+x)^{-2}$, したがって $f'(0) = -1$ 。線型近似の式(ライブ講義数学入門参照): $f(x) \doteq f(0) + f'(0)x$ に入れると $f(x) \doteq 1 - x$ 。(2) $y = (1/a)\{1/(1+x/a)\}$ と変形し, x/a を前小問の x に相当するものとみなすと $y \doteq (1/a)(1 - x/a) = (1/a) - (x/a^2)$ 。(3) 前小問で $a = r$, $x = h_0$ または $x = h_1$ のときを考えて

$$\frac{GMm}{r+h_0} \doteq \frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r^2}h_0 \quad (4.58)$$

$$\frac{GMm}{r+h_1} \doteq \frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r^2}h_1 \quad (4.59)$$

これらを式 (4.28) に代入すると

$$\begin{aligned} W_{h_0 \rightarrow h_1} &= \frac{GMm}{r+h_1} - \frac{GMm}{r+h_0} \\ &\doteq -\frac{GMm}{r^2}h_1 + \frac{GMm}{r^2}h_0 = \frac{GMm}{r^2}(h_0 - h_1) \end{aligned}$$

これは (m を分数の右に移せば) 式 (4.29) に一致する。

(4) ここで式 (2.7) より $GM/r^2 = g$ なので, 式 (4.29) は $W_{h_0 \rightarrow h_1} \doteq mg(h_0 - h_1)$ となる。これは等号と近似等号の違いを除けば式 (4.24) と一致する。つまり式 (4.24) は式 (4.26) の近似式である。

答 59 (略解)

- (1) $E_1 = mgh$, $E_2 = GMm\{1/R - 1/(R+h)\}$
 (2) $h = 100 \text{ m}$ のとき, $E_1 = 9.82 \times 10^3 \text{ J}$, $E_2 = 9.82 \times 10^3 \text{ J}$ (有効数字 3 桁では同じ), $h = 10 \text{ km}$ のとき, $E_1 = 9.82 \times 10^5 \text{ J}$, $E_2 = 9.81 \times 10^5 \text{ J}$.
 $h = 1000 \text{ km}$ のとき, $E_1 = 9.82 \times 10^7 \text{ J}$, $E_2 = 8.49 \times 10^7 \text{ J}$.
 (3) (略)

答 60

- (1) シリンダーの内部は底面積 A , 高さ h の筒形の空間である。したがってその体積は $V = Ah$ 。
 (2) 気体は圧力 P でピストンを押し上げようとする。一般に、一定の圧力がかかる面には圧力かける面積という大きさの力がかかる。したがって、この場合は気体はピストンを PA という力で押し上げようとする。いま、座標軸を鉛直上向きにとっているの、上向きが正。したがって $F_1 = PA$ 。
 (3) ピストンは静止しているの、ピストンにかかる力

はつりあっていなければならない。したがって F_1 を打ち消す力が外から働いているはずである。したがって外力は $F_2 = -F_1 = -PA$ 。

- (4) ピストンの移動がゆっくり (つまりほとんど静止しているということ) なので力のつりあいは維持されると考えてよい。外力がなす仕事 dW は力 F_2 と変位 dh の積である。したがって

$$dW = F_2 dh = -PA dh \quad (4.60)$$

- (5) 変化前の気体の体積は $V = Ah$, 変化後の気体の体積は $V + dV = A(h + dh)$ である。これらの式より $dV = A dh$ を得る。
 (6) 略。
 (7) 略。(式 (4.34) の両辺に $\int$ をつけて積分すればよい。)
 (8) 状態方程式より $P = nRT/V$ 。これを前小問の結果に代入すれば与式を得る。
 (9) 温度一定なので前小問の式より

$$\begin{aligned} W_{V_1 \rightarrow V_2} &= -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -nRT [\ln |V|]_{V_1}^{V_2} \\ &= -nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT \ln \frac{V_1}{V_2} \end{aligned} \quad (4.61)$$

注: 体積 V_1, V_2 はいずれも正なので対数の中の絶対値記号は結局は不要になる。

- (10) $n = 1 \text{ mol}$, $R = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $T = 273 \text{ K}$, $V_1/V_2 = 2$, $\ln 2 = \log_e 2 \doteq 0.693$ を前小問に代入し, $W_{V_1 \rightarrow V_2} = 1570 \text{ J}$ 。(有効数字 3 桁)

答 61 ある基準点から任意の位置 x まで物体を運ぶときの仕事を $W(x)$ とするとき, $U(x) = -W(x)$ で定義される関数 $U(x)$ をポテンシャルエネルギーという。位置エネルギーと同じ。

答 63 式 (4.21) で $x_0 = 0$, $x_1 = x$ とおきなおせば

$$U(x) = -W_{0 \rightarrow x} = \frac{1}{2}kx^2 \quad (4.62)$$

グラフは図 4.8 のようになる。

答 64 式 (4.26) で $R_0 = \infty$, $R_1 = R$ とおきなおせば

$$U(R) = -W_{\infty \rightarrow R} = -\frac{GMm}{R} \quad (4.63)$$

グラフは図 4.9 のようになる。

答 65

- (1) 式 (4.41) において $m = 2 \text{ kg}$, $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$, $h = 10 \text{ m}$ とすれば $U = 196 \text{ J} \doteq 200 \text{ J}$

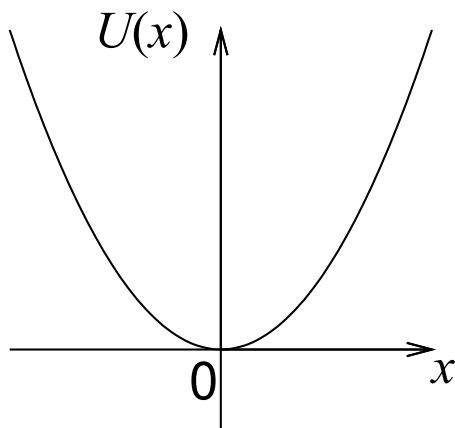


図 4.8 バネのポテンシャルエネルギー

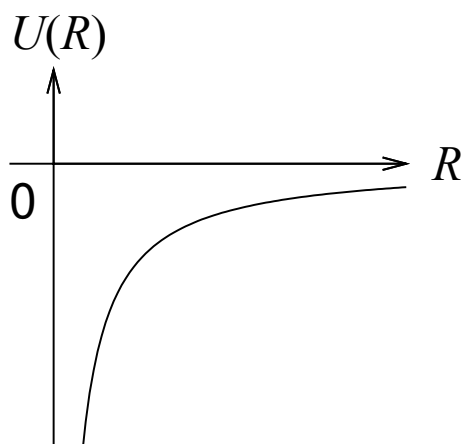


図 4.9 万有引力のポテンシャルエネルギー

- (2) 問 45(3) よりバネ定数 k は $k = 6.2 \times 10^4 \text{ kg s}^{-2}$ 。
 また、 $x = 0.001 \text{ m}$ としてこれらを式 (4.42) に代入すれば $U = 0.031 \text{ J}$ 。
- (3) 地球の質量を M 、月の質量を m 、地球と月の距離を x とすれば

$$G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$M = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$m = 7.3 \times 10^{22} \text{ kg}$$

$$x = 4.0 \times 10^8 \text{ m}$$

これらを式 (4.45) に代入して $U = -7.3 \times 10^{28} \text{ J}$ 。

答 66 物体にかかる重力を斜面に垂直な方向と斜面に平行な方向に分解して考える。前者は斜面から受ける垂直抗力と釣り合って打ち消しあう。後者は

$$mg \sin \theta \quad (4.64)$$

となる (θ は傾斜角)。誰かがこれと等しい大きさの力を斜面に平行で上向きにかけると物体が斜距離 L だけ移動する。そのとき「誰か」が行った仕事は

$$mgL \sin \theta \quad (4.65)$$

となる。これはポテンシャルエネルギーの変化にも等しい。

答 67 保存力とは、物体をある位置から別の位置に運ぶときにその力がなす仕事が、移動の経路によらずに一定である、というような力である。

答 69 (1) 物体を位置 x_0 から位置 x_1 に運んで位置 x_0 に戻すという移動も、物体を位置 x_0 に置いたまま動かさないというのも、ともに「物体を位置 x_0 から位置 x_0 に移動する」経路である。前者の仕事は $W_{01} + W_{10}$ であり、後者の仕事は 0 である (移動距離が無いから)。したがってもし力が保存力なら $W_{01} + W_{10} = 0$ である。

(2) 動摩擦力の大きさを F_m とし、 x_0 と x_1 の間の距離を X とすると、 $W_{01} = -F_m X$ である。ここでマイナスがつくのは、力の向きが移動方向と逆だからである。同様に $W_{10} = -F_m X$ である。したがって $W_{01} + W_{10} = -2F_m X$ となり、前小問の式は成り立たない。したがって摩擦力は保存力でない (背理法)。

答 70 問 66 とほぼ同様だが、この場合、物体には斜面平行・下向きに $\mu' mg \cos \theta$ という大きさの摩擦力もかかる。そのぶん「誰か」はがんばらねばならない。結果的に「誰か」が斜面に平行で上向きにかける力は

$$mg \sin \theta + \mu' mg \cos \theta \quad (4.66)$$

となる。物体は斜距離 L だけ移動するので「誰か」が行った仕事は

$$mgL \sin \theta + \mu' mgL \cos \theta \quad (4.67)$$

となる。ところが摩擦力は保存力ではないのでポテンシャルエネルギーの増減には関与しない。したがってポテンシャルエネルギーの増加は $mgL \sin \theta$ 。

答 71 式 (4.56) に $m = 2.0 \text{ kg}$ 、 $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ 、 $v = 3.0 \text{ m s}^{-1}$ を代入すると、有効数字 2 桁で $P = 59 \text{ W}$ 。

答 72 $1 \text{ W h} = 1 \text{ J s}^{-1} \times 3600 \text{ s} = 3600 \text{ J}$

答 73 原点に電荷 Q を固定し、 x 軸上に電荷 q を動かす。位置 x に電荷 q があるとき ($0 < x$ とする)、それに働く力 F は、式 (2.14) より $F = kQq/x^2$ である。無限遠 (基準点) から位置 x まで電荷 q を動かすときにこの

力がなす仕事は

$$\begin{aligned} W_{\infty \rightarrow x} &= \int_{\infty}^x F dx = \int_{\infty}^x \frac{kQq}{x^2} dx = \left[-\frac{kQq}{x} \right]_{\infty}^x \\ &= -\frac{kQq}{x} \end{aligned} \quad (4.68)$$

となる。式 (4.40) より $U(x) = -W_{\infty \rightarrow x} = kQq/x$ となる (証明終わり)。

注: 式 (4.68) で積分変数 x (つまり dx の x) と積分区間の上端の x (つまり $\int_{\infty}^x$ の x) が「かぶっている」が、これは別物と解釈する。すなわち積分変数 x は本当は X とか s とか、何か適当に x 以外の記号で置くのが形式的には正しいのだが、それは煩雑でむしろわかりにくくなるので、横着して x のままにしておくのだ。このような書き方は物理学でよく出てくる。

答 74 (1) 式 (4.57) を位置 x における電荷 q で割ればよい:

$$\frac{U(x)}{q} = \frac{kQ}{x} \quad (4.69)$$

(2) $x = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$ とする。陽子の電荷は電荷素量なので $Q = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。また、式 (2.14) より $k = 8.987 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$ 。これらを式 (4.69) に代入すると 27.2 V 。

答 75

- (1) 単位電荷あたりのポテンシャルエネルギー
- (2) 空間の 2 つの点の間を仮想的に荷電粒子を移動させるとき、かかる仕事を電荷で割ったもの。多くの場合、2 点間の電位の差 (電位差)。
- (3) J C^{-1} , 言い換えると V 。
- (4) 0.6 J
- (5) 電子の電荷は $-1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ なので、それが 1 V の電位にあると $-1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$ 。

答 77 (1) $36 \text{ A h} = 36 (\text{C/s}) \times 3600 \text{ s} = 130000 \text{ C}$ 。(2) $12 \text{ V} \times 36 \text{ A h} = 12 \times 36 \times 3600 \text{ V A s} = 1.6 \times 10^6 \text{ J}$ 。(3) 左右両方で 46 W 。 12 V の電圧では $46 \text{ W} / (12 \text{ V}) = 3.8 \text{ A}$ の電流が流れる。 $36 \text{ A h} / (3.8 \text{ A}) = 9.4 \text{ h}$ 。およそ 9 時間で空になる。これが LED でなく普通のハロゲンランプならもっと短い時間 (数時間) で空になってしまう。

よくある質問 105 本当なのかなーって疑いたくなる値が答えだったり、物理ってなんなんだー... 皆さんの既成概念を壊すためにそういうのを狙って問題を作ってます。

よくある質問 106 代入する値がほしいです。... そのうち文字 (変数) だけの答えにも慣れますよ。そっちのほうが、いろんな量どうしの関係がわかりやすいですよ。

よくある質問 107 なんとなくわかるけど、問題解くときにわけわからなくなります。... だから問題演習は大事。しっかり考えて、わからなければ解答を読んでまた考えて下さい。

よくある質問 108 高校の物理の先生が「物理ができるかどうかは絵が上手に描けるかどうかで決まる」と言っていました。がそうなんですか? ... 「決まる」かどうかはわかりませんが (笑), 絵が上手に描けるのは大きな武器です。絵や文章など、自分を表現するツールを豊かに持っている人は知的に成長しやすいと思います。

第5章

運動の三法則

これから我々は物体の運動に関する物理学を学ぶ。「物体の運動」とは物体の位置や向きや形状が時刻とともに変化する様子である。とはいうものの当面は「位置」だけに着目し、「向き」や「形状」については難しすぎるので後回しにする。そのために我々はまず物体を質点としてモデル化し、質点の運動を考える。

よくある質問 109 ということは物体が変形したり回転したりする様子はわからないということですか？ そんなのしょぼ過ぎませんか？ ... 大丈夫。質点の運動をきっちり理論化できたらそれを使って変形や回転なども理論化できます（そのうち学びます）。物事には順序というものがあるのです。

というわけで我々の当面の目標は質点の位置を時刻の関数として表すことだ。それにはベクトル、微分、積分という3つの数学を駆使する。まずその準備をしよう。

5.1 ベクトルとスカラー

中学校理科で学んだように速度や力は「向き」と「大きさ」を持つ。このように向きと大きさを持つ量のことを「ベクトル」とよぶ（定義）。それに対して大きさだけを持ち向きを持たない（ただしプラスとマイナスはあってもよい）ような量を「スカラー」とよぶ（定義）。たとえば力はベクトルだが「力の大きさ」はスカラーである。

ベクトルを記号で表すときは高校では $\vec{F}$ とか $\vec{v}$ のように「アルファベットに上付き矢印」を使っていたが、大学では $\mathbf{F}$ とか $\mathbf{v}$ のように「アルファベットの太字」を使う（慣習）。それに対してスカラーは上矢印もつけず太字でもない普通の細字のアルファベットで表す（慣習）。

ベクトルとスカラーをきっちり区別しないと数学的な取り扱いで大きなミスをする可能性がある。そこでこのように

慣習

ベクトルの記号は太字
スカラーの記号は細字

で書き分けるのである。

ベクトルは3次元空間の中の座標軸の方向、すなわち x 方向、 y 方向、 z 方向のそれぞれの大きさ（の組み合わせ）として表すこともできる。そういうのを「成分」という。たとえば $\mathbf{F}$ を力のベクトルとすると、これは

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) \quad (5.1)$$

のように3つの成分 F_x, F_y, F_z の組み合わせで表すことができる。

ベクトルの成分はスカラーである（向きがあらかじめ決められているので大きさしか意味を持たない）。したがって成分は細字で書かねばならない。つまり式 (5.1) の左辺の $\mathbf{F}$ は太字であり、右辺の F_x, F_y, F_z は細字である。式 (5.1) を

$$F = (F_x, F_y, F_z) \quad \text{と書いてはダメだし、}$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_z) \quad \text{と書いてもダメ}$$

である。

よくある間違い 5 手書きのとき普通の文字を筆圧高めでぐりぐり濃く書けば太字になると思っている... 印刷物ではそんな雰囲気に見えますが、手書きでそれは違います。手書きで太字を書くときはどこかを二重線にするのです。「ライブ講義 大学1年生のための数学入門」P153 参照。

- 問 78 以下のアルファベットの太字を手書きせよ：
 - (1) $\mathbf{F}$... 力を表す (force) のによく使う。
 - (2) $\mathbf{a}$... 加速度 (acceleration) を表すのによく使う。
 - (3) $\mathbf{v}$... 速度 (velocity) を表すのによく使う。
 - (4) $\mathbf{r}$... 位置ベクトルを表すのによく使う。

ヒント：筆圧高めでグリグリ書けばよいってことではないよ!! 上の「よくある間違い」参照。

よくある質問 110 力はベクトルなので太字で書くべきですよ。でも P.32 では $F = -kx$ のように細字で書いてましたが...? ... それはバネに関するフックの法則ですね。バネは普通、1 方向にしか伸び縮みしません。その方向に x 軸をとり、それに垂直な方向に y 軸、 z 軸をとれば、力 $\mathbf{F}$ は

$$\mathbf{F} = (F_x, 0, 0) \quad (5.2)$$

と書けますね (x 軸方向以外の成分はいつもゼロ)。ということは y 方向や z 方向のことを気にする必要が無いから、改めて F_x を F と書いて

$$\mathbf{F} = (F, 0, 0) \quad (5.3)$$

と書いても差し支えありません。そしてこの x 成分を取り出したのが $F = -kx$ の左辺の F なのです。すなわち常にひとつの方向 (ひとつの直線の上) に限定された現象を考える場合は、その方向での成分だけをいきなり取り出して細字で書くのが普通です。これは慣習的なことですが、学生がよく混乱するのではっきり書いておきましょう:

慣習

直線上に限定した議論ではベクトルであっても細字を使う。

5.2 位置を微分すると速度、速度を微分すると加速度

物理学ではまず質点の位置をベクトルとして表す。すなわちまず空間のどこかに原点とよぶ固定点を設定し、この原点から見た「向き」と「距離」の組み合わせ (つまりベクトル) で位置を表す。そう考えるといろいろ便利だからである。

そのようなベクトルを位置ベクトルという。位置ベクトルのことを単に位置ともいう。位置ベクトルは慣習的に $\mathbf{r}$ で表すことが多い。

ここで大事な概念を 2 つ定義する:

速度と加速度の定義

速度とは位置を時刻で微分したもの。
加速度とは速度を時刻で微分したもの。

位置、速度、加速度は、ニュートン力学の主役である。これらを使って物理法則を数学的に表し、それを解くのがニュートン力学なのだ。というわけでまずこれらの定義を数式で表現してみよう:

まず時刻を t とし、質点の位置を

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (5.4)$$

とする。以後、 (t) は「これは t の関数だ」というしるし

であり、時には省略されることもある。

また、質点の速度を

$$\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) \quad (5.5)$$

とし、質点の加速度を

$$\mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) \quad (5.6)$$

とする。そして速度と加速度の定義は以下の式のように表現できる:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) \quad (5.7)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) \quad (5.8)$$

よくある質問 111 この $\frac{d}{dt}$ って何ですか? ... その後の関数を変数 t で微分する、という意味の記号です。 $\mathbf{r}'$ や $\mathbf{v}'$ の肩のダッシュもそうです。

よくある質問 112 ベクトルを微分するのですか? そんなの見たことありません。... 数学の教科書 (「ライブ講義 大学 1 年生のための数学入門」10.10 節) に書いてありますがここでも説明しておきましょう。変数 t によって決まるベクトル関数 $\mathbf{r}(t)$ について t と $t + dt$ のそれぞれのときを考えましょう (dt は限りなく 0 に近い微小量とする)。つまり $\mathbf{r}(t)$ と $\mathbf{r}(t + dt)$ を考えます。 dt は微小量なのでこの 2 つのベクトルは互いに近いものどうでしょう。この 2 つのベクトルの差を dt で割ったもの、つまり

$$\frac{\mathbf{r}(t + dt) - \mathbf{r}(t)}{dt} \quad (5.9)$$

を $\mathbf{r}$ の微分 (正確には微分係数や導関数) とよび、 $\mathbf{r}'(t)$ と書きます。あるいは同じことですが

$$\mathbf{r}(t + dt) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}'(t) dt \quad (5.10)$$

となるようなベクトル $\mathbf{r}'(t)$ が $\mathbf{r}$ の微分です。形式的には普通に関数の微分と同じで足し算や引き算がベクトルの足し算や引き算になるだけです。

ここで $\mathbf{r}(t + dt) - \mathbf{r}(t)$ を $d\mathbf{r}$ と書けば式 (5.9) は

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (5.11)$$

となります。これを形式的に

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} \quad (5.12)$$

と書いたのが式 (5.7) の真ん中です。

よくある質問 113 式 (5.7) には (t) がついているけど式 (5.12) にはついていませんね。なぜですか? ... 式 (5.12) に (t) をつけてもよいのですよ。しかしその前に d/dt がかかっているんで $\mathbf{r}$ は t で微分できる、すなわち $\mathbf{r}$ は t の関数だということとは明らかです。そこで煩雑さを避けるためにこのよう

に (t) は省略されがちなのです (もちろん t が特定の値のときのことを議論する場合は $\mathbf{r}$ に $()$ をつけてその中にその値を明記する必要があります)。このように物理学では関数の変数を表す $()$ は省略されることが多いということを覚えておいてください。

よくある質問 114 dt とか dr とか、 d がたくさん出てきますがどうということですか? ... d は difference の頭文字から来ている数学記号というか慣習で、「 d なんとか」で「なんとかの微小な差」や「なんとかの微小な変化」を表します。 dt は時刻の微小な差 (変化) を意味します。このとき dt は d かける t ではなく dt でひとつの量です。

よくある質問 115 では $\frac{d^2}{dt^2}$ って何ですか? ... 変数 t で微分し、さらにもう 1 回、変数 t で微分するという意味です。 $\frac{d}{dt} \frac{d}{dt}$ を縮めて書くとそうなりますよね。

よくある質問 116 それなら $\frac{d^2}{dt^2}$ であるべきでは? ... 先程も述べましたが分母の dt は d かける t ではなく dt でひとつの量です。

ベクトルの微積分はベクトルの成分ごとの微積分におきかえて考えればよい。たとえば式 (5.7) を各成分にわけて書き改めると以下のようになる:

$$v_x(t) = \frac{d}{dt}x(t) \quad (5.13)$$

$$v_y(t) = \frac{d}{dt}y(t) \quad (5.14)$$

$$v_z(t) = \frac{d}{dt}z(t) \quad (5.15)$$

また、式 (5.8) を各成分にわけて書き改めると以下のようになる:

$$a_x(t) = \frac{d}{dt}v_x(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) \quad (5.16)$$

$$a_y(t) = \frac{d}{dt}v_y(t) = \frac{d^2}{dt^2}y(t) \quad (5.17)$$

$$a_z(t) = \frac{d}{dt}v_z(t) = \frac{d^2}{dt^2}z(t) \quad (5.18)$$

ところで速度は簡単な概念のようできて、実はきちんと理解している人は多くはない。

まず速度と「速さ」を混同している人が多い。速さは速度の絶対値であり、したがって向きを持たない。小学校で習う「距離割る時間」は速さであって速度ではない (距離は向きを持たない)。

そこで中学校や高校では速度を「速さと向きをあわせたもの」のように教わるが、それは定義ではない。なぜ

なら「向き」や「あわせる」の定義が欠けているからである。

よくある質問 117 向きなんて自明じゃないですか? ... ある物体が動いているとき、その向きをあなたはどうか判断しますか? 物体を目で追って、少し前の位置と今の位置を比べますよね。つまり、少し前の位置から今の位置へ頭の中で矢印を引いているのです。つまりベクトルの引き算で「動きの向き」を定義できるのです。それを自明というならそうかもしれませんが、それをあえて数学的に表現したことに意味があるのです。たとえば物体の運動をコンピュータで解析するとき、コンピュータに「向き」を理解させ計算させるにはコンピュータでもできますからね。

よくある質問 118 速度と速さを区別しなければならない具体例ってありますか? ... 時計の針の先のように、いつも同じ「速さ」で円上をぐるぐる回る運動を考えましょう。そういうのを「等速円運動」と言います (後で学びます)。この「等速」は「等しい速さ」であって「等しい速度」ではありません。上述したように「等しい速度」の運動は必ず直線上の運動です。

5.3 「解析学の基本定理」で加速度から速度を、速度から位置を求める

前節では位置から速度を、そして速度から加速度を定義した。要するにそれぞれ時刻で微分すればよい。本節では逆に加速度から速度を、そして速度から位置を求める数学的方法を述べる。今後、この考え方は位置・速度・加速度以外の様々な概念でも使うことになるのでしっかり理解しよう。

「解析学の基本定理」(数学の教科書参照)によれば、微分可能な関数 $f(t)$ について

$$\int_a^x \frac{d}{dt}f(t) dt = f(x) - f(a) \quad (5.19)$$

が成り立つ。ここで $a = 0$ とおいて変形すると

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \frac{d}{dt}f(t) dt \quad (5.20)$$

となる。ここで x を形式的に t と置き直す。つまり積分区間の上端の t と積分変数の t が「かぶる」ことになる (これが気持ち悪いという人は P.52 答 73 の解説を参照しよう)。すると

$$f(t) = f(0) + \int_0^t \frac{d}{dt}f(t) dt \quad (5.21)$$

となる。

さて式 (5.21) で f を x で置き換えれば (これは式 (5.19) で出てきた x とは無関係),

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(t) dt \quad (5.22)$$

となる。ここで式 (5.13) を使ったことに注意。

同様に式 (5.21) で f を v_x で置き換えて考えれば,

$$v_x(t) = v_x(0) + \int_0^t a_x(t) dt \quad (5.23)$$

となる。ここで式 (5.16) を使ったことに注意。

$\mathbf{r}$ や $\mathbf{v}$ の y 成分と z 成分についても同様に考えれば,

$$y(t) = y(0) + \int_0^t v_y(t) dt \quad (5.24)$$

$$z(t) = z(0) + \int_0^t v_z(t) dt \quad (5.25)$$

$$v_y(t) = v_y(0) + \int_0^t a_y(t) dt \quad (5.26)$$

$$v_z(t) = v_z(0) + \int_0^t a_z(t) dt \quad (5.27)$$

が成り立つ。式 (5.22), 式 (5.24), 式 (5.25) をまとめて, ベクトルの記法を用いて書けば,

$$\begin{aligned} (x(t), y(t), z(t)) &= (x(0), y(0), z(0)) \\ &+ \left(\int_0^t v_x(t) dt, \int_0^t v_y(t) dt, \int_0^t v_z(t) dt \right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

となるが,

$$\left(\int_0^t v_x(t) dt, \int_0^t v_y(t) dt, \int_0^t v_z(t) dt \right) \quad (5.29)$$

を

$$\int_0^t (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) dt \quad (5.30)$$

と書き, さらに式 (5.4), 式 (5.5) を思い出せば, 式 (5.28) は次のように簡潔に書ける:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t) dt \quad (5.31)$$

これは各時刻の速度が分かっている状況で各時刻の位置を求めるときに使う式である。

同様に式 (5.23), 式 (5.26), 式 (5.27) をまとめて次のように簡潔に書ける:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{a}(t) dt \quad (5.32)$$

これは各時刻の加速度が分かっている状況で各時刻の速度を求める式である。

式 (5.31), 式 (5.32) は, あらゆる運動について成り立つ, 一般性の高い式である。なぜならこれらは物理学の式ではなく数学 (微積分学) の式だからである。

よくある質問 119 x を t で置き換えて, また f を x で置き換えて, ってそんな勝手なことしてよいのですか? ... よいのです。これらは形式的な置き換えに過ぎません。

よくある質問 120 いきなり微分と積分とベクトルがガンガン出てきてびっくりです。これ物理ではなくて数学ではないですか。数学は苦手なので使わないで下さい... だから言いましたよね, 物理は数学をガンガン使うと。「数学を使わない物理」の方が苦行です。数学を使うほうが本質的に正確に楽に物理を表現できるのです。

よくある質問 121 もっと直感的なイメージで説明して欲しいです。... もちろんイメージは大事だし有用です。しかし物理学は, たとえ直感でイメージできるようなことであっても, わざと数学の言葉や数式を使って定義・導出するのです。速度は我々にとって直感的にイメージしやすい量ですので, そのイメージをそのまま言葉にしようとしがちですが, 物理学はあえてそういうことはやらないのです。なぜかという物理学は「自然の法則は数学で記述できる」という世界観であり, 自然現象を数学で表現し数学で解明するのです。速度を「位置を時刻で微分したもの」と定義した瞬間, 微積分の数学を使って位置と速度が結びつき, 「速度を積分することで位置が求まる」ことも自明になるのです (式 (5.31))。そういうアプローチの積み重ねが物理学に自然現象を解明・予測・制御する強い能力をもたらしたのです。

よくある質問 122 私は高校生物学の教員免許が欲しいだけです。数学は勘弁して欲しいのです。... 「高校生物学の教員免許」というものはありません。あるのは「高校理科の教員免許」であり, それには漏れなく物理が付いてきます。「物理ができない高校生物教員」というのは制度上, 許されないのです。そして物理を学ぶには数学は必要なのです。

よくある質問 123 高校物理では微積分は使わないのだから, 高校理科の教員免許のためならば物理で微積分を使う必要は無いのでは? ... 何かを教える人は教えるレベルよりも深く理解していなければならないのです。それが教育者です。横着言わずに頑張って学んで, 良い先生になってください。

● 問 79 ある質点が直線上を移動している。時刻 t の

とき位置を $x(t)$, 速度を $v(t)$ とする。 v_0, k を定数として, $x(0) = 0, v(t) = v_0 \exp(kt)$ が成り立つとき, $x(t)$ を v_0, k, t で表わせ。ヒント: いきなり難しそう!! と思う必要はない。この問題は見掛け倒しである。各時刻での速度がわかっている場合に, 速度から位置を求めるにはどの式を使えばよかっただろうか?

5.4 等速度運動 (等速直線運動)

ではこれから, これらの式を駆使していくつかの典型的・限定的な運動を調べていく。本節ではまず最もシンプルな運動を考えよう。

速度 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ が (向きも含めて) 一定であるような運動^{*1}を等速度運動とか等速直線運動という (定義)。この場合, v_x, v_y, v_z は t によらない定数である。すると式 (5.22) の積分は簡単にできて,

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t v_x dt \\ &= x(0) + [v_x t]_0^t \\ &= x(0) + v_x t \end{aligned} \quad (5.33)$$

となる。同様のことを式 (5.24), 式 (5.25) についても行くと, 以下のような 3 つの式が得られる:

$$x(t) = x(0) + v_x t \quad (5.34)$$

$$y(t) = y(0) + v_y t \quad (5.35)$$

$$z(t) = z(0) + v_z t \quad (5.36)$$

となる。ベクトルの記法を使えば, これらをまとめて以下のように簡潔に書くことができる:

$$(x(t), y(t), z(t)) = (x(0), y(0), z(0)) + (v_x, v_y, v_z)t$$

式 (5.4), 式 (5.5) を思い出せば, これは次式のように書くことができる:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v} t \quad (5.37)$$

この式から, 質点 $\mathbf{r}(t)$ は, 固定点 $\mathbf{r}(0)$ を通り, 方向ベクトルが $\mathbf{v}$ であるような直線を描くことがわかる。すなわち速度が一定の運動 (等速度運動) は必ず直線の上での運動である。したがって等速度運動をわざわざ等速「直線」運動という必要は無い。

よくある質問 124 ならなぜわざわざ等速「直線」運動って言ったりするのですか?... なぜか高校の物理学ではそう言う慣習のようです。等速度であれば必然的に直線上に限定された運動になるのですが, そのことは上で見たように数学, 特に微積分を使わねば証明できませんので高校生にはハードルが高い, というわけで蛇足っぽいけど「直線」とつけるのでしょう。その名残で大学の物理の教科書でも等速「直線」運動と書いている本は多いです。

さて, 速度が $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ で一定である状態を静止という。静止も「速度一定」なのだから当然, 「等速度運動」である (動いていないのに「運動」というのも妙な気がするが笑)。

よくある質問 125 速度 $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ は, 単位をつけなくてよいのですか? 「0」じゃなくて「0 m/s」じゃないですか? ... 単位をつけたければつけてもよいですが, 0 には単位は不要です。物理量は数値 $\times$ 単位です。単位に 0 がかかるのだから単位も消えて 0 です。それに 0 m/s も 0 cm/s も 0 km/h も同じでしょ? なら単位をつける意味は無いですよ?

5.5 等加速度運動

次にシンプルな運動は, 速度は変わり得るが加速度は一定という運動である。そのような運動を等加速度運動という (定義)。

この場合, a_x は t によらない定数であり, 式 (5.23) の積分は「定数の積分」だから簡単にできる。その結果は

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_x(0) + \int_0^t a_x dt = v_x(0) + [a_x t]_0^t \\ &= v_x(0) + a_x t \end{aligned} \quad (5.38)$$

となる。これを式 (5.22) に代入すると

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t v_x(t) dt \\ &= x(0) + \int_0^t (v_x(0) + a_x t) dt \\ &= x(0) + \left[v_x(0)t + \frac{1}{2}a_x t^2 \right]_0^t \\ &= x(0) + v_x(0)t + \frac{1}{2}a_x t^2 \end{aligned} \quad (5.39)$$

となる。すなわち加速度一定の運動は時刻の 2 次関数で表されるのだ。この具体例を後ほど学ぶ。さて上の式と

^{*1} ここではあえて教育的に「向きも含めて」と書いたが, そもそも速度は大きさと向きを持つ量 (ベクトル) なので「速度が一定である」と言えば向きも含めて一定であることを自動的に意味する。

同様のことが y 成分, z 成分でも言えるので, まとめて

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \mathbf{a}t \quad (5.40)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}(0)t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \quad (5.41)$$

とも書ける。これらは高校物理では大きく取り上げられる式だが, 実は普遍性・一般性に乏しい「しょぼい」式である。なぜならこれらは「加速度が一定」という限定的な条件でしか使えないのだ。次節で詳述するような, 加速度が時間とともに変わるような運動(世の中にはそのような運動の方がずっと多い)ではこの式は役立たずなのだ。

よくある質問 126 高校物理基礎で必死に覚えた式 (5.38) と式 (5.39) が, 限定された条件でしか使うことができない, 汎用性の低い公式だと知って驚きました。覚えた意味は無かったのですか? ... 微積分を理解すればこれらの式は簡単に導出できるので覚える必要はありません。しかし高校物理では微積分が封印されているので覚えるより仕方なかったのです。

● 問 80 以上の解説を参考にして式 (5.38), 式 (5.39) の導出を再現せよ。

よくある質問 127 等加速度運動は等加速度「直線」運動と言ったりはしないのですか? ... 直線上に限定された等加速度運動をそのようによぶことはあります。しかし等加速度運動は直線上ではない運動になることがあります(等速度運動は必ず直線上で起きるのは対照的です)。たとえば地上で野球ボールを斜めに投げ上げると, ボールの運動は直線ではなく放物線を描きます(空気抵抗を無視し, 地球の曲率を無視し, ボールにかかる重力が場所によって同じと仮定すれば)。このときボールにかかる加速度は鉛直下向きで常に一定つまり等加速度運動です。この運動については 6.2 節で詳しく検討します。

5.6 運動の三法則

第2章で力に関する法則について述べた。ではそもそも力とは何なのだろうか? 力は自然界に何をもちこたすのだろうか? 端的に言えば, 力は物体の運動に変化をもたらしものだ。それを支配するのが以下のニュートンの「運動の三法則」だ。これらは必ず記憶しなければならない。

運動の三法則

- 第一法則: 質点に働く合力が 0 のとき質点は等速度運動をする。(慣性の法則)
- 第二法則: 質量 m の質点に合力 $\mathbf{F}$ がかけると質点は次式にしたがって運動する(運動方程式):

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (5.42)$$

ここで $\mathbf{a}$ は質点の加速度である。

- 第三法則: 2 つの質点 A, B において, A が B に力を及ぼすとき, A は B から, 同じ大きさで逆向きの力を及ぼされる。(作用・反作用の法則)

この「運動の三法則」も, 物理学における基本法則(根源的な原理)であり, なぜ成り立つのかは誰も知らない。しかし運動の三法則は歴史的にも理論体系としても科学の根幹である。運動の三法則が発見されたとき, 人類は科学の扉を大きく開いたのだ。これは知識人の教養である。

よくある質問 128 これは覚えるべきですか? 物理の公式は理解すれば暗記しなくてよいて, 先生, 言ってませんでした? ... そんな乱暴なこと言っていませんよ。基本法則から導出できるこまごまとした公式まで闇雲に暗記する必要はない, と言ってるだけです。この「運動の三法則」は「こまごまとした公式」ではなく「基本法則」です。物理学の主役です。これを覚えなかったら何も始まりません。

よくある質問 129 どれが基本法則でどれが「こまごまとした公式」なのか, どうやって見分けるのですか? ... テキストをしっかりと読んで物理の理論体系を丁寧に追っていけば自然にわかります。逆にいうと, それがわからないならば勉強のやり方がどこかおかしいのです。

5.7 慣性の法則(第一法則)

「質点に働く合力が 0 のとき質点は等速度運動をする」という慣性の法則は中学校で習うが, これを正確に理解している人は実は多くない。まず多くの人は, 物体は力がかかってこそ運動すると思い込んでいる。ところがこの法則は力がかかっていなくても(合力が 0 でも)物体は「等速度運動」という運動をするというのだ。つまり

「力がかからなくても物体は動く」……(*)

のだ。そう言うとき多くの人が驚いた顔をする。

しかしこれは多分に言葉の解釈の問題である。という

のも「動く」には

- 「(止まっていたものが)動き始める」
- 「動いている状態にある」

という2つの解釈がある。前者の意味に解釈すると確かに(*)はおかしい、間違った命題だ。止まっている物体が動き始めるには力が必要だ。慣性の法則が言っているのは後者の意味だ。既に運動状態にある物体は、さらに押したり引いたりしてあげなくても、放っておいてもその運動状態(それは等速度運動)を続けるのだ。

第一法則は、その対偶をとって「質点が等速度運動以外の運動をするとき、質点に働く合力は0ではない」と言い換えることもできる(対偶とは何かがわからない人は数学の教科書で調べよ)。

例 5.1 ある円の周上を質点が一定の速さ(速度ではない!)でまわるような運動を考える(それを「等速円運動」という)。そこでは速度の大きさ(つまり速さ)は一定でも速度の方向が時々刻々と変化するので「等速度運動」ではない。したがって等速円運動では必ず何らかの力(0でない合力)が質点にかかっている。後に学ぶので今は理解できなくてよいが、それを「向心力」という。(例おわり)

• 問 81 エスカレーターで「手すりにおつかまり下さい」と言われるのはなぜか? 慣性の法則の観点で説明せよ。ヒント: 手すりを持たないと上りよりも下りの方が危ない。

ところで第2章では「物体に働く力(合力)が0であるとき、静止している物体は静止し続ける」と学んだ。前述のように「静止」は「速度0の等速度運動」である。したがってこれは慣性の法則の特別な場合である。

ところがこれを以下のように誤解する人がいる。

誤解 1: 「物体に働く力(合力)が0であれば物体は静止する」... 合力がゼロの物体は等速度運動をするのであり、その速度は0でなくてもかまわない。つまり静止していなくてもよい。たとえば宇宙空間を飛んでいる隕石は何かにかかれたり押されたりして飛んでいるわけではなく、それにかかる力が0でありながらそのまま飛び続ける。そのように「働く力が0」でも物体が運動するケースがあるのだ。

誤解 2: 「物体の速度が0のとき、物体に働く力(合力)は0である」... 「速度0」は「静止」とは限らない。静止は「速度0が続く」という状態である。一瞬だ

け「速度0」が実現するような運動は静止ではない。たとえばボールを鉛直上向きに投げ上げたら、最高到達点でボールは一瞬だけ速度0になる。しかしその直前や直後は速度は0ではない。そしてこのような運動ではボールには鉛直下向きの力(重力)がかかり続けている。つまり最高到達点で速度0になったボールにも0でない力がかかっているのである。

• 問 82 「物体が静止している」を条件 A, 「物体が等速度運動をしている」を条件 B, 「その物体に働く力(合力)は0である」を条件 C とする。

- (1) A は C の必要条件? 十分条件?
- (2) B は C の必要条件? 十分条件?
- (3) B は A の必要条件? 十分条件?

ヒント: 必要条件や十分条件がわからない人は数学の教科書を見よう!

5.8 運動方程式 (第二法則) はすごい大事!

さて等速度運動以外の運動も扱うのが次の第二法則だ。第二法則(運動方程式)は君が大学1年次の物理学で学ぶべき最も重要な基本法則だ。この法則の意味を今から丁寧に読み解いていこう:

式(5.42), すなわちで $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ という式において, $\mathbf{F}$ と $\mathbf{a}$ はベクトルである。つまり大きさと方向を持つ。成分で書いて,

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) \quad (5.43)$$

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad (5.44)$$

とすれば, 方程式(5.42)は

$$F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y, \quad F_z = ma_z \quad (5.45)$$

という3つの方程式と同じことだ。

よくある質問 130 なぜ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ なのですか? なぜこの式は成り立つのですか? ... それは「聞かないお約束」です。というのも、これも含めて「運動の三法則」をつぶこ言わずに信じて受け入れれば多くのことが整合的に説明されるのです。だからこれは「ニュートン力学というゲームのルール」です。

よくある質問 131 頭から信じて受け入れろ? なんか宗教みたいですね... 科学と宗教が似ているのはそこです。どちらも「これを信じて受け入れよ」というものがあるのです。それが科学における基本法則です。ただし科学ではそれを無批判に信じるのではなく、整合性に基づいて信じるのです。実験事

実や他の科学理論と矛盾せずに普遍的に整合することがその確からしさであり、基本法則として信じる理由です。

式 (5.42) は辺の左右を入れ替えて次式のように表すこともあるが、正直どちらでもよい:

$$ma = \mathbf{F} \quad (5.46)$$

よくある質問 132 高校の先生は $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ではなく $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ だと言っていましたか? ... 「物理学では等号の左辺と右辺で意味は違うのだ」という考え方ですね。個人の世界観や物理観に基づく個人のポリシーとしてはアリでしょう。でもそれは広く認められている約束ではありません。むしろ等号は左右を入れ替えても成り立つと数学では約束されていますし (等号の公理)、物理学の法則は数学で記述されるのですから、 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ と $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ は厳密に同じでありどちらも正しいのです。

よくある質問 133 ならばそう言っていた高校の先生は間違っていたのでしょうか? ... 「正解」か「間違い」かで言えば「間違い」でしょう。でもそこにはこだわらない方がよいですよ。その先生は自分の考え方が教育的に有用だと思ってそう教えられたのでしょう。それは必ずしも全否定すべきものではありません。

方程式 (5.42) は式 (5.8) を使って以下のように表されることも多い:

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (5.47)$$

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (5.48)$$

式 (5.42) から、力は質量 (SI 単位は kg) と加速度 (SI 単位は m s^{-2}) の積と同じ単位を持たねばならぬ。だから力の SI 単位が kg m s^{-2} になるのであり、この単位を N (ニュートン) とよぶのだ。

さて、式 (5.47)(5.48) を見ると、運動方程式は位置や速度に関する微分方程式 (関数の微分を含む方程式) だとわかる。一般に、微分方程式は未知の関数の方程式であり、それを「解く」ことによって未知だった関数が具体的に求まる。今の場合は、力 $\mathbf{F}$ と初期値 (ある時刻における位置と速さ) が具体的にわかれば運動方程式が解ける。そしてその結果、速度 $\mathbf{v}(t)$ や位置 $\mathbf{r}(t)$ という時刻 t に関する関数 (ベクトル値関数) が、全ての時刻 t において具体的に求まる。つまり質点の運動の全てが数学的に決まってしまう。つまりあらゆる質点の運動を予

測する能力を運動方程式は秘めているのだ*2。

ところで式 (5.42) で $\mathbf{F} = 0$ と置いてみよう。すると $0 = m\mathbf{a}$ となる。質量 m が 0 でなければ結局 $\mathbf{a} = 0$ だ。 $\mathbf{a}$ は速度の微分なので、それが 0 ということは速度が (向きも含めて) 時刻によらず一定ということだ。つまり働く力がゼロなら質点は等速度運動をするということだ。これは第一法則 (慣性の法則) と整合する。つまり質点に力がかかる場合とかからない場合のどちらの場合も、第二法則で表現することができるわけだ。ということは第 1 章で学んだ「オッカムの剃刀」にしたがって、第一法則は削ってしまうべきではないだろうか? (運動の「二」法則の方が「三」法則よりシンプルだ!) いや、それでもなお第一法則は削ってはならないのだ。このあたりはいずれ「慣性系」という概念を学ぶとき (P.87) に詳述する。

また、第三法則 (作用・反作用の法則) は既に述べた。

運動の三法則や万有引力の法則はニュートンが発見した。これらの法則から導かれる物理学 (力学) をニュートン力学という。

以上で力学の根源的な法則は終わりだ。あとはこれらの法則から導出される派生的な法則である。

● 問 83 運動の三法則を 3 回書いて記憶せよ。(それぞれの名前だけでなく内容を! $\mathbf{F}$ と $\mathbf{a}$ は太字であることに注意!)

● 問 84 運動の三法則について、以下の記述それぞれについて、正しいか正しくないか、理由もつけて述べよ。

- (1) 質点 A が質点 B に力を及ぼすとき、A は B から同じ力を受ける。
- (2) 質点が等速度運動をしているとき、質点にかかる合力は 0 である。
- (3) 質量 m の質点に合力 F がかかるとき、質点の加速度を a とすると $F = ma$ が成り立つ。

よくある質問 134 作用・反作用の法則を述べよとの問題で、「質点 A が質点 B に作用したら、質点 B は質点 A に...」と書いたらダメ出しされました。なぜですか? ... 「力を及ぼす」を「作用する」と言い換えてはダメです。物理学では「作用」は別の意味の言葉として定義されています。詳細は述べませんが「解析力学」という高度な物理学で使う言葉です。

よくある質問 135 なら「作用・反作用の法則」という言葉の

*2 そのため運動方程式は人類に運命論的な世界観を突きつけることになった。

中の「作用」はよいのですか? ... 個人的にはこの「作用・反作用の法則」というよび方はイケてないと思います。この法則は力のかかり具合を述べるものであり、決して上述の解析力学的な「作用」を述べるものではありませんから、誤解を招きかねない表現だと思います。「力をかける・かけられるの法則」とかの方がぴったり来ます。しかし物理学ではなぜかこの法則を「作用・反作用の法則」とよぶ慣習なのです(泣)。というわけで物理学では「作用」という言葉は不用意に使わないように気をつけましょう。

5.9 質量と速度の積を運動量という

ところで、唐突だがここで運動量というものを以下のように定義する:

—— 運動量の定義 ——

m を質点の質量, v を質点の速度とすると,

$$\mathbf{p} := m\mathbf{v} \quad (5.49)$$

を質点の運動量とよぶ。

すると, m を定数とみなせば運動方程式 (5.42) は

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (5.50)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (5.51)$$

などともあらわされる。これらはもちろん全て互いに同じ方程式である^{*3}。運動量という概念は後に大変重要な働きをする。

- 問 85 運動量の定義を 5 回書いて記憶せよ。(p と v は太字であることに注意!)

よくある質問 136 サッカーで「○○選手の驚異の運動量」とかよく言いますが、あれのことですか? ... ○○選手は疲れ知らずでよく走り回るという意味ですね。でも違います。物理学用語の「運動量」はそれとは違うことを意味します。

よくある質問 137 運動量の定義について。「p を運動量, m を質量, v を速度とする。p = mv が成り立つ」と書いたらなんかダメっぽいことを言われました。なぜですか? ... これは「が成り立つ」がダメなのです。そこを「とする」とか「と定義する」と書けば OK でした。

^{*3} ただし, m が一定でないような場合(光速に近い高速運動など)は $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ は成り立たなくても $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ は成り立つ。したがって $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ より $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ のほうがより一般性の高い記述である。

「成り立つ」は「そうなる」ということです。ところがここでは定義を述べています。p = mv は「そうなる」のではなく「そうする」「そう決める」「そう約束する」「そう定義する」もののです。運動量 p の意味や正体がこの式によって初めて定まるのです。

こういうところで「成り立つ」を使ってしまうと、あたかも運動量 p が別のところで別の意味として定義され、そしてそれが何かの理論や奇跡によって mv と等しいことが確かめられた! みたいに受け取られます。

言葉尻を捉えているように思うかもしれませんが、これは大事なことです。科学を体系的に理解するとき、定義(約束)、基本法則(理由なく認めざるを得ない自然現象のルール)、定理(定義や基本法則から理論的に導かれるもの)をはっきりと区別しなければなりません。その際、まず重要なのはそれが「成り立つ」ようなもの(だとしたら基本法則か定理)なのか、それとも「そう約束する」ようなものなのか(だとしたら定義)です。

よくある質問 138 「p = mv となる p を運動量という」と書いたらまたダメ出しされたのですが。... これは全くダメとは言えないけれど稚拙な表現です。「となる」にあなたはどのような意味を込めましたか? 上の質問の「が成り立つ」という表現をちょっとぼやかしてそれっぽく言い換えただけではないでしょうか(笑)? そういふのは読み手に好意的な解釈を暗に要求している、ずるい解答です。

5.10 力が一定なら等加速度運動

これからしばらく具体的な運動について運動方程式を解いてみよう。なお、この章で出てくる問はすべて一直線上の運動なので、力や位置や速度や加速度はスカラーと考えてよい(あえて 3 成分のベクトルとして考える必要はない)。次章以降ではベクトルとして考える必要が出てくる。

まず本節では、力が時間と共に変わったりせず、常に一定であるような状況で起きる運動を考えよう。その場合、第二法則から、加速度も一定であるということがわかる。そのような運動は P.63 で学んだ「等加速度運動」になる。

その最も身近な例は重力に任せて落ちていく運動、すなわち自由落下である。

- 問 86 地表付近で重力だけを受けて上下運動をする、質量 m の質点の運動を考える。重力加速度を g、時刻を t とする。地表から鉛直上向きに x 軸をとる。時刻 t における質点の位置、速度、加速度をそれぞれ

$x(t), v(t), a(t)$ とする。初期条件は

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0 \quad (5.52)$$

とする。空気抵抗は考えない。

(1) この質点に関する運動方程式は

$$-mg = ma \quad (5.53)$$

となることを示せ。

(2) 式 (5.53) より、鉛直方向の加速度は $-g$ という一定値をとる。したがってこの運動は等加速度運動である。次式を示せ:

$$v(t) = v_0 - gt \quad (5.54)$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2 \quad (5.55)$$

ヒント: 式 (5.38), 式 (5.39)

(3) 特に、初期位置 0 かつ初速度 0 の場合、

$$v(t) = -gt \quad (5.56)$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (5.57)$$

となることを示せ。

この結果は質点の質量 m に無関係であることに注意せよ。つまり重力による力を受けて行う運動は質点の質量には依存しない。

よくある質問 139 直感的には重い物の方が早く落ちる気がします... それは石のようなぎゅっと詰まった物体と、綿菓子のようにふわっとした物体をイメージして、後者はゆっくり落ちる気がするからであって、それは後者に空気抵抗が働いていることを忘れているからかもしれませんね。でも小石の質量が 10 g で綿菓子の質量が 11 g ならどうでしょう? 空気抵抗があれば、やはり綿菓子の方がゆっくり落ちそうではないですか? そちらのほうが重いのに!! だからその直感には既に矛盾しているのです。つまりそれは「直感」ではなく「ちゃんと考えていない」だけなのです。

よくある質問 140 重力の大きさは式 (2.1) で表されるので、地球中心と質点との距離が小さいほど大きいはずですが。ということは質点が落ちていくとだんだん重力は強くなっていくはずですが。なのに重力は一定とみなしてよいのですか? ... 良い質問です。だから問題の最初に「地表付近で」という但し書きがついているのです。「地表付近」の定義は微妙ですが、たとえば高い方は旅客機が飛ぶあたり (高度 10 km 程度)、低い方は最も深い海底のマリアナ海溝 (深さ 10 km 程度) とし

ましょう。地球半径を 6400 km としたとき、 $r = 6410$ km のときと $r = 6390$ km でどのくらい式 (2.1) が違うか計算してご覧下さい。違いは 0.6 % くらいしかありません。したがって有効数字 2 桁程度の精度の議論ならこの範囲では「重力は高さによらず一定」とみなしても差し支えないのです。

● 問 87 地表付近で初速度 0 で質点を投下し、自由落下させる。空気抵抗は働かないとする。地面と質点の間には十分な空間があって、いま考える範囲では質点は地面には激突しないとする。

- (1) 投下の 10 秒後には質点はどれだけの距離を落ち、どのくらいの速度になっているか?
- (2) 投下後、何秒たったらず質点の速度は音速 (1 気圧、常温で約 340 m s^{-1}) を超えるか? そのとき質点は初期位置からどのくらいの距離を落下しているか? (実際はそうなる前に空気抵抗がだいぶん働くが)
- (3) 高度 10 km を飛ぶ旅客機のエンジンが突然故障し、旅客機が自由落下を始めた。地表に激突する前にパイロットは機体を立てなおさねばならない。パイロットに与えられた時間的猶予はどのくらいか?

● 問 88 野球投手がボールを真上に投げ上げる。鉛直上向きに x 軸をとり、ボールの初期位置を $x = 0$ とし、初速度を $v_0 = 40 \text{ m s}^{-1}$ (約 140 km h^{-1} に相当) とする。ボールの運動を横軸 t 、縦軸 $x(t)$ のグラフに描け。ボールは最大でどのくらいの高さまで届くか? ヒント: $x_0 = 0 \text{ m}$, $v_0 = 40 \text{ m s}^{-1}$ として、式 (5.55) を考え、この $x(t)$ の最大値を求める。 t に関する二次関数とみなして平方完成すればよい。

● 問 89 地表近くで質量 $m = 1 \text{ kg}$ のボールを手放したら、(1) ボールにはどのくらいの大きさの加速度が働くか? (2) 地球にはどのくらいの大きさの加速度が働くか? なお地球の質量は $M = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$ とせよ。

次の問題は自由落下ではないが、同様に等加速度運動である。

● 問 90 カーリングというスポーツでは、目標地点にうまく停止するように氷の上で石 (ストーン) を滑らせる。いま君は氷の上で質量 m のストーンを初速度 v_0 で滑らせて手放そうとしている。ストーンを手放す位置を原点とし、ストーンの進行方向に x 軸をとる。ストーン

を質点とみなし、時刻 t におけるストーン的位置を $x(t)$ とする。ストーンを手放す時点を $t = 0$ とする。

(1) ストーンと氷の間に働く動摩擦力の大きさを F_m とし、ストーンに関する運動方程式を立てよ。

(2) その運動方程式を解いて関数 $x(t)$ を求め、グラフにかけ。動摩擦力は位置や速度によらず一定とする。注：速度が 0 になった時点でストーンは停止する。

(3) $v_0 = 1.5 \text{ m s}^{-1}$ のときストーンは 20 m 進んで停止した。ストーンの質量は 20 kg であった。 F_m の大きさを求めよ。

(4) このときの動摩擦係数の値を求めよ。

(5) 次にストーンを $x = 25 \text{ m}$ の位置で停止させたいと思う。そのためには v_0 をどのくらいにすればよいか？

(6) 同じ氷上で質量 30 kg のストーン（ただし 20 kg のストーンと同じ底面材質のもの）を同様に $x = 25 \text{ m}$ の位置で停止させるには v_0 をどうすればよいか？

以上の例や問題は等加速度運動の公式、すなわち式 (5.39) を覚えておけば解ける。そして高校物理で出てくるのはせいぜいこの程度の話である。だから高校物理を学んだ人は $F = ma$ よりも式 (5.39) の方をよく覚えていたりする。しかし世の中にはもっともっと複雑で多様な現象がある。それを次節で見てみよう。

5.11 等速度でも等加速度でもない直線運動

● 問 91 質量 2.0 kg の質点があり、時刻 0 では原点にあって速度 0 だとする。この質点に、時刻に比例する力が x 軸の正方向にかかる。時刻 2.0 s のとき質点にかかる力は 6.0 N である。この質点の時刻 4.0 s での位置を求めよ。計算式には単位を埋め込むこと。ヒント：この問題では式 (5.39) は使えない。式 (5.39) が使えるのは加速度が変化しないときだけ。この問題では加速度は変化する。

● 問 92 質量 m の物体（質点とみなす）が、速度 v_0 で x 軸上を正の向きに等速度運動している。しかし突然、この物体にとりつけられたパラシュートが開き、物体は空気から受ける力（空気抵抗）のために減速をはじめた。その力を $-\alpha v$ とする。 α は適当な定数である。パラシュートが開いた位置を原点（ $x = 0$ ）とする。時刻を t とし、パラシュートが開いた時点を $t = 0$ とする（図 5.1）。

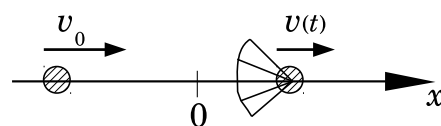


図 5.1 等速度運動している物体に突然空気抵抗がかかる。

(1) $t < 0$ では次式が成り立つことを示せ：

$$0 = m \frac{dv}{dt} \quad (5.58)$$

(2) $0 < t$ では次式が成り立つことを示せ：

$$-\alpha v = m \frac{dv}{dt} \quad (5.59)$$

(3) 上の式は関数 $v(t)$ に関する微分方程式だ。数学の教科書を参考にしてこの微分方程式を解け。結果は次式のようになるはずである：

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \quad (5.60)$$

(4) 関数 $v(t)$ のグラフを描け。

このように空気や水などの流体^{*4}の中で物体が速度に比例して受ける抵抗を粘性抵抗という。しかしながら物体が大きかったり速度が大きいとき、速さの 2 乗に比例する抵抗をより強く受ける。それを慣性抵抗という^{*5}。

● 問 93 粘性抵抗とは何か？ 慣性抵抗とは何か？

● 問 94 問 92 においてパラシュートによる空気抵抗が粘性抵抗でなく慣性抵抗ならどうなるだろう？ いま、空気抵抗が $-\beta v^2$ であるとする（ β は適当な定数）。

(1) パラシュートが開いてから物体が停止するまでの間、次式が成り立つことを示せ：

$$-\beta v^2 = m \frac{dv}{dt} \quad (5.61)$$

(2) 上の微分方程式を変数分離すると次式のようになることを示せ：

$$\beta dt = -\frac{m dv}{v^2} \quad (5.62)$$

(3) これを不定積分すると次式のようになることを示せ（ C は積分定数）：

$$\beta t = \frac{m}{v} + C \quad (5.63)$$

^{*4} 気体と液体をまとめて流体とよぶ。

^{*5} このあたりの法則は流体力学という物理学で説明されるが、流体力学のほとんどはニュートン力学を基本法則とする。

- (4) 以下の式が成り立つことを示せ。

$$C = -\frac{m}{v_0} \quad (5.64)$$

- (5) 以下の式が成り立つことを示せ。

$$v(t) = \frac{mv_0}{v_0 \beta t + m} \quad (5.65)$$

- (6) 関数 $v(t)$ のグラフを描け：

よくある質問 141 問 92 で、なぜ最初は力 0 なのですか？ 力がないと進まないのでは？ ... 物体は力がなくても動き続けるのです。等速度運動をするのです。それが慣性の法則です。「力がないと物体は進まない」というのは間違いです。思い込みです。止まっている物体を動き出させるためには、確かに最初に力をかけてやる必要がありますが、いったん動き出せば力をかけなくても物体は勝手に動き続けるのです。

よくある質問 142 物体が力を受けなくても等速で動くのなら止まっている物体は力を受けて止まっているのですか？ ... いいえ。「止まっている」も「等速で動く」ことの一種で、働く力は 0 です。

● 問 95 雨粒の落下を考えよう。雨粒は重力を受けて加速しながら落下するが、同時に空気抵抗も受けるので際限なく加速することはあり得ない。また、雨粒が十分小さければ空気抵抗は粘性抵抗とみなすことができる。いま鉛直上向きに座標軸をとる。質量 m の雨粒が鉛直方向に直線的に落下するとし、時刻 t における雨粒の落下速度を $v(t)$ とする。 $v(0) = 0$ とする。雨粒にかかる空気抵抗（粘性抵抗）を $-\alpha v$ とする（ α は適当な正の定数）。注：落下は下向きだから v は負であり、空気抵抗 $-\alpha v$ は v にマイナスがかかっているから正、つまり上向きである。

- (1) 雨粒に関する運動方程式は以下になることを示せ：

$$-mg - \alpha v = m \frac{dv}{dt} \quad (5.66)$$

- (2) これを変数分離すると次式になることを示せ：

$$\frac{dv}{g + \alpha v/m} = -dt \quad (5.67)$$

- (3) これを両辺を積分すると次式になることを示せ（ C

は積分定数）：

$$\frac{m}{\alpha} \ln \left| v + \frac{gm}{\alpha} \right| = -t + C \quad (5.68)$$

- (4) これを v について解き、特に $v(0) = 0$ に注意して、次式を示せ：

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha} \left\{ \exp \left(-\frac{\alpha}{m} t \right) - 1 \right\} \quad (5.69)$$

- (5) $v(t)$ のグラフを描け。

- (6) 時間が十分にたつて速度が一定になったときの速度を終端速度という。この場合、終端速度は

$$v = -\frac{mg}{\alpha} \quad (5.70)$$

となることを示せ。

よくある質問 143 高校の教科書では「球形で変形しない場合、速さが大きくない範囲では抵抗力の大きさは速さに比例する」とあり、雨粒が例に挙げられていたのですが、雨粒は液体なので変形するのではないのでしょうか？ ... おっしゃるとおり雨粒は落下中に変形します。雨粒が大きいほどそれは顕著で、球を潰したような形になります。しかしそれが「抵抗力の大きさは速さに比例する」ことにおよぼす影響がさほど大きくない場合は「雨粒は変形しない」と割り切るのです。それがモデル化です。

よくある質問 144 割り切るって言われても、実際は変形するのにそんなのありですか？ ... あります。物理学を実際の現象に適用する際はよくあることです。現象を細部まで厳密に記述して考慮しようとする、とんでもなく難しくなるのです。多少の誤差は許容して思い切って現象を単純化して割り切ることで物理学の予測能力はむしろ発揮されるのです。精度が良くないなあ、もっと精度上げたいなあ、と思ったらそのように割り切った部分を真面目に考え直すのです。

雨が降るとき、雨粒は地表面に衝撃を与える。地表を植生が覆っていれば、葉やリター（落ち葉等）で雨滴衝撃を吸収してくれるが、地表に植生が無い場合は雨滴衝撃で土壌侵食を起こすことがある。これは農地や、間伐が不十分なスギ・ヒノキ人工林などで問題になっている。

粘性抵抗を受ける落下の問題は、微粒子（穀物の粉とか大気汚染源の粉塵など）の運動を議論する上で基礎的なものだ。また、微粒子の大きさを計測する上でもこの理論がよく利用される。

5.12 運命は決まっているのか? (ラプラスの悪魔)

本章の最後にちょっと哲学っぽいことを考えよう。運動の三法則は、物体の運動を正確に予測することができるということを世界に示した。それは未来を占うのにオカルト的な力が必要だと信じていた人に、ちょっとしたショックを与えただろう。そこで生まれたのが「ラプラスの悪魔」という概念である。

● 問 96 「ラプラスの悪魔」とは何か? それは近代の宗教や思想にどのような影響を与えただろうか? それは物理学的にはどのように反駁(はんぱく)されたか?

演習問題 6 質量 m の質点に、 x 軸の正の方向に $F = Ae^{-kt}$ という力がかかっている。ここで A, k は正の定数であり、 t は時刻。質点の速度 v を t の関数として表せ。ただし初速度を 0 とする。

演習問題 7 ジャンボジェット機(ボーイング B747-400)が、成田空港の幅 60 m の滑走路に、その中心線を目指して着陸しようとしている。あと 5 秒で車輪が滑走路につくというとき、突然横から $v = 10$ m/s の突風が吹いてきた。この飛行機は無事に滑走路内に着陸できるか? 根拠と共に示せ。ただし物体が風から受ける力(慣性抵抗)の大きさ F は $F = \rho v^2 SC_D/2$ と表せることが知られている。ここで ρ は空気の密度であり、 S は風の方向に投影した物体の面積である。 C_D は「抗力係数」とよばれる無次元の数で、物体の形状や風の性質に依存するが、おおよそ 0.5 から 2 程度の値である。また、ジャンボジェットの質量は乗客も含めて約 300 t、ジャンボジェットの胴体は全長 70 m、直径 8 m 程度である。

演習問題 8 (慣性抵抗を受ける落下運動) 君は高い崖の上からパラシュートで降下しようとしている(図 5.2)。君は重力を受けて加速しながら落下するが、同時に空気抵抗も受けるので際限なく加速することはない。また、このような場合、君が受ける空気抵抗は慣性抵抗とみなすことができる。いま鉛直上向きに座標軸をとる。質量 m の君が鉛直方向に直線的に落下するとし、時刻 t における君の落下速度を $v(t)$ とする。君にかかる空気抵抗(慣性抵抗)を βv^2 とする(β は適当な正の定数)。注: 落下は下向きだが空気抵抗は上向き、つまり空気抵抗の符号は正である。

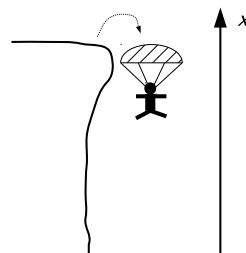


図 5.2 崖からパラシュートで降下する。詳しくは問 8 参照。

- (1) 君に関する運動方程式は以下になることを示せ:

$$-mg + \beta v^2 = m \frac{dv}{dt} \quad (5.71)$$

- (2) 時間が十分にたつと空気抵抗と重力がつりあって速度は一定値になるはずだ。そのとき上の式で $dv/dt = 0$ となる。それを利用して終端速度の大きさ v_∞ は

$$v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{\beta}} \quad (5.72)$$

となることを示せ。(ここでは速度の大きさだけ、つまり速さを考えていることに注意。向きまで考えて速度にしたいならこの式に負号が付く。)

- (3) v_∞ を使うと上の方程式は次式のように書き換えることができることを示せ:

$$m \frac{dv}{dt} = \beta(v^2 - v_\infty^2) \quad (5.73)$$

- (4) これを変数分離して部分分数分解(数学リメディアル教材参照)すると次式になることを示せ:

$$\left(\frac{1}{v - v_\infty} - \frac{1}{v + v_\infty} \right) \frac{dv}{2v_\infty} = \frac{\beta}{m} dt \quad (5.74)$$

- (5) 両辺積分すると次式になることを示せ(ここで C は積分定数)

$$\frac{1}{2v_\infty} \ln \left| \frac{v - v_\infty}{v + v_\infty} \right| = \frac{\beta}{m} t + C \quad (5.75)$$

- (6) 初速度 $v(0)$ を 0 とすると次式のようになることを示し、 $v(t)$ のグラフを描け。

$$v = -v_\infty \tanh\left(v_\infty \frac{\beta}{m} t\right) \quad (5.76)$$

ただし $\tanh x$ は「双曲線関数」とよばれる関数の

一種であり、その定義は

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (5.77)$$

である。 $\tanh$ を「ハイパボリック・タンジェント」とよぶ(「ライブ講義 大学生のための応用数学入門」参照)。

実験2 トイレでロール状のトイレットペーパー(ミシン目の無いもの)を切り取るとき君はどうしているだろうか? 片手で上蓋を押さえて、別の片手でトイレットペーパーの端を引っ張って引きちぎるだろう。ところが上蓋を押さえていなくてもトイレットペーパーを勢いをつけて瞬間的に大きく引けば引きちぎることができる(これは大変便利なスキルである笑)。やってみよう。うまくいったらその理由やうまくいく条件を考えてみよう。(ヒント: 静止しているロールが動き出すには加速度が必要で、運動方程式によればそれは力÷質量である。だから大きな勢い(加速度)で引けば大きな力がかかってひきちぎられるのだ。しかも質量が大きいほど大きな力がかかる。)

実験3 空気抵抗を実感する簡単な実験をしてみよう。適当な本(A4サイズで200~300ページくらいがよい; 大事な本はやめておこう)を用意する。それを水平に持って、その上にティッシュペーパーを載せよう。そして手を話すと本は床に落ちるが、そのときティッシュペーパーはどうなるだろうか? こんどは本無しでティッシュペーパーを落としてみよう。どうなるだろうか? この2つの実験の違いを説明せよ。

実験4 (1) 体重計に乗って、立ち姿勢からしゃがんだり、しゃがみ姿勢から立ち上がったたりしてみよう。体重計の指す値が変わるだろう。どのようなタイミングどのように変わるだろうか? ヒント: 立ち上がる→静止→しゃがみ込む→静止→立ち上がる→...のように、動作と動作の間に数秒間の静止を入れよう。そうすると観察しやすくなる。(2) それを運動の法則で説明してみよう。ヒント: 立ち上がったりしゃがんだりを重心の運動として考える。かかる力は「重力」と「体重計からの垂直抗力」である。(3) (オブション)同様のことを、体重計に乗って行うのではなく、代わりに加速度センサーのアプリの入ったスマホを頭の上に載せて、加速度を記録しながら行ってみよう。 x 方向、 y 方向、 z 方向という3つの方向の加速度がそれぞれ時系列で記録されるだろうが、

上下運動の加速度はどの方向のものかを確認して行うこと。得られた加速度の時系列データのグラフについて特徴を述べ、それを運動の法則で説明せよ。

5.13 解答

答 79 式 (5.22) より、

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t v_x(t) dt = \int_0^t v_0 \exp(kt) dt \\ &= \frac{v_0}{k} \{\exp(kt) - 1\} \end{aligned} \quad (5.78)$$

答 82 (1) A は C の十分条件。必要条件ではない。静止していれば合力はゼロだが、合力がゼロであっても静止していない場合(0 以外の速度での等速度運動)があり得る。(2) B は C の必要条件であり十分条件でもある(必要十分条件)。(3) B は A の必要条件。十分条件ではない。静止は等速度運動の一種(速度 0 での等速度運動)。

答 84 (1) 間違い。「A は B から同じ大きさで逆向きの力を受ける」(2) 正しい。質点が等速度運動をしているとき加速度 a は 0 である。したがって第二法則より、物体にかかる合力 F は 0 である。(3) 直線方向の運動(1次元の運動)に限定すれば正しい。しかし一般には力も加速度もベクトルなので、 F と a のかわりに $\mathbf{F}$ と $\mathbf{a}$ と書かねばならない。

答 86 (1) 式 (2.4) より、質点には鉛直下向きに大きさ mg の重力がかかる。座標系は鉛直上向きを正にとっているので、この重力 F は $F = -mg$ と書ける^{*6}。重力以外の力は働いていない。したがって運動方程式より、 $-mg = ma$ となる。(2) 式 (5.38)、式 (5.39) で、 a_x を $-g$ 、 v_x を v とすれば与式を得る。(3) $x_0 = 0$ 、 $v_0 = 0$ とすればよい。

答 87 初期位置を原点とし、鉛直上向きに x 軸をとる。時刻 t における位置と速度をそれぞれ $x(t)$ 、 $v(t)$ とする。(1) 式 (5.56)、式 (5.57) で $t = 10$ s とすれば、 $v = -98$ m s⁻¹、 $x = -490$ m。したがって落下距離は 490 m。(2) 加速度が $-g$ の等加速度運動なので $v(t) = -gt$ 。したがって $t = -v(t)/g$ 。いま $v(t) = -340$ m s⁻¹ なので、 $t = 340$ m s⁻¹ / (9.8 m s⁻²) = 35 s。したがって約 35 秒後。式 (5.57) で $t = 35$ s とすれば、 $x = -6000$ m。したがって約 6000 m 落下

^{*6} 式 (2.4) は力の向きは考えず力の大きさだけを考えていたことに注意せよ。

する。

答 88 式 (5.55) で, $x_0 = 0$ とすれば

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = -\frac{1}{2} g \left(t^2 - \frac{2v_0}{g} t \right) \quad (5.79)$$

$$= -\frac{1}{2} g \left(t - \frac{v_0}{g} \right)^2 + \frac{v_0^2}{2g} \quad (5.80)$$

したがって $t = v_0/g$ のとき最高高度 $v_0^2/(2g)$ に到達する。ここで $v_0 = 40 \text{ m s}^{-1}$ とすると最高高度は

$$\frac{(40 \text{ m s}^{-1})^2}{2 \times 9.8 \text{ m s}^{-2}} = 82 \text{ m} \quad (5.81)$$

すなわち約 80 m の高さまで届く。(グラフは省略。)

答 90 (1) 手放された後のストーンに働く力は重力と氷面からうける動摩擦力 F_m , そして氷面から受ける垂直抗力である。重力は垂直抗力と打ち消し合う。また摩擦力 F_m は x 軸の逆方向に働く。したがってストーンに働く力の総和 F は $F = -F_m$ となる。加速度を a とすると, 運動方程式は $-F_m = ma$

(2) 前小問より $a = -F_m/m$ となるが, これは時刻によらない一定値。すなわちこれは等加速度運動である。式 (5.38), 式 (5.39) で, a_x を $-F_m/m$, 速度 v_x を v とすれば,

$$v = v_0 - \frac{F_m}{m} t, \quad x = v_0 t - \frac{F_m}{2m} t^2 \quad (5.82)$$

となる。ここで $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$ を用いた。グラフは図 5.3 のようになる。

(3) ストーンが停止した時刻を t , そのときの位置を

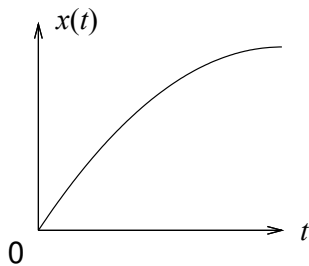


図 5.3 カーリングのストーンの運動。

x とすると, そのとき速度 dx/dt は 0 になるから, 式 (5.82) の第 2 式より

$$0 = -\frac{F_m}{m} t + v_0 \quad (5.83)$$

したがって $t = mv_0/F_m$ 。これを式 (5.82) の第 1 式に代入すると

$$x = \frac{mv_0^2}{2F_m} \quad (5.84)$$

したがって

$$F_m = \frac{mv_0^2}{2x} \quad (5.85)$$

ここで $x = 20 \text{ m}$, $m = 20 \text{ kg}$, $v_0 = 1.5 \text{ m s}^{-1}$ とすれば, $F_m = 1.1 \text{ N}$ 。

(4) クーロンの摩擦法則 (式 (3.13)) より, 動摩擦係数 μ' について

$$F_m = \mu' N \quad (5.86)$$

が成り立つ。ここで N は垂直抗力 (ストーンが氷の接触面から垂直上向きに受ける力) であり, 今の場合は $N = mg$ である。したがって $F_m = \mu' mg$ である。したがって上の結果から $\mu' = F_m/(mg) = 5.7 \times 10^{-3}$ 。(無次元なので単位は不要)

(5) 式 (5.84) より, 停止するまでの距離 x は初速度 v_0 の 2 乗に比例する。 x を 20 m から 25 m にするとき, x は 1.25 倍になるが, そのためには v_0 が $\sqrt{1.25} = 1.12$ 倍になればよい。したがって v_0 は $\sqrt{1.25} \times 1.5 \text{ m s}^{-1} = 1.68 \text{ m s}^{-1}$ 。つまり約 1.7 m s^{-1} にすればよい。

(6) 式 (5.84) と式 (5.86) で F_m を消去し, $F_m = \mu' mg$ を使えば

$$x = \frac{v_0^2}{2\mu'g} \quad (5.87)$$

となる。したがって x は質量に依存しない。したがって 30 kg だろうが何 kg だろうが, 摩擦の条件 (氷の表面状態とストーンの底面材質) が同じなら前小問で求めた初速度 (約 1.7 m s^{-1}) でよい。

よくある質問 145 問 90(6) に驚きました。重い物体が軽い物体と同じ初速度で同じ距離で止まるのですか? ... そうです。不思議ですね。これは力が摩擦力だからです。この場合の摩擦力は重力に比例します。重い物体にはそのぶん, 垂直抗力が大きくなるため, 大きな摩擦力がかかるのです。つまり $F = ma$ の左辺の F が m に比例するため, 右辺の ma の m と打ち消し合って, 結果的に質量の影響は無くなるのです。

答 91 質量を m , 時刻を t , 力を $F(t)$ とする。力は時刻に比例するので

$$F(t) = bt \quad (5.88)$$

と書ける (b は適当な定数)。運動方向に x 軸をとり, 位置を $x(t)$, 速度を $v(t)$, 加速度を $a(t)$ とする。運動方程式より, $F(t) = ma(t)$ 。これに式 (5.88) を代入して変

形すると,

$$a(t) = \frac{bt}{m} \quad (5.89)$$

となる。式 (5.23) のように考えて (a_x, v_x はここでは a, v),

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t) dt \quad (5.90)$$

である。ここで $v(0) = 0$ と式 (5.89) を代入して

$$v(t) = \int_0^t \frac{bt}{m} dt = \frac{bt^2}{2m} \quad (5.91)$$

また, 式 (5.22) のように考えて

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t) dt \quad (5.92)$$

である。ここで $x(0) = 0$ と式 (5.91) を代入して

$$x(t) = \int_0^t \frac{bt^2}{2m} dt = \frac{bt^3}{6m} \quad (5.93)$$

さて式 (5.88) で $t = 2.0$ s のときを考えると, 6.0 N = $b \times 2.0$ s だから $b = 3.0$ N/s。これと $m = 2.0$ kg, $t = 4.0$ s を式 (5.93) に代入すると

$$x(4.0 \text{ s}) = \frac{(3.0 \text{ N/s})(4.0 \text{ s})^3}{6 \times 2.0 \text{ kg}} = 16 \text{ m} \quad (5.94)$$

答 92

- (1) $t < 0$ では等速度運動をしているから, 慣性の法則より, 働く力(の総和)は0である。したがって, 運動方程式より式 (5.58) が成り立つ。
- (2) $0 < t$ ではパラシュートによる空気抵抗 $F = -\alpha v$ がかかる。したがって, 運動方程式より式 (5.59) が成り立つ。
- (3) 式 (5.59) を変数分離すると以下ようになる:

$$-\alpha dt = m \frac{dv}{v} \quad (5.95)$$

この式の両辺を積分すると (C は積分定数)

$$\int -\alpha dt = \int m \frac{dv}{v} \quad (5.96)$$

$$-\alpha t = m \ln |v| + C \quad (5.97)$$

したがって次式のようになる:

$$\begin{aligned} v &= \pm \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t - C\right) \\ &= \pm \exp(-C) \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \end{aligned} \quad (5.98)$$

ここで $t = 0$ のとき $v = v_0$ だから,

$$\pm \exp(-C) = v_0 \quad (5.99)$$

したがって

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \quad (5.100)$$

(4) 図 5.4 のようになる。

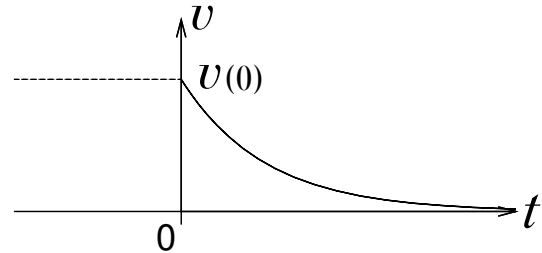


図 5.4 粘性抵抗を受けて減速する物体の運動。

答 94 (1) $0 < t$ ではパラシュートによる空気抵抗 $F = -\beta v^2$ がかかる。したがって, 運動方程式より式 (5.61) が成り立つ。(2), (3) 略。(4) 式 (5.63) で $t = 0$ とすれば $0 = m/v(0) + C$ 。したがって $C = -m/v(0)$ 。(5) 式 (5.64) を式 (5.63) に入れて v についてとけば式 (5.65) が成り立つ。(各自, 計算してみよ) (6) 図 5.5 のようになる。

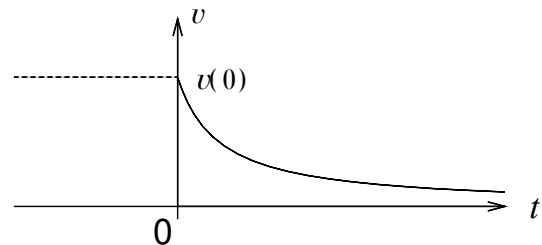


図 5.5 慣性抵抗を受けて減速する物体の運動。

答 95

- (1) 雨粒にかかる力は重力 ($-mg$) と粘性抵抗 ($-\alpha v$) の和。したがって運動方程式より式 (5.66) が成り立つ。
- (2) 式 (5.66) の両辺を m で割ると,

$$-g - \frac{\alpha v}{m} = \frac{dv}{dt} \quad (5.101)$$

両辺に dt をかけ, さらに両辺を $g + \alpha v/m$ で割ると,

$$-dt = \frac{dv}{g + \alpha v/m} \quad (5.102)$$

この左辺と右辺を入れ替えると式 (5.67) を得る。

(3) 式 (5.67) の両辺に積分記号 $\int$ をつける:

$$\int \frac{dv}{g + \alpha v/m} = - \int dt \quad (5.103)$$

この左辺の不定積分は

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{(\alpha/m)(v + gm/\alpha)} &= \frac{m}{\alpha} \int \frac{dv}{v + gm/\alpha} \\ &= \frac{m}{\alpha} \ln \left| v + \frac{gm}{\alpha} \right| + C_1 \end{aligned}$$

となる (C_1 は積分定数)。右辺の不定積分は $-t + C_2$

となる (C_2 は積分定数)。これらをまとめて

$$\frac{m}{\alpha} \ln \left| v + \frac{gm}{\alpha} \right| + C_1 = -t + C_2 \quad (5.104)$$

となる。 C_1 を右辺に移項し、 $C_2 - C_1 = C$ とおけば式 (5.68) を得る。

(4) 式 (5.68) より

$$\ln \left| v + \frac{gm}{\alpha} \right| = -\frac{\alpha}{m}(t - C) \quad (5.105)$$

したがって

$$v + \frac{gm}{\alpha} = \pm \exp \left[-\frac{\alpha}{m}(t - C) \right] \quad (5.106)$$

したがって

$$v = \pm \exp \left[-\frac{\alpha}{m}(t - C) \right] - \frac{gm}{\alpha} \quad (5.107)$$

ここで $t = 0, v = 0$ とおけば

$$0 = \pm \exp \left[\frac{\alpha}{m}C \right] - \frac{gm}{\alpha} \quad (5.108)$$

したがって

$$\pm \exp \left[\frac{\alpha}{m}C \right] = \frac{gm}{\alpha} \quad (5.109)$$

となる (左辺の $\pm$ も含めて右辺のように決まる)。

これを式 (5.107) に代入して

$$v = \frac{gm}{\alpha} \exp \left[-\frac{\alpha}{m}t \right] - \frac{gm}{\alpha} \quad (5.110)$$

これを整理すると式 (5.69) を得る。

(5) 図 5.6 のようになる。

(6) 式 (5.69) において t の ∞ への極限で v は $-mg/\alpha$ に近づく。あるいは終端速度では速度は時間とともに変わらないから、式 (5.66) の右辺を 0 とおけば同じく $v = -mg/\alpha$ を得る。

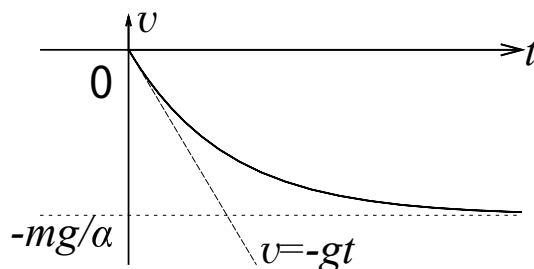


図 5.6 粘性抵抗を受ける落下 (実線の曲線)。 $v = -gt$ は粘性が無い場合 (自由落下)。

よくある質問 146 摩擦のない面に 10 t くらいの物体がのって静止しているとします。摩擦がなければ、この物体を面と平行な方向に動かし始めるには、ほんの少し力をかけてやるだけで良いのでしょうか。イメージできない。... はいそうです。実際、小惑星探査機「はやぶさ」は 500 kg ほどですが、それを動かすイオンエンジンは 1 円玉を持ち上げるくらいの力しかなかったらしいですよ。

よくある質問 147 解答をみるとわかるのですが、一から自分で解答を作り出せません。... 基本から丁寧に理解することが重要で、「一から作り出す」ことにはこだわらなくてよいです。入試の為の勉強ではなく新しいことを学んでいるのですから。

第6章

さまざまな運動

注: この章は三角関数の知識が必要である。

6.1 単振動

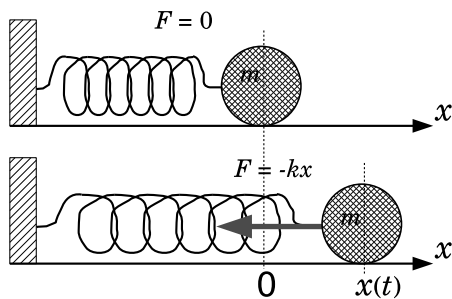


図 6.1 バネにつけられて振動する物体

図 6.1 (上) のように、一端が壁に固定されたバネがあり、もう一端に質量 m の物体 (質点) がとりつけられて床に静止している系を考えよう。バネ定数を k とし、バネ自体の質量は無視する。

この物体を図 6.1 (下) のように少し動かしてから離したり、右か左から指で弾いたりすると、物体は左右に振動し始めるだろう。日常経験に照らせば、この振動運動は次第にゆっくりになり、いずれ止まってしまうと思われるが、それは「物体と床面の間の摩擦」や「空気抵抗」のせいである。ここではそれらを見捨てる状況を考える。つまり今、床は十分につるつるしており、この実験を空気の薄い高地や真空実験室で行うことを想定する。するとこの振動運動は永遠に続くだろう。この運動を物理的に考えよう。

バネが自然長にあるときの物体の位置を原点とし、左右方向に沿って x 軸をとる。バネの伸びる方向を x 軸の正の方向とする。バネはこの図の左右方向にのみ伸び縮みし、物体もこの図の左右方向にしか動かないとする。時刻 t での物体の位置を $x(t)$ とする。

物体の運動を考えるとときはいつでも運動方程式 (5.42) から出発する。運動方程式は質量 m が一定であれば力

のベクトルと加速度のベクトルの関係式だ。したがって運動方程式を考えるということは、 x 方向、 y 方向、 z 方向の各方向について力と加速度の関係を考えるということだ。

ところがいま考えている物体は左右方向しか動かないので上下方向や奥行き方向について運動方程式を考える必要はない*1。そこで左右方向の運動方程式だけを考える: いま、バネが自然長にある状態 (伸びも縮みもない状態) ではバネが物体に及ぼす力は 0 だ (図 6.1 の上図)。このときの物体は原点にある。物体が座標 x にあるときバネの伸びも x なので、フックの法則により物体にはバネから $-kx$ の力がかかる (図 6.1 の下図。 k はバネ定数)。したがって x 方向の運動方程式は以下のようになる:

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (6.1)$$

ただし t は時刻である。式 (6.1) を変形すれば

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (6.2)$$

となる。

この微分方程式 (6.2) を数学的に解けば、関数 $x(t)$ 、すなわち「時刻 t における物体の位置」が得られる。つまり物体の運動が決まるわけだ。ただしそれには大学レベルの数学力*2が必要だ。残念ながら我々の数学の勉強はまだそこまで進んでいない。

*1 とは言うものの、念のため上下方向の運動も考えておこう: 物体に上下方向 (鉛直方向) に働く力は重力 (下向き) と床からの垂直抗力 (上向き) だ。これらは同じ大ききで逆向きだから互いに打ち消しあう。したがって物体に働く上下方向の力 (合力) は 0 だ。したがって、最初、物体が上下方向に動いていなければ慣性の法則に従って物体は床 (高さ 0) にあり続ける。したがって上下方向の加速度は 0 だ。したがって上下方向の運動方程式は $0 = 0$ となるにすぎない。

*2 「二階の線型常微分方程式」の理論。複素関数、行列、テーラー展開などの数学が必要。「ライブ講義 大学生のための応用数学入門」参照。

しかし我々はこの物体が振動運動するということを体験的に知っている。そこでこの物体の運動が次式のように書けると仮定しよう：

$$x(t) = A \cos \omega t \quad (6.3)$$

ここで A と ω は適当な（未知の）正の定数である（それらの意味はすぐ後で説明する）。 ω はギリシア文字の「オメガ」の小文字であり、ダブルユー w ではないことに要注意。この式 (6.3) のグラフは図 6.2 のようになる。いかにも振動してそうなグラフではないか！この振動の

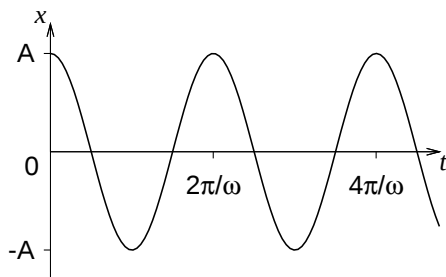


図 6.2 式 (6.3) のグラフ。

最大値は A 、最小値は $-A$ であることが読み取れる（この A は式 (6.3) 中の A である）。つまりグラフは $\pm A$ の間を振動する。この A を振幅という。また、振動は一定時間ごとに同じパターンで繰り返すことも読み取れる。このような繰り返しの時間間隔を周期とよんで、慣習的には T と表すことが多い。グラフから明らかなように

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (6.4)$$

である。そしてこの ω は角速度とか角振動数とよばれる量である。角速度の定義は「単位時間あたりに進む位相」である。位相とは、周期的な現象において周期の中のどのあたりにいるかを角（ラジアン）で表現する量であり、位相が 2π になると元に戻ると約束する。三角関数で表される周期的な現象では三角関数に代入する部分（式 (6.3) で言えば ωt ）が位相であり^{*3}、その部分で t の

^{*3} 位相の厳密な定義：周期が T であるような周期的関数 $f(t)$ について、 $t = t_0$ を基準とすると、

$$\theta := 2\pi(t - t_0)/T \quad (6.5)$$

を（ t における）位相という。式 (6.3) では周期が $2\pi/\omega$ であり、暗黙の内に $t = 0$ を基準とすれば $2\pi(t - 0)/T = 2\pi t / (2\pi/\omega) = \omega t$ が位相である。位相が 2π になると関数は位相 0 に戻るので、 2π 以上の位相は 2π の整数倍を引くことで 0 以上 2π 未満の位相と同一視できる。そこで、式 (6.5) の

比例係数が角速度である^{*4}。

角速度は時間の逆数の次元を持ち、通常、 s^{-1} 、つまり「毎秒」という単位であらわされる。「毎秒」のことを「ヘルツ」とよび、Hz と書くこともある（記憶せよ）。

さて、式 (6.3) が式 (6.2) を満たすのではないかという希望を持って、式 (6.3) を式 (6.2) に代入してみよう。すると式 (6.2) の左辺は

$$-A\omega^2 \cos \omega t \quad (6.7)$$

となり、右辺は

$$-A \frac{k}{m} \cos \omega t \quad (6.8)$$

となる。これらが任意の時刻について一致する（つまり式 (6.2) が恒等的に成り立つ）には、 $A = 0$ か $\omega^2 = k/m$ であればよい^{*5}。

$A = 0$ のときは式 (6.3) が恒等的に 0 となる、つまり物体は原点でじっと静止したままだ。今は振動運動を考えているのでこれは除外しよう。

$\omega^2 = k/m$ のときは

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.9)$$

となる（ A の値はなんでも構わない）。式 (6.9) が成り立てば、式 (6.3) は運動方程式 (6.2) の解になる、つまり「運動の法則」を満たすのだ。したがって式 (6.3) はこの系で実現可能な運動（のひとつ）である。

式 (6.9) が成り立つならば、式 (6.3) 以外にも、以下のような関数もそれぞれ式 (6.2) の解であることは、代入してみれば簡単にわかるだろう：

$$x(t) = A \sin \omega t \quad (6.10)$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (6.11)$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (6.12)$$

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (6.13)$$

（ A, B, ϕ は任意の定数で、各々の式で違ってかまわ

θ から「 2π の整数倍を引くことで 0 以上 2π 未満にした量」を位相と定義する場合もある（その場合、たとえば $\theta = 7\pi$ のときの位相は（ 2π の 2 倍を引いて） π とするのである。

^{*4} たとえば

$$x(t) = 2B \cos(3\alpha t + 1.5) \quad (6.6)$$

のような関数で表される周期的現象（ B, α は 0 以外の実数の定数）では位相（ $t = 0$ を基準とする）は $3\alpha t + 1.5$ 、角速度は 3α である。振幅は $2B$ である。

^{*5} ほかにも $\cos \omega t = 0$ となるときにも式 (6.2) は成り立つが、それは t が特定の値、たとえば $t = \pi/(2\omega)$ や $t = 3\pi/(2\omega)$ などをとるときに限られるので、式 (6.2) が恒等的に成り立つとは言えない。

ない。)

式 (6.2) の解としてこんなに多くの関数があることはわかったが、よく考えると現実の運動は単純な振動運動のはずだから、解としてそんなに多くの可能性は無いはずだ。実はこれらの関数は互いに完全に別物というわけではなく「重複」があるのだ。

実際、たとえば式 (6.13) で $B = 0$ とおけば式 (6.3) になるし、式 (6.13) で $A = 0$ とおいて改めて B を A と置き換えれば式 (6.10) になる。つまり式 (6.3) や式 (6.10) は式 (6.13) の特殊なケースに過ぎない。

また、式 (6.11) において $\phi = \phi' - \pi/2$ とおけば、 $\cos$ の性質*6から

$$x(t) = A \cos\left(\omega t + \phi' - \frac{\pi}{2}\right) = A \sin(\omega t + \phi')$$

となって、 ϕ' を改めて ϕ と置けば式 (6.12) の形になるし、式 (6.12) において、 $\phi = \phi' + \pi/2$ とおけば、 $\sin$ の性質*7から

$$x(t) = A \sin\left(\omega t + \phi' + \frac{\pi}{2}\right) = A \cos(\omega t + \phi')$$

となって、 ϕ' を改めて ϕ と置けば式 (6.11) の形になる。つまり式 (6.11) と式 (6.12) は、同じ関数を違った形で表現しているに過ぎない。

また、式 (6.13) に「三角関数の合成」(数学の教科書を参照せよ)を適用すれば式 (6.12) の形に式変形できるし、逆に式 (6.12) や式 (6.11) に三角関数の加法定理を適用すれば式 (6.13) のように式変形できる。つまり式 (6.11)、式 (6.12)、式 (6.13) の3つは数学的には互いに等価である(もちろん各々で A や ϕ の値は違う)。

式 (6.10) から式 (6.13) のいずれかのように表現できる現象のことを単振動とか調和振動という。

ここで代表的に式 (6.13) に着目し、これで単振動を统一的に表現することを試みよう。まず時刻 $t = 0$ での位置は $x(0)$ なので、式 (6.13) より

$$x(0) = A \quad (6.14)$$

である。また、式 (6.13) を微分すると

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \quad (6.15)$$

である。時刻 $t = 0$ での速度は $x'(0)$ なので

$$x'(0) = B\omega \quad (6.16)$$

である。したがって式 (6.13) は

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{x'(0)}{\omega} \sin \omega t \quad (6.17)$$

となる。この式は図 6.1 のような系で起きるあらゆる振動運動を、初期条件(つまり $x(0)$ と $x'(0)$ の値)だけで統一的に表現する(ただし ω は式 (6.9) を満たさねばならない)。

さて式 (6.2) は式 (6.9) を使うと次式のようにになる:

単振動の微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (6.18)$$

このような方程式で表される現象はどんなものであっても単振動である。その例は「バネについた物体」以外にも以下のように様々である:

- 振り子(振幅が十分に小さいとき)
- コイルとコンデンサーからなる電気回路(電波を受けるアンテナ)
- 安定した大気の中で発生する「プラント・バイサラ振動」
- 大気よりも遥か上空の電離層で起きる「プラズマ振動」

今のところ君はこれらの中身を詳しく知る必要はない。単振動という現象はいろんなところにあるという実感を持ってくれたら、とりあえずそれで十分だ。

● 問 97 図 6.1 のような系で物体の質量を 2 倍にすると角速度は何倍になるか? 振動の周期は何倍になるか?

● 問 98 図 6.1 のような系で、 $t = 0$ で物体を $x = X_0$ の位置に持ってきて静かに(初速度 0 で)離すとどのような運動になるか? その解を書き、そのグラフを描け。ヒント: 式 (6.17)。

● 問 99 図 6.1 のような系で、 $t = 0$ で物体を $x = 0$ の位置のまま指でピンと弾いて初速度 V_0 を与えたらどのような運動になるか? その解を書き、そのグラフを描け。

ここで微分方程式 (6.18) についてもうすこし考えてみよう。これは t に関する二階微分を含む方程式(二階微分方程式)だから、それを解く、つまり微分を含まな

*6 任意の角 θ について $\cos(\theta - \pi/2) = \sin \theta$

*7 任意の角 θ について $\sin(\theta + \pi/2) = \cos \theta$

い形の関数（方程式）を得るには、微分の逆操作である不定積分に相当することを2回やらねばならない。普通、不定積分を1回やると積分定数とよばれる「任意の定数」が1つ現れる。したがって不定積分を2回やると積分定数に相当する「任意の定数」が2つ現れるはずだ。したがって二階微分方程式を解くとその一般解（どんな解もその形式で表されるような解）は任意の定数を2つ含む。微分方程式(6.18)の場合は、それが式(6.13)における A, B である。で、それは(6.17)でわかったように初期条件、つまりある時刻における位置と速度を与えることで具体的に決まる。

もっと一般的に言うと、運動方程式 $F = ma$ は位置（を時刻の関数とみなしたもの） x に関する二階微分方程式なので、その一般解は2つの任意定数を含む。任意定数の値は位置と速度（位置の導関数）に関する初期条件によって定まる^{*8}。

6.2 斜め投げ上げ

これまでではほぼ直線上で起きる運動を考えてきた。しかし運動の法則は平面的な運動や空間的な運動にも成り立つ。といっても難しいことはない。座標系を適切に設定して、 x, y, z の各方向について運動方程式を考えるだけだ。

次のような状況を考えよう：君は平坦な地表のある点から空に向かって斜め方向に質量 m のボールを投げ上げる（図6.3）。空気抵抗は無視し、重力加速度は一様とする。

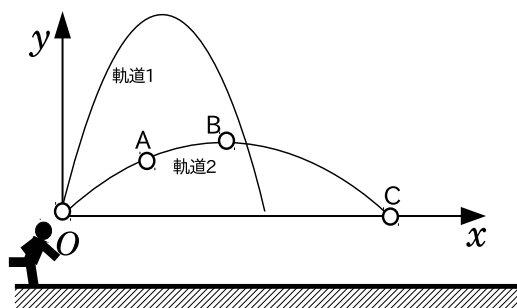


図 6.3 ボールの斜め投げ上げ

よくある質問 148 一様ってなんですか？一定と同じですか？... 似ているけど少し違います。一様は空間内のどの点でも同じということで、一定はどの時刻でも同じということです。

^{*8} このように、初期条件を適切に与えることで微分方程式の解を一意的に定めることを「微分方程式の初期値問題」という。

軌道1のようにかなり上向きに投げ上げたら、高くは上がるものの遠くには飛ばない。軌道2のように若干水平ぎみに投げ上げたら、高くは上がらないがそこそこ遠くに飛ぶ。

● 問 100 軌道2でA, B, Cのそれぞれの位置にボールが来た時を考える。

- (1) 速さが最も大きいのはA, B, Cのうちどの位置のときか？
- (2) A, B, Cの各位置でボールにかかる合力を矢印で図に描き込め。矢印の長さは適当でよいが、複数の矢印どうして長さはつじつまがあっていなければならない（大きい力は長く、小さい力は短く）。
- (3) A, B, Cの各位置でボールの加速度を点線矢印で図に描き込め。矢印の長さは適当でよいが、複数の矢印どうして長さはつじつまがあっていなければならない（大きい加速度は長く、小さい加速度は短く）。
- (4) 加速度の大きさが最も大きいのはA, B, Cのうちどの位置のときか？

● 問 101 どのような角度で投げ上げたら最も遠くまでボールを飛ばせるか考えよう。君の位置を原点 O とし、水平方向に x 軸、鉛直方向に y 軸をとる。時刻を t とし、君がボールを手放した瞬間を $t = 0$ とする。 $t = 0$ のときにボールの速度は x 軸から角 θ の方向で、その大きさは v_0 であったとする。

時刻 t におけるボールの位置と速度をそれぞれ $\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)$ とする。重力加速度を g とする。

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

とする。

- (1) $\mathbf{r}(0) = (0, 0), \mathbf{v}(0) = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$ であることを示せ。
- (2) ボールが手を離れてから地上に落ちるまでのボールの運動方程式は次式のようになることを示せ：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad (6.19)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg \quad (6.20)$$

- (3) 上の微分方程式(6.19), (6.20)を解くと、解はそれぞれ次式のようになることを示せ：

$$x = (v_0 \cos \theta)t \quad (6.21)$$

$$y = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (6.22)$$

- (4) 前問の結果から t を消去して次式を示せ：

$$y = (\tan \theta)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \quad (6.23)$$

- (5) 前問の結果を横軸 x 、縦軸 y のグラフに描け。これがボールの軌跡だ。
 (6) 投げ上げたボールが着地する場所の x 座標を X とする。次式を示せ：

$$X = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad (6.24)$$

- (7) v_0 が一定のとき、投げ上げの角 θ がどのくらいのとき X は最大になるか？

● 問 102 ハンマー投は、ハンマー（ワイヤーの先に質量 7.26 kg の金属球がついたもの）を振り回して投げ上げ、飛ばした距離を競うスポーツである。世界記録は 86.7 m である。投げ上げの角度が前問で求めた角に一致していたと仮定して、世界記録樹立時にハンマーが空中に放たれた瞬間の速さを推定せよ。

よくある質問 149 ボールを真上に投げ上げるといずれ最高到達点に到達して落ちてきますよね。最高到達点ではボールの速度はどうなっているのですか？ ... 速度 0 です。

よくある質問 150 速度 0 ということは止まっているのですか？ 静止状態にある物体に働く合力は 0 だって言っていましたよね。でもボールには下向きの重力がかかっているじゃないですか。矛盾していませんか？ ... 「速度 0」は静止とは限りません。「速度 0」が続く状態が静止です。今、論じている運動は、一瞬だけ速度 0 になりますが、そのすぐ前後は 0 でない速度を持ちますから静止ではありません。

6.3 円運動

質点が円周上を動く運動（円運動）のうち、逆戻りをせず、速さ（速度ではない!!）が一定であるような運動を等速円運動という。世の中には等速円運動はたくさんある。遠心分離機の中の試料は等速円運動をする。太陽のまわりを地球がまわるのはほぼ等速円運動である（厳密にはちょっと違うが）。

よくある質問 151 速さが一定というのと速度が一定というのは同じでは？ ... 違います。既に学んだように「速度」は大きさと向きを持つ量（ベクトル）であり、その「大きさ」だけを切り取った概念が「速さ」です。「速度」が一定だと直線運

動になってしまいます。

どのようなときに等速円運動は実現するのか調べてみよう。とりあえず平面内の等速円運動を考える。 xy 座標系の中で質量 m の質点が、原点を中心とする半径 r の円周上を等速円運動しているとする（図 6.4）。

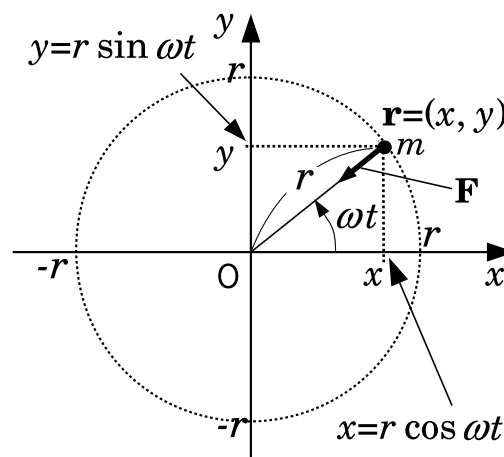


図 6.4 等速円運動

時刻 t における質点の位置、速度、加速度をそれぞれ

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad (6.25)$$

$$\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t)) \quad (6.26)$$

$$\mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t)) \quad (6.27)$$

とし^{*9}、 $t = 0$ で質点は x 軸上の点 $(r, 0)$ にあるとする。
すなわち

$$\mathbf{r}(0) = (x(0), y(0)) = (r, 0) \quad (6.28)$$

である。

- 問 103 (1) 質点が実際にこの円周上を一定の角速度 ω で回転するならば次式が成り立つことを示せ（ヒント：極座標）：

$$\mathbf{r}(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t) \quad (6.29)$$

$$\mathbf{v}(t) = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t) \quad (6.30)$$

$$\mathbf{a}(t) = (-r\omega^2 \cos \omega t, -r\omega^2 \sin \omega t) \quad (6.31)$$

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t) \quad (6.32)$$

- (2) 時刻 t のとき質点に働く力を $\mathbf{F}(t) = (F_x(t), F_y(t))$

^{*9} 前章でも述べたが位置ベクトルは $\mathbf{r}$ と書くことが多い。

とすると、次式が成り立つことを示せ：

$$\mathbf{F}(t) = -m\omega^2 \mathbf{r}(t) \quad (6.33)$$

$$F_x(t) = -mr\omega^2 \cos \omega t \quad (6.34)$$

$$F_y(t) = -mr\omega^2 \sin \omega t \quad (6.35)$$

(3) $F = |\mathbf{F}|$, $v = |\mathbf{v}|$ とする。次式を示せ。

$$F = mr\omega^2 \quad (6.36)$$

$$v = r\omega \quad (6.37)$$

(4) 式 (6.36) は次式のようにもできることを示せ：

$$F = \frac{mv^2}{r} \quad (6.38)$$

(5) 質量と半径はそのまま速度の大きさ v が 2 倍になると力は何倍になるか？

(6) 質量と速度はそのまま半径 r が 1/2 倍になると力は何倍になるか？

等速円運動している物体には式 (6.33) を満たすような何らかの力が働いている必要がある。このように等速円運動を実現する式 (6.33) のような力を向心力という。なぜ「向心」というかといえば、この $\mathbf{F}$ は円運動の中心から質点へのベクトル $\mathbf{r}$ とは真逆の向き、つまり質点から「中心への向き」だからである。

向心力はこれまで出てきた「重力」「電磁気力」「弾性力」「摩擦力」など、特定の起源と結びつけて力を表現する言葉とは違う。向心力は等速円運動を実現するために必要な力という、むしろ「役割」と結びついた言葉である。その役割を務めるのはケースバイケースで重力だったり電磁気力だったりする。

● 問 104 以下の等速円運動(厳密にはそうとは言えないものもあるが、それも近似的に等速円運動とみなす)において向心力となっている力は何か？

- (1) 太陽の周りを地球がまわること。
- (2) 君が糸の先におもりをつけてそれをひゅんひゅんと回すこと。
- (3) 水平の広場で君が自転車を円形に走らせること。
- (4) 君がこどものとき、大人に手首を持ってもらってぐるぐる振り回してもらったときのこと(早く回るほど腕がひっぱられて痛かったことを覚えているだろう)。

● 問 105 車を運転するときになぜカーブの手前で減

速すべきか述べよ。

「向心力」に似た言葉に「遠心力」がある(多くの人は向心力より遠心力の方が馴染み深いだろう)。両者は明確に別々の概念である。「遠心力」は P.90 で学ぶまで不用意に使わないようにしよう。

さて実は、単振動と円運動は密接な関係がある。等速円運動の方程式のひとつである式 (6.32) を考えよう：

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t)$$

この左辺は $d^2 \mathbf{r} / dt^2$ であり、さらに $\mathbf{r} = (x, y)$ とおけば上の式は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (6.39)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 y \quad (6.40)$$

となる。これらは式 (6.18) と同じ形、すなわち単振動の微分方程式だ。したがって等速円運動は 2 つの単振動(x 軸方向と y 軸方向)の組み合わせと考えることができる。実際、等速円運動

$$(x(t), y(t)) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t) \quad (6.41)$$

についてその x 座標だけを取り出した関数

$$x(t) = r \cos \omega t \quad (6.42)$$

は式 (6.3) にそっくりだし、 y 座標だけを取り出した関数

$$y(t) = r \sin \omega t \quad (6.43)$$

は式 (6.10) にそっくりだ。したがって角速度、周期などの概念は円運動と単振動で共通だ。ただし「角速度」の「角」は円運動の場合は幾何学的な意味が直感的にわかりやすい。

● 問 106 ハンマー投の世界記録樹立時(問 102 参照)に投擲者の腕にはどのくらいの力がかかっただろうか？それは何 kg の物体を持ち上げる力に相当するだろうか？回転の半径を 1.5 m と仮定せよ(有効数字 2 桁で十分)。ヒント：式 (6.38)。 m や v の値は問 102 から流用する。

● 問 107 太陽のまわりをまわる地球の円運動を考えよう。地球を質点みなし、地球の公転軌道を半径 r の円とし(厳密には楕円だが)、その中心に太陽があるとし、太陽は動かないとみなす。太陽と地球の質量をそれぞれ M , m とする。万有引力定数を G とする。

(1) この円運動を維持するために地球が太陽から受ける力の大きさを r, ω, m であらわせ。

(2) この力は万有引力によって実現される。このことから次式を示せ。ただし ω は角速度である。

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \quad (6.44)$$

(3) この円運動の周期 T は次式になることを示せ：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \quad (6.45)$$

(4) r, G, M に具体的な数値を代入して ω の値を求め、周期を求めよ。それは何日に相当するか？（計算に必要な数値は各自で調べよ）

● 問 108 以下の宇宙飛行体はそれぞれ何時間で地球のまわりを一周するか？ 地球の半径を 6400 km とし、地球や以下の飛行体を質点とみなす。（ ）内は地表から飛行体への距離である。

- (1) 国際宇宙ステーション（約 400 km）
- (2) 気象衛星ひまわり（約 36000 km）

気象衛星ひまわりは赤道上空の宇宙空間で地球の自転と同じ角速度で地球のまわりをまわっているの、常に地表の同じ場所の雲の様子を時々刻々と観測できる。

よくある質問 152 自然界には円運動だけでなく楕円運動もあるのですか？ もしあるならやはり運動方程式で表せるのですか？ ... はい。惑星の公転は一般には円ではなく楕円であり、やはり運動方程式に従います。特に火星の楕円軌道は「天体は真円運動をする」というオカルト的な中世の思い込みから脱皮してニュートン力学が生まれるための重要な手がかりでした。また、GPS 衛星を補完して測量精度を上げるための「みちびき」という日本の人工衛星（その信号が農地のトラクターの自動運転などで使われている）は、気象衛星ひまわりの近くだけ楕円の軌道を動いています。

よくある質問 153 公式がごちゃごちゃになってしまいます。。... どの式がどの法則から派生するのか、という体系性を意識することが重要。物理学は公式の羅列ではなく法則の体系ですから。

よくある質問 154 そもそも物の動きとか、わかって何が嬉しいのですか？ そういって病気を治す薬とかバイオ燃料を作る微生物とか乾燥に強い植物とかの研究開発に関係あるのでしょうか？ ... そう短絡的に考えてはダメです。薬の働き

方はタンパク質の構造や、それが酸性度や温度でどう変わるかなどで決まります。それを知るには結局は分子を構成する原子の「動き」が大事なのです。微生物の中の生体反応も同じ。植物が水を吸い上げる時は結局は水分子が「どう動くか」が大事ですね。結局科学の本質は「動き」に代表される物理現象に帰着するのです。ここで学んでいるのはそれらの基礎中の基礎です。

よくある質問 155 そんなの屁理屈にしか聞こえませんが ... 屁理屈ではありません。実際、葉の分子の動態を物理学と数学を使って膨大な数の方程式で表してコンピュータで解析することが既に行われています。そうすることで試験管で実験するよりも効率的にたくさんの種類の分子を調べることができるのです。

演習問題 9 以下の問に答えよ。ただし「遠心力」という言葉を使ってはならない（というか本来、使う必要は無いのに使おうとする人が多い... 泣）

- (1) 自転車競技場（競輪場）のトラックのカーブ部分は斜面になっている。その理由を物理学的に説明せよ。
- (2) 飛行機（旅客機）が旋回するとき機体を傾けるということを知っているだろう。飛行機が左に旋回するとき左の翼は上げるか下げるか？ その理由を物理学的に説明せよ。(1) とは違う理由であることに注意！
- (3) 無重力だが空気はあるという環境（国際宇宙ステーションの中など）で紙飛行機を飛ばしたらどのような運動をするか？

6.4 解答

答 97 $\omega = \sqrt{k/m}$ より、質量 m が 2 倍になると角速度 ω は $1/\sqrt{2} \doteq 0.71$ 倍になる（つまり振動はゆっくりになる）。また、周期を T とすると $T = 2\pi/\omega$ だから T は $\sqrt{2} \doteq 1.4$ 倍になる。

答 98 式 (6.17) で $x(0) = X_0, x'(0) = 0$ とすると $x(t) = X_0 \cos \omega t$ 。グラフは図 6.5 のようになる。

答 99 式 (6.17) で $x(0) = 0, x'(0) = V_0$ とすると

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega} \sin \omega t \quad (6.46)$$

となる。グラフは図 6.6 のようになる。

答 100 略。ヒント：飛行中のボールに働く力は重力のみ（空気抵抗は無視している）

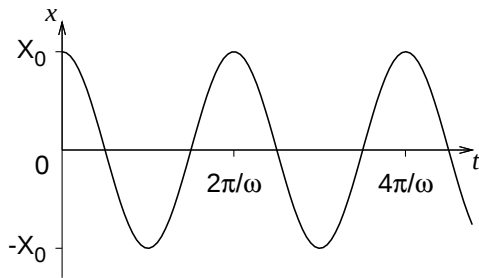


図 6.5 単振動する質点の位置の経時変化

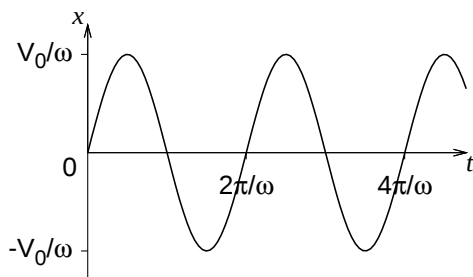


図 6.6 単振動する質点の速度の経時変化

答 101 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $\mathbf{v}(t) = (x'(t), y'(t))$ となることに注意せよ。(1) ボールは時刻 $t = 0$ で原点 (君の位置) にあるから $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$ 。また, $|\mathbf{v}(0)| = v_0$ で, $\mathbf{v}(0)$ が x 軸からなす角が θ であることから, $\mathbf{v}(0) = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$ 。(2) x 方向には力が働かないので式 (6.19) が成り立つ。 y 方向には重力つまり $-mg$ が働くので式 (6.20) が成り立つ。(3) 式 (6.19) を 2 回積分すると $x(t) = C_1 t + C_2$ となる。ここで C_1, C_2 は積分定数。 $x(0) = 0$ より $C_2 = 0$ 。 $x'(0) = v_0 \cos \theta$ より $C_1 = v_0 \cos \theta$ 。したがって $x(t) = (v_0 \cos \theta)t$ 。式 (6.20) を 2 回積分すると $y(t) = -gt^2/2 + C_3 t + C_4$ となる。ここで C_3, C_4 は積分定数。 $y(0) = 0$ より $C_4 = 0$ 。 $y'(0) = v_0 \sin \theta$ より $C_3 = v_0 \sin \theta$ 。したがって $y(t) = (v_0 \sin \theta)t - \frac{gt^2}{2}$ 。(4) 略 (各自計算せよ)。(5) 図 6.7。(6) 略 (式 (6.23) で $y = 0$ となるのは $x = 0$ と式 (6.24)

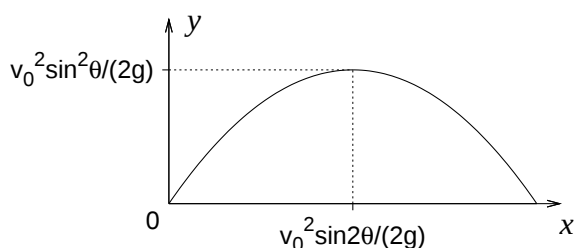


図 6.7 斜めに投げ上げられたボールの軌跡

の場合であり, 前者は投げ上げの瞬間, 後者は着地の瞬間に対応する。 $2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta$ に注意せよ。) (7) 式 (6.24) が最大になるのは $\theta = \pi/4$, つまり 45 度のとき。

答 102 前問より, $\theta = \pi/4$ がハンマー投擲の最適角度。このとき式 (6.24) は $X = v_0^2/g$ となる。したがって $v_0 = \sqrt{gX}$ 。 $X = 86.7 \text{ m}$, $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ とすれば $v_0 = 29.1 \text{ m s}^{-1}$ 。

答 103 (1) 略 (「ライブ講義 大学 1 年生のための数学入門」の極座標の説明を参照。質点は原点から距離 r , x 軸から角 ωt の点にあるから, その極座標を考えて式 (6.29) が成立。速度はそれを t で微分したものであり, 実際に微分をすると式 (6.30) になる。加速度はさらにそれを t で微分したものであり, 式 (6.31) になる。それを式 (6.29) を使って書き直したら式 (6.32) になる。) (2) 略 (運動方程式 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ に式 (6.32) を代入すると式 (6.33)。それを式 (6.31) を使って成分で書き直したらその次の式)。(3) 略 (式 (6.33), 式 (6.30) のそれぞれの大きさを求める)。(4) 略 (式 (6.36) と式 (6.37) で ω を消去)。(5) 式 (6.38) より, 4 倍。(6) 式 (6.38) より, 2 倍。

答 104 (1) 太陽が地球を引っ張る万有引力。(2) 系にかかる張力。(3) 進行方向横向きにかかる, 自転車のタイヤが地面から受ける摩擦力。(4) 腕にかかる張力。

答 105 タイヤは高速で転がっていても接地面では常に地面と噛み合っている。つまり接地面においてはタイヤと地面は互いに静止している。したがってタイヤが地面から受ける摩擦力は静止摩擦力である^{*10}。

さて車がカーブに入ると, その回転運動を実現するにはタイヤが地面から横向きに受ける静止摩擦力が向心力となるが, その大きさは速さの二乗に比例する (式 (6.38))。したがって高速でのカーブには大きな静止摩擦力が要求される。それに静止摩擦力が耐えきれないとタイヤと地面の間で滑り (スリップ) が起き, 摩擦力は静止摩擦力からより小さな動摩擦力に代わるので, 車はカーブを続けることができなくなって道から外れていく。こうなった時点でブレーキを踏んでタイヤの回転を止めても既にタイヤはスリップ中なので摩擦力は動摩擦力 (一定値) のまま変化しない, つまりブレーキは期待ほどには効かず, 減速・停車は難しい。

カーブに入ってから慌てて減速しようと急ブレーキを

^{*10} P.37 例 3.4 参照

踏むとさらに大変なことになる。ブレーキによってタイヤの回転が急に止まるので、タイヤのスリップがより早い段階（カーブに耐えきれなくなるよりも前）で起きてしまう。

そのような事態になっては遅いので、カーブへ進入する前に十分に減速する必要があるのだが、万一、高速でカーブに入ってしまったらタイヤがスリップしない程度のじんわりとしたブレーキで徐々に減速しながら「なんとかカーブを曲がりきれますように」と幸運を祈るしかない。

答 106 投擲者がハンマーを手放す直前までハンマーは回転運動している。その速度を v とすると、式 (6.38) より、 $F = mv^2/r$ の力が投擲者の腕にかかったはずである。問 102 の問題文と結果より、 $m = 7.26 \text{ kg}$, $v = 29.1 \text{ m s}^{-1}$, $r = 1.5 \text{ m}$ とすると、 $F = 4100 \text{ N}$ 。これに相当する重力を受ける物体の質量は、この値を $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ で割って、約 420 kg 。つまり約 420 kg の物体を地上で持ち上げるのに必要な力に相当する。

答 107 (1) 式 (6.36) より $mr\omega^2$ 。(2) 万有引力は GMm/r^2 。したがって $mr\omega^2 = GMm/r^2$ 。これを ω について解けば与式を得る。(3) $T = 2\pi/\omega$ より与式を得る。(4) $G = 6.67408 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$, $M = 1.9891 \times 10^{30} \text{ kg}$, $r = 1.4960 \times 10^{11} \text{ m}$ とすると $\omega = 1.99125 \times 10^{-7} \text{ Hz}$ 。周期は $2\pi/\omega = 3.15539 \times 10^7 \text{ s} = 365.207 \text{ 日} = 365.21 \text{ 日}$ 。注: 実際の公転周期 365.25 日 と少しずれたのは地球は厳密には楕円軌道をしているため。これを補正するには r の値に修正が必要。注: 与えられた数値は有効数字 5 桁であっても途中計算は 1 桁余分にとって行い、最後に 5 桁に丸める。

答 108 式 (6.45) において M を地球の質量とすればよい。(1) $r = 6800 \text{ km}$ とすると $T = 5580 \text{ s} \approx 1.6 \text{ 時間}$ 。(2) $r = 42000 \text{ km}$ とすると $T = 87000 \text{ s} \approx 24 \text{ 時間}$ 。

よくある質問 156 ラプラスの悪魔にびっくりしました。 ... 私若い頃、ラプラスの悪魔を知って自分の人生はもう決まってるのかと一瞬、凹みました。

第7章

慣性系と慣性力

車がカーブするときには搭乗者は回転の外側にひっぱられる力を感じる。エレベーターが動き始めたり止まったりするときに、中にいる人は身体が重くなったり軽くなったり感じる。このような力を慣性力という。慣性力は地球の気象を司る「コリオリ力」の源であり、農業機械の自動運転に欠かせない「慣性計測装置」の原理でもある。この章では慣性力について学ぼう。

7.1 慣性の法則は慣性系の舞台設定

質点の位置 (x, y, z) とは、どこかにある「原点」 $(0, 0, 0)$ と、どちらかに向かう座標軸 (x 軸, y 軸, z 軸) の組み合わせ、つまり座標系を定めることによって初めて定量的に定まる概念だ。つまり座標系が無ければ位置は定まらない。位置の(時刻による)微分が速度であり、速度の(時刻による)微分が加速度なのだから、位置が定まらなければ速度も加速度も定まらない。加速度が定まらねば運動方程式は意味を持たない。すなわち座標系が無ければ運動の法則も無いのだ。

では「座標系」はどのように与えられるのだろうか？たとえばつくば市のどこかの地点を「原点」と定めてそこから東西南北と上下に座標軸を張れば、それはひとつの座標系だが、それ以外にも座標系はあり得る。ハワイやフランクフルトあたりに原点を置くこともできるだろう。あるいはつくばエクスプレスの走行中の快速電車の先頭車両の真ん中に原点を定めて進行方向に x 軸、右方向に y 軸などと定めることもできるだろう。そんなのありか!?と思うかもしれないが、座標系は静止していなくてもよいのだ。そもそも「静止」という考え方が、何か特定の座標系を基準にしたときにのみ成り立つ概念であり、どれかの座標系で見れば静止している質点も別の座標系で見れば動いているということは十分にありえるのだ。

そういうわけで、座標系の与え方には任意性があるし、座標系の与え方によって運動の様子も違って見える。実

は我々がこれまで学んだ「運動の3法則」が成り立つように見えるのは、そのような多種多様な座標系の中でも一部の特別な座標系である。そのような座標系を慣性系という。

よくある質問 157 えっ!? 運動の3法則が成り立たないなんてことがあるのですか!? なら運動の3法則は「基本法則」とは言えないじゃないですか! ... 運動の3法則は「慣性系で考える」ことが前提条件です。慣性系でない座標系で運動の3法則が成り立たないことがあっても、それは運動の3法則が不完全であるとか間違っているとか普遍性に欠けるということではなく、単に前提条件を満たしていないだけです。

よくある質問 158 でも運動の3法則には「慣性系で考えるなら...」みたいな前提条件は無かったように思いますが... いえちゃんと入っていますよ。第1法則つまり「慣性の法則」がそれです。「前提条件」でなく「法則」という形で入っているのを読み取りにくいですけどね。もう少しこの続きを読んでみて下さい。

実は運動の3法則の中でも、慣性の法則が成り立つかどうかは鍵である。つまり

慣性系の定義

「力がつりあっていれば、質点が等速度運動をする」ように見える座標系、つまり慣性の法則が成り立つ座標系を慣性系とよぶ。

後に示すように慣性の法則が成り立たない座標系も存在する。それを非慣性系とよぶ。

慣性の法則は、この世の中にはどこかに慣性系が存在するということを保証する法則なのだ。つまり「力がつりあっていれば、質点が等速度運動をする」ように見える座標系がこの世のどこかに必ず存在するというのが慣性の法則の本当の意味(物理学における位置づけ)なのだ。そしてそういう座標系で見ればあとの2つの法則(運動方程式・作用反作用の法則)も成り立つよ、という

ことを言っているのだ。そのような意味で、慣性の法則は運動の3法則の「舞台」を設定する法則だと言えよう。

7.2 慣性系は複数ある

君は幼いころ「走っている電車の中でジャンプしたら自分が空中にいる間に電車が進むから、自分は電車の後ろのほうに着地するのでは?」と思わなかっただろうか? 実際に試すとそうはならない。等速で走る電車の中では、ジャンプしてもあたかも電車が動いていないときと同じように飛び上がったときと同じ場所に着地する。不思議なことだ。

電車の外にいる人から見れば、君はジャンプする直前まで電車と同じ速度で水平に動いている。そこで君が電車内でジャンプすれば確かに君は電車内の空中に浮くのだが、君の体は単に垂直方向に上がって下がるのではなく同時に水平方向にも動いている。その結果、君の体の軌跡は斜めに投げ上げられたボールと同じように放物線を描く。そして君が着地するとき、電車の床も同じタイミングでそこに来ているというわけだ。

このように電車の中で起きていることも電車の外から見れば違って見えるのだが、それらはそれぞれでつじつまが合っており、いずれも運動方程式で説明できる。電車の中での立場（電車とともに動く座標系）では君の体は鉛直の投げ上げの運動として運動方程式を満たすのであり、電車の外の立場（地面に貼り付いて、動かない座標系）では君の体は斜めの投げ上げの運動として運動方程式を満たすのだ。

このように、ひとつの物理現象が異なる座標系で見れば互いに違って見えるかもしれないが、いずれの見え方も運動方程式を満たすことがある。それはそれぞれの座標が慣性系である場合だ。この例では電車の外の座標系（地面に貼り付いた座標系）と電車の中の座標系（電車の床かどこかに貼り付いた座標系）がそれぞれで慣性系だということだ。

よくある質問 159 えっ!? 慣性系ってひとつじゃないんですか? ... 違います。慣性系はたくさんあります。非慣性系もたくさんあります。

ではどのような座標系が慣性系なのだろうか? 答えを先に言ってしまうと、「ある慣性系に対して、別の座標系が、座標軸の向きを変えぬまま原点が等速度運動をするならば、その座標系も慣性系である」ということが理論

的に証明できる。たとえば地面に貼り付いた座標系は慣性系であり（厳密な意味では違うのだが今はそうだとする）、地面から見て等速度運動をしている電車内に原点と座標軸が貼り付いた座標系は上の条件を満たすので、それも慣性系である。

ではその証明をしよう。まず、ある慣性系 O を考える（その存在は慣性の法則で保証されている）。いま O とは別の座標系 O' が存在し、 O から見て O' の原点は、当初（つまり時刻 $t = 0$ で） (p_x, p_y, p_z) にあり、その後は一定の速度 (u_x, u_y, u_z) で等速度運動をしているとする。すると O' の原点 $(0, 0, 0)$ は、慣性系 O では

$$(p_x + u_x t, p_y + u_y t, p_z + u_z t) \quad (7.1)$$

と表せる。

よくある質問 160 式 (7.1) がよくわかりません... 簡単ですよ。 O' がつくばエクスプレスに乗っており、 O' の原点がその先頭車両の真ん中だとしましょう。つくばエクスプレスが速度 (u_x, u_y, u_z) で等速度運動をしているとき、「先頭車両の真ん中」が時刻 t どこにあるかを表すのが式 (7.1) です。要するに単なる等速度運動の式です。

簡単のため、3つの座標軸は慣性系 O と座標系 O' で互いに同じ向きであるとしよう。

さて、ある質点（質量 m ）の位置が慣性系 O では

$$(x(t), y(t), z(t)) \quad (7.2)$$

とあらわされ、座標系 O' では

$$(X(t), Y(t), Z(t)) \quad (7.3)$$

とあらわされるとしよう。このとき次式が成り立つ:

$$\begin{cases} x(t) = p_x + u_x t + X(t) \\ y(t) = p_y + u_y t + Y(t) \\ z(t) = p_z + u_z t + Z(t) \end{cases} \quad (7.4)$$

よくある質問 161 式 (7.4) がよくわかりません... これも簡単ですよ。さきほどのつくばエクスプレスの例で考えましょう。慣性系の原点は、研究学園駅ホームとしましょう。研究学園駅からつくば駅に向かって走っている快速電車（快速だから時刻 $t = 0$ で研究学園駅を減速せずに素通りした!）の中ほどの座席に座っている A 君の位置は、座標系 O' すなわち電車に貼り付いた座標系で見れば $(X(t), Y(t), Z(t))$ だとしましょう。A 君が同じ座席にずっと座っているならば、 $(X(t), Y(t), Z(t))$ は t によらない一定のベクトルですが、せっかちな A 君はつくば駅につく前に少しでも改札口に近い方に移動しようとして車内を歩きはじめるかもしれません。

そのときは $(X(t), Y(t), Z(t))$ は t とともに変わっていきます。いずれにせよ A 君の位置を電車の外の世界に貼り付いた座標系 O （たとえば研究学園駅のホームを原点とするような座標系）で表すと $(x(t), y(t), z(t))$ となるとしたら、それは列車自体の位置と車内での A 君の位置の合成（ベクトルとしての和）です。前者は式 (7.1) であり、後者は式 (7.3) です。その和が式 (7.4) です。

式 (7.4) の各式の両辺を t で 2 階微分すれば

$$\begin{cases} x''(t) = X''(t) \\ y''(t) = Y''(t) \\ z''(t) = Z''(t) \end{cases} \quad (7.5)$$

となる（ p_x や $u_x t$ などは t で 2 階微分すると 0 になって消える）。つまり慣性系 O と座標系 O' では、位置や速度が違って見えても加速度は同じに見える。

さて O は慣性系だから運動方程式が成り立つ：

$$\begin{cases} F_x = mx''(t) \\ F_y = my''(t) \\ F_z = mz''(t) \end{cases} \quad (7.6)$$

ここで (F_x, F_y, F_z) は質点にかかる力である。ところが式 (7.6) は式 (7.5) によって

$$\begin{cases} F_x = mX''(t) \\ F_y = mY''(t) \\ F_z = mZ''(t) \end{cases} \quad (7.7)$$

とできる。つまり座標系 O' でも運動方程式は成り立つ。運動方程式が成り立てば、力が 0 のときに加速度は 0 だから速度は一定（等速度運動）となるので慣性の法則が成り立つ。したがって座標系 O' も慣性系である！

7.3 非慣性系は「慣性力」を導入して扱う

では非慣性系はどのようなものだろうか？ それは慣性系に対して加速度運動をする座標系である。例として、ある慣性系 O に対して座標系 O'' が座標軸の向きは変えずに原点が等加速度運動をするときを考えよう。簡単のため、時刻 $t = 0$ で座標系 O'' の原点は慣性系 O の原点に一致しており、速度も 0 だったとしよう。その場合、時刻 t での座標系 O'' の原点 $(0, 0, 0)$ は慣性系 O では

$$\left(\frac{a_x t^2}{2}, \frac{a_y t^2}{2}, \frac{a_z t^2}{2} \right) \quad (7.8)$$

と表せる（式 (5.41) より）。ここで (a_x, a_y, a_z) は座標系 O'' の原点の、慣性系 O からみた加速度である。ま

た、簡単のため 3 つの座標軸は慣性系 O と座標系 O'' で互いに同じ向きであるとしよう。

さてある質点（質量を m とする）の位置が慣性系 O で

$$(x(t), y(t), z(t)) \quad (7.9)$$

とあらわされ、座標系 O'' において

$$(X(t), Y(t), Z(t)) \quad (7.10)$$

とあらわされるとしよう。このとき

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a_x t^2}{2} + X(t) \\ y(t) = \frac{a_y t^2}{2} + Y(t) \\ z(t) = \frac{a_z t^2}{2} + Z(t) \end{cases} \quad (7.11)$$

となる。この各式の両辺を二階微分すれば

$$\begin{cases} x''(t) = a_x + X''(t) \\ y''(t) = a_y + Y''(t) \\ z''(t) = a_z + Z''(t) \end{cases} \quad (7.12)$$

となる。さて O は慣性系だから運動方程式が成り立つ：

$$\begin{cases} F_x = mx''(t) \\ F_y = my''(t) \\ F_z = mz''(t) \end{cases} \quad (7.13)$$

ここで (F_x, F_y, F_z) は質点にかかる力である。ところが式 (7.13) は式 (7.12) によって

$$\begin{cases} F_x = mX''(t) + ma_x \\ F_y = mY''(t) + ma_y \\ F_z = mZ''(t) + ma_z \end{cases} \quad (7.14)$$

となる。これを变形すると

$$\begin{cases} F_x - ma_x = mX''(t) \\ F_y - ma_y = mY''(t) \\ F_z - ma_z = mZ''(t) \end{cases} \quad (7.15)$$

となる。このように座標系 O'' では、運動方程式は左辺に本来の力以外の項（ $-ma_x$ など）が生じる。したがって、たとえ力が 0 であっても、座標系 O'' からみた質点は加速度を持つ運動（つまり等速度でない運動）をするように見える。したがって慣性の法則が成り立たない。したがって座標系 O'' は非慣性系である。

ところがここで

$$(-ma_x, -ma_y, -ma_z) \quad (7.16)$$

も一種の力であると解釈し、

$$(F_x - ma_x, F_y - ma_y, F_z - ma_z) \quad (7.17)$$

を合力であると考えてしまえば、式 (7.15) は見掛け上は運動方程式になる。この式 (7.16) はもともと何かが質点に働きかけて実現した力でなく、非慣性系 O'' でも運動方程式が成り立つようにみせかけるために形式的・仮想的に導入された力（のようなもの）だ。このように、非慣性系において運動方程式が成り立つようにみせかけるために付け加わる仮想的な力を慣性力とよぶ。

たとえば電車が駅に近づいて減速を始めたとする。そのときに君がジャンプすると君は電車の前のほうに飛んでいくだろう。ジャンプしなくても君は減速する電車の中では前方にひっぱられる力を感じる。あるいは加速する電車の中では後ろに引かれる力を感じる。これらは慣性力の例である。

このようなことを考えていれば、ただ「電車に乗る」という行為が物理学の実験に早変わりするのだ。

よくある質問 162 要するに非慣性系でも慣性力を考えれば運動の3法則が成り立つってことですか？ ... 慣性力も「力」のひとつとしてみとめてしまえば運動方程式は成り立ちます。したがって合力（慣性力も含めて）が0のときは加速度も0になるので等速度運動になる、つまり慣性の法則も成り立ちます。でも作用反作用の法則が微妙です。慣性力には反作用が無い（「相手」がない）のです。どういうことが考えてみたらわかるでしょう！

● 問 109 日本の H2A 宇宙ロケットは打ち上げ後、約 100 秒間で高度約 50 km に到達する。

- (1) このロケットの運動を等加速度直線運動とみなして加速度を求めよ。
- (2) このロケット内の物体にはどのような慣性力がどのくらいかかるか？ それは重力の何倍か？

よくある質問 163 トランポリンの上も無重力らしいですが ... よく知ってますね。それは下りのエレベーターが動き始めたときに、中にいる人が自分の体がふっと軽くなるように感じると同じです。トランポリンで跳ねた後に上空に浮かんでいる人は、重力に引かれて下向きに加速しているのですが、当人にとってはそれは上向きに引っ張られる力のように感じます。これが慣性力です。それが重力を（見掛け上）打ち消して無重力状態のように感じさせるのです。

よくある質問 164 宇宙ステーションから星出さんがロシアの宇宙船ソユーズで地球に帰ってきたとき自分の体重の5倍

の力が体にかかったそうです。いったい体重の5倍の力が加わったら身体はどうなってしまうのでしょうか？ ... 下りのエレベーターが停止する直前に、乗ってる人は体重が大きくなったように感じますね。あれの激しい場合がソユーズの着陸です。ソユーズは着地の寸前にロケットを点火して、強い上向きの加速度をかけて減速します。ソユーズの中で直立していると、まさに体重の5倍に相当する力が足にかかるわけなので、60 kgの人が地上で240 kgの物体を持ち上げているのと同じ状態です。その過酷さを和らげるために寝た姿勢で降りてくるわけです。寝ていれば、たとえば後頭部（枕）にかかる力は頭の重さの5倍程度なのでせいぜい数10 kgf であり耐えられないほどではありません。お腹は... メタボな人にはつらいかも。

7.4 回転する座標系の慣性力：遠心力とコリオリ力

回転する座標系における慣性力を考えよう。いま質量 m の質点が平面内で運動している。平面内に、ある慣性系 O をとる。 O では質点の位置と質点にかかる力はそれぞれ

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad (7.18)$$

$$\mathbf{f}(t) = (f_x(t), f_y(t)) \quad (7.19)$$

とあらわされたとする（ t は時刻）。この慣性系 O の x 軸と y 軸をそれぞれ実軸・虚軸とするような複素平面を考え、 $\mathbf{r}$ と $\mathbf{f}$ をそれぞれ複素数で表現しよう。といっても難しいことではなく、ベクトルの x 成分を実部、 y 成分を虚部とするような複素数を考えるだけだ。このときベクトル $\mathbf{r}(t)$ に対応する複素数を $r(t)$ 、ベクトル $\mathbf{f}(t)$ に対応する複素数を $f(t)$ と書くと次式が成り立つ：

$$r(t) = x(t) + iy(t) \quad (7.20)$$

$$f(t) = f_x(t) + if_y(t) \quad (7.21)$$

複素数はこのように（2次元の）ベクトルを代替することができる。なぜわざわざ複素数を考えるかという、それが以後の計算を楽にしてくれるからだ。

さて O は慣性系なので運動方程式が成り立つ。すなわち $\mathbf{f}(t) = m\mathbf{r}''(t)$ である。成分で書くと

$$\begin{cases} f_x(t) = mx''(t) \\ f_y(t) = my''(t) \end{cases} \quad (7.22)$$

である。複素数で書くと

$$f(t) = mr''(t) \quad (7.23)$$

である。ここで $r''(t)$ は $r(t)$ の実部と虚部をそれぞれ

れ時刻で 2 階微分してできる複素数であり, すなわち $r''(t) = x''(t) + iy''(t)$ である。

さて慣性系 O に対して, 座標原点は同じだが角速度 ω で x 軸から y 軸に向かって回転する座標系 O' を考える。時刻 $t = 0$ で O と O' の座標軸は一致していたとする。すると時刻 t での O と O' の配置は図 7.1 のようになる (その上で質点の座標がそれぞれでどう表されるかも書いてある)。

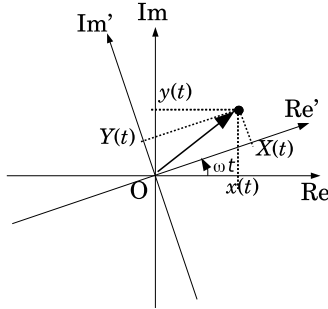


図 7.1 慣性系 O と, それに対して回転する座標系 O' 。複素平面で表現する。傾いているのが座標系 O' 。 O の実軸・虚軸をそれぞれ Re , Im とし, O' の実軸・虚軸をそれぞれ Re' , Im' とする。

さて座標系 O' において質点の位置と質点にかかる力はそれぞれ

$$\mathbf{R}(t) = (X(t), Y(t)) \quad (7.24)$$

$$\mathbf{F}(t) = (F_X(t), F_Y(t)) \quad (7.25)$$

と表されたとする。慣性系 O について考えたときと同様に, 座標系 O' でのベクトル $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{F}(t)$ にそれぞれ対応する複素数 $R(t)$, $F(t)$ を考える。すなわち

$$R(t) = X(t) + iY(t) \quad (7.26)$$

$$F(t) = F_X(t) + iF_Y(t) \quad (7.27)$$

とする。ここで $r(t)$ と $R(t)$ の関係を求めよう。 O と O' を別々に描くと図 7.2 のようになる。互いに比べやすいように O と O' の座標軸 (実軸と虚軸) が互いに平行になるように描いた。両方に描かれた矢印は図 7.1 ではもともと同一質点の位置を表す矢印だったものである。ところが座標軸が互いに傾いていたために, 座標軸の向きを揃えると矢印どうしが傾いて見える。つまり O' (右図) での矢印 (複素数 $R(t)$) を左まわりに ωt だけ回転したものが O (左図) での矢印 (複素数 $r(t)$) になる。この回転は複素数では $e^{i\omega t}$ を掛けることに相当する (ライブ講義 大学 1 年生のための数学入門, 問 217(1) 参照)。

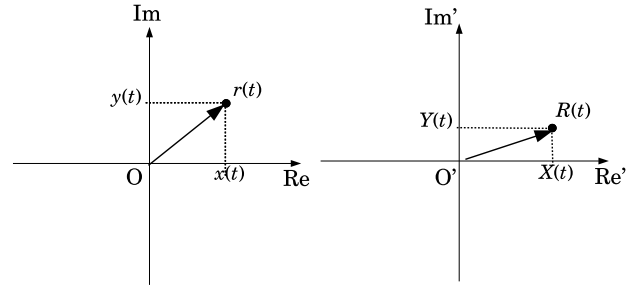


図 7.2 図 7.1 を別々の座標系に分けて描き直したもの。

したがって次式が成り立つ ($f(t)$ と $F(t)$ の関係も同様に考えればよい) :

$$r(t) = R(t)e^{i\omega t} \quad (7.28)$$

$$f(t) = F(t)e^{i\omega t} \quad (7.29)$$

さて式 (7.28) の両辺を t で微分すると

$$r'(t) = R'(t)e^{i\omega t} + i\omega R(t)e^{i\omega t} \quad (7.30)$$

となる。もういちど両辺を t で微分すると

$$r''(t) = R''(t)e^{i\omega t} + 2i\omega R'(t)e^{i\omega t} - \omega^2 R(t)e^{i\omega t} \quad (7.31)$$

となる。両辺に m をかけると

$$mr''(t) = mR''(t)e^{i\omega t} + 2im\omega R'(t)e^{i\omega t} - m\omega^2 R(t)e^{i\omega t} \quad (7.32)$$

$f(t) = mr''(t)$ に注意すると

$$f(t) = mR''(t)e^{i\omega t} + 2im\omega R'(t)e^{i\omega t} - m\omega^2 R(t)e^{i\omega t} \quad (7.33)$$

となる。式 (7.29) に注意すると

$$F(t)e^{i\omega t} = mR''(t)e^{i\omega t} + 2im\omega R'(t)e^{i\omega t} - m\omega^2 R(t)e^{i\omega t} \quad (7.34)$$

となる。両辺の全ての項に $e^{-i\omega t}$ が掛かっているのをこれを約分する (つまり両辺に $e^{-i\omega t}$ をかける) と

$$F(t) = mR''(t) + 2im\omega R'(t) - m\omega^2 R(t) \quad (7.35)$$

となる。右辺の第 2 項と第 3 項を左辺に移せば

$$F(t) - 2im\omega R'(t) + m\omega^2 R(t) = mR''(t) \quad (7.36)$$

となる。この式は座標系 O' でも成り立つ「運動方程式に似たような式」である。ここで

$$-2im\omega R'(t) + m\omega^2 R(t) \quad (7.37)$$

を慣性力として考えよう。式 (7.37) の最初の項

$$-2im\omega R'(t) \quad (7.38)$$

は、 $R'(t)$ つまり座標系 O' での速度に $-i$ がかかっている。複素平面で $-i$ をかけるということは、 y 軸から x 軸に向かう向き（「慣性系 O からみた座標系 O' の回転の方向」の逆向き）に 90 度回転することに相当する。つまりこの慣性力は速度に対して直角にかかる。またその大きさは速度と角速度 ω に比例する。このような慣性力をコリオリ力とよぶ。

式 (7.37) の 2 番目の項

$$m\omega^2 R(t) \quad (7.39)$$

は、 $R(t)$ つまり座標系 O' での位置と、角速度 ω の 2 乗にそれぞれ比例し、 $R(t)$ と同じ向き（原点から離れる方向）にかかる。このような慣性力を遠心力とよぶ。

● 問 110 慣性系 O に対して一定の角速度 ω で回転する座標系 O' において生じる慣性力を導出し、それぞれがどうよばれるかを述べよ（上の議論を再現すれば OK）。

● 問 111 北極点付近の上空を速さ v で飛ぶ質量 m の飛行機 P を考える。地球の自転の角速度を ω とする。

- (1) P にかかるコリオリ力の大きさを m, ω, v で表せ。
- (2) P にかかるコリオリ力は重力の約何倍か？ ただし $v = 1000 \text{ km h}^{-1}$ とする。
- (3) P はまっすぐ飛んだつもりでもその軌跡はコリオリ力によって横方向にずれる。1 時間の飛行によってどのくらい横にずれるか？

● 問 112 化学や生物学では液体試料の中に懸濁または混合した物質を取り出すために遠心分離機というものをよく使う。以下の問題でわからない用語はインターネット等で調べよ。回転半径 r 、単位時間あたりの回転数が f の遠心分離器がある。この遠心分離器で試料溶液中の懸濁物を沈降させようと思う。

- (1) この遠心分離機の中で振り回される遠沈管のひとつに着目し、それと一緒に動く座標系を考える。この座標系の回転する角速度（それは遠心分離機の回転と同じ角速度）を ω とする。 ω を f を使って表わせ。
- (2) 遠沈管の中の試料の中に質量 m の微粒子が懸濁しているとする。この微粒子にかかる遠心力の大きさをここまで出てきた量（記号）で表わせ。
- (3) この微粒子にかかる遠心力の大きさは、この試料が

遠心分離機の外で静置されているとしたときにこの微粒子にかかる重力の大きさの何倍か？ 重力加速度 g などを用いて表わせ。

- (4) 回転半径 $r = 15 \text{ cm}$ 、単位時間あたりの回転数 $f = 4000 \text{ rpm}$ の遠心分離器がある（rpm は rotation per minute、すなわち 1 分間あたりの回転数）。この遠心分離器で試料溶液中の懸濁物を沈降させようと思う。このとき遠心分離器なしで地上の重力にまかせて 3.0 日かかる沈降は、この遠心分離器を使うとどのくらいの時間に短縮できるか？ ただし沈降時の粒子にかかる抵抗力は沈降速度に比例するとする。沈降速度は終端速度とみなして一定と考えてよい。沈降速度は小さいのでコリオリ力（それは速度に比例する）は無視してよい。

● 問 113 慣性計測装置 (IMU) とは何かを述べ、その利用例（農業機械やゲーム機など）を調べ、その仕組みをわかりやすく自分の言葉で説明せよ。

● 問 114 台風について考える。

- (1) 北半球の台風の渦はどのような向きに巻いているか？ それはなぜか？
- (2) 北半球では台風の進行方向を向いて右側（多くの場合は東側）は左側より風が強いことが多い。なぜか？
- (3) 1991 年の台風 19 号は九州に大規模な倒木被害をもたらした。青森では収穫前のリンゴの多くが落果した。このような大きな被害をもたらした背景をこの台風の進路や勢力で説明せよ。
- (4) 台風は熱帯地方で発生するが、奇妙なことに熱帯のど真ん中である赤道付近では台風は発生しない。なぜか？ という問に、ある学生は「赤道ではコリオリ力が働かないから」と答えた。それに対して教師は「赤道だって地球の一部だ。地球は回転しているのだから赤道でもコリオリ力は働くよね」と指摘した。それをふまえて君はこの問にどう答えるか？

● 問 115 以下について説明せよ。

- (1) 国際宇宙ステーションの中が「無重力」なのはなぜか？
- (2) 人工衛星が地球に落ちてこないのはなぜか？

ここで注意。君は「遠心力」という言葉を不用意に使っていないだろうか？ たとえば問 115(2) で人工衛星が地球に落ちてこないのは「万有引力と遠心力が釣り

合ってるから」だと思っていないだろうか？

これはなんとなく「それっぽい」説明だが間違っている。というのも、慣性の法則によると、もし力どうしが打ち消し合うなら物体は等速度運動をするはずであり、したがって人工衛星は地球のまわりを周らずにずっと飛んでいくはずである。つまり人工衛星が地球のまわりを周るならば、人工衛星にかかる力が「釣り合」ったり「打ち消し合」ってゼロになってはならないのだ。正しくは「万有引力が人工衛星の軌道をカーブさせる横方向の加速度を生むため」とか「万有引力が回転運動の向心力となるため」である。

「遠心力」は回転する座標系に「乗ったもの」に働く「見かけの力」(慣性力)である。問 115(1) で人工衛星内で宇宙飛行士が重力を感じないのは、確かに遠心力と万有引力が打ち消し合うからである。しかしそれと人工衛星が円運動をすること(人工衛星が落ちてこないこと)は別である。人工衛星の円運動を論ずる座標系はそもそも回転していないのだから、その議論に遠心力を持ち出すのは筋が悪い考え方である。

よくある質問 165 でも人工衛星とともに動く座標系では、人工衛星に働く遠心力と万有引力が釣り合っていますよね。だから落ちてこないと言ってもよいのでは? ... その「力の釣り合い」は何も説明していません。というのもどんな運動であっても、運動する物体にぴったり付き添って動く座標系で見ればその物体はその座標系の中で静止しているので、その物体に働く力は慣性力も含めて必然的に釣り合っています。たとえば地球に向かって自由落下中の人工衛星を考えてみましょう。その人工衛星と一緒に動く座標系では、人工衛星には落下運動の加速度とは逆向きの慣性力が働き、それと万有引力は釣り合っています(だから自由落下する人工衛星や飛行機の中は「無重力」になります)。あなたのロジックはこの例と同じです。でもこの例では人工衛星は落ちてきていますよ!!

演習問題 10 つくばエクスプレスのつくば行き快速電車はつくば駅の 1.0 km 手前から減速し、つくば駅で停車する。減速直前の列車の速度を $v = 100 \text{ km/h}$ とする。減速中の車内で列車後尾に向かって歩く人は、まるで坂道を登っているかのような負荷を感じる。それは傾斜何度程度の坂道に相当するか? 列車は加速度 a の等加速度直線運動をするものとみなしてよい。

演習問題 11 夜間や霧の中などで外の景色がほとんどわからない状態では、操縦士はどちらが上なのかわから

なくなってしまうことがあるらしい(空間識失調)。それは慣性力とどのような関係があるだろう?

7.5 解答

答 109 (1) 一定加速度を a とする。打ち上げの瞬間を時刻 0 とする。時刻 t までの飛距離 x は $x = at^2/2$ 。したがって $a = 2x/t^2$ 。これに $t = 100 \text{ s}$, $x = 50000 \text{ m}$ を代入すると $a = 10 \text{ m s}^{-2}$ 。注意: 実際はロケットの運動は等加速度運動ではない。その理由のひとつは燃料消費に伴って質量が刻々と減っていくことである。(2) 質量を m とすると慣性力は ma 。一方、重力は mg 。両者を比較すると $a = 10 \text{ m s}^{-2}$ と g はほとんど同じなので、慣性力は(地上付近での)重力にほぼ等しい。ただしこの慣性力は加速方向(上向き)とは逆方向(下向き)にかかるので重力と慣性力の合力は重力の約 2 倍(下向き)となる。

答 111 (1) 式 (7.37) の第 1 項より、飛行機にかかるコリオリ力の大きさは $2m\omega v$ 。(2) 地球の自転の周期を T とすると角速度は

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.14}{60 \times 60 \times 24 \text{ s}} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

一方、 $v = 1000 \text{ km h}^{-1}$ を換算すると $v = 278 \text{ m s}^{-1}$ 。したがって

$$2\omega v = 2 \times 7.27 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1} \times 278 \text{ m s}^{-1} = 0.0404 \text{ m s}^{-2}$$

これは重力加速度の約 0.004 倍。(3) 本来は円運動になるはずだが、横方向の等加速度運動として近似すると(加速度 a は (2) で求めた値) 時間 $t = 3600 \text{ s}$ の間に横方向の移動距離は $at^2/2$ になるから

$$\frac{0.0404 \text{ m s}^{-2} \times (3600 \text{ s})^2}{2} = 2.6 \times 10^5 \text{ m}$$

すなわち約 260 km。

答 112 (1) 1 回転は角にすると 2π ラジアンだから、単位時間あたりに進む角(角速度)は単位時間あたりの回転数の 2π 倍。したがって $\omega = 2\pi f$ 。(2) 式 (7.39) より $m\omega^2 r = 4\pi^2 m r f^2$ 。(3) 遠心分離機の外で静置されているとしたときにこの微粒子にかかる重力の大きさは mg 。したがって $4\pi^2 m r f^2 / (mg) = 4\pi^2 r f^2 / g$ 。(4) 略。10 秒から 1000 秒の間の値になるはず。

よくある質問 166 物体の運動をここまで数式で予測できる

なんて凄いです、実際に自分では思いつける気がしません。やはり私に物理は無理って感じです... 大丈夫。ここまで物理学が発展するのに何千年間もかかったのです。20歳くらいの若者がすぐに理解したり思いつけるようなものではありません。先人の業績をもとに真理を謙虚に学べばそれでよいのです。

よくある質問 167 物理が意外にいろんなことに潜んでいてしかも結構強いということを知り、驚きました... 物理学はコンクリート製の建物の壁の中に埋められた鉄骨のようなものです。普段はその存在は見えないし、意識されることもありません。しかしその建物を地震や強風、洪水や津波が襲ったとき、最後に頼りになるのがそれらであるように、順風満帆で「普段通り」が続く日常では物理学をことさら意識しないでもなんとかなるけど、何か困った時やなんとかしなければならぬときに物理は頼りになるのです。

コラム: 問題を解くコツ

物理学の問題を解くにはいくつかのコツがある。

1. 値の代入は最後にやる!

既に述べたが、答えを数値で求める問題も、できるだけぎりぎりまで数値ではなく文字の式変形で攻めよう。そして求めたい量を既知の量で表す式が求まった段階で既知の量の数値を代入して一気にまとめて数値計算をするのである。最初や途中から数値を代入してしまうと式変形と数値計算が混在してしまい、ミスを起こしやすく、ミスを見つけにくくなる。一方、最後にまとめて計算すれば約分の組み合わせがたかさんできるので計算が効率よく正確にできる。

2. ベクトルかスカラーかを考える。

今扱っている量がベクトル(向きを持つ量)なのかスカラー(向きは持たず、大きさだけを持つ量)なのかを意識しよう。速度、加速度、力、運動量はベクトル。エネルギー、仕事、質量はスカラー。ベクトル=スカラーみたいな等式(方程式)は絶対に成り立たない。そんな変な式を立てていないかチェックしよう。そのためにベクトルは太字で書くことを徹底しよう。

3. 次元をチェック!

式変形の途中や最終結果の次元をチェックしよう。たとえば運動方程式を解いて質点の速度 v に関する式を

得たら、それが速度の次元を持っているかをチェックする。 $v = \exp(-\alpha t/m) - mg$ のような式を見たら一瞬で「これは違う!」と気づかなければならない($\exp$ は必ず無次元である... わからない人は「大学1年生のための数学入門」を見よう!)。次元をチェックしていれば単位を忘れるということはありません。

4. 初期条件をチェック!

運動方程式を解く場合は、たいてい初期条件が与えられている。式変形の最後に得た式に $t = 0$ を入れてみよう。それが初期条件が満たすかどうかをチェックしよう。

5. $t \rightarrow \infty$ をチェック!

与えられた問題は、時間が十分たてばどうなるかが常識的にわかることがある。たとえば摩擦を受けて運動する物体はいずれ止まったり一定速度に落ち着いたりすることが多い。運動方程式を解いて得た式で時刻 t を ∞ にしてみても実際にそうなるかどうかを確認しよう。

6. $x = 0$ や $t = 0$ のまわりで線型近似!

方程式を解いて得た式について、0のまわりで線型近似してみよう。それは多くの場合、得た式よりもシンプルになり、直感的に解釈しやすい。たとえば空気抵抗つきの自由落下の問題では $t = 0$ のまわりでの線型近似は $v = -gt$ のように簡単な式になる。それが君の物理的直感に整合するかを考えよう。

7. 保存則をチェック!

力学の問題は運動方程式を解くのが正攻法だが、それを迂回するのが「保存則」である。条件設定によって、保存する量とそうでない量がある。保存量があればそれに着目して問題を考えるとシンプルに解けることが多い。運動方程式を立てたり解いたりする前に保存則が使えないかを考えよう。

第8章

力学的エネルギー保存則(1)

運動の3法則、特に運動方程式を使えば、原理的にはどんな物体のどんな運動も予測できる。しかし現実的には膨大な計算が必要で手に負えなかったり必要な情報が足りなかったりで、運動方程式を解くのがめんどくさいとか無理ということが多い。そのような場合に便利なのがここで学ぶ「力学的エネルギー保存則」である。

この法則は運動方程式が姿を変えたものだが場合によっては運動方程式よりもずっと便利であり、簡単に運動の様子を教えてくれる(ことがある)。

もう少し詳しく説明しよう。本章では話を簡単にするために運動を直線(x 軸上)に限定する。運動の第二法則によれば、質量 m の質点が力 F を受けて運動するときその運動は必ず以下のような方程式(運動方程式)を満たす:

$$F = ma \quad (8.1)$$

a は質点の加速度である(力と加速度はベクトルなので本来は $\mathbf{F}$, $\mathbf{a}$ と太字で書くべきところだが、ここでは運動が1次元に限定されているので F と a は細字で書いた。P60の「慣習」参照)。加速度は速度を時刻で微分したものである、この式は以下のようにも書ける:

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad (t \text{ は時刻, } v \text{ は質点の速度}) \quad (8.2)$$

式(8.1)と式(8.2)は加速度の表現が形式的に違うだけで、互いに等価な方程式であり、式(5.42)を直線運動(1次元の運動)に書き直したものだ。以下、式(8.2)を議論の出発点としよう。

いま、直線(x 軸)上を質量 m の質点が力 F を受けながら時刻 $t = t_0$ から $t = t_1$ の間で何らかの運動をしている状況を考えよう。力 F は時刻とともに変化するとしよう。この運動はもちろん式(8.2)に従うので、式(8.2)を解いて位置と速度を時々刻々と追跡すれば運動の全体像が判明する。でも微分方程式を解くのはたいがいめんどくさい。

もっと楽ができないだろうか? たとえば物騒な話だが、ボールを投げてどこかに命中させたい場合は「時々刻々」でなくてよいから、最初と最後だけでの位置(と、できれば速度... 衝撃の大きさを知りたいから!)がわかれば十分である。

そこで運動方程式の経過の詳細に立ち入ることなしに運動の最初($t = t_0$)と最後($t = t_1$)の間に何らかの関係を見いだせないだろうか? 実は式(8.2)をうまく数学的に変形すれば、そのような関係を見出すことができるのだ。ただしそのためには「運動エネルギー」という概念を導入しなければならない。

8.1 運動エネルギー

というわけで、まず「運動エネルギー」の定義を述べる(その意味とか働きは後でわかる!):

—— 1次元運動における運動エネルギーの定義 ——

質量 m の質点が速度 v で運動するとき、次式をその質点の運動エネルギー(kinetic energy)という。

$$\frac{1}{2}mv^2 \quad (8.3)$$

- 問 116 式(8.3)を5回書いて記憶せよ。

上の式は速度 v の関数である(質量 m の関数でもあるが、多くの場合、質点の質量は不変なのでここでは m は定数としておこう)。そこで慣習的には運動エネルギーを関数 $T(v)$ と表すことが多い:

$$T(v) = \frac{1}{2}mv^2 \quad (8.4)$$

ではこの「運動エネルギー」がどう活躍するかを説明しよう。

まず質点の位置を x とする。速度 v は位置 x を時刻 t

で微分したもの（それが速度の定義!）だから、

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (8.5)$$

である。両辺に dt をかけると

$$dx = v dt \quad (8.6)$$

となる。つまり、 x の微小変化 dx は速度 v に時間の微小変化 dt をかけたものである。

さて式 (8.2) の両辺に dx をかけてみよう：

$$F dx = m \frac{dv}{dt} dx \quad (8.7)$$

この右辺の dx を式 (8.6) で書き換えれば次式を得る：

$$F dx = m \frac{dv}{dt} v dt \quad (8.8)$$

ここで時刻 t_0 から t_1 までの運動をたくさんの短い断片に分割し、それぞれの断片で式 (8.8) を考えて足し合わせる。つまり時刻 t_0 から t_1 までの間で式 (8.8) を積分すると、

$$\int_{x_0}^{x_1} F dx = \int_{t_0}^{t_1} m \frac{dv}{dt} v dt \quad (8.9)$$

となる。 $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$ とした。ここで置換積分によって右辺の積分変数を t から v に変換すると^{*1},

$$\int_{x_0}^{x_1} F dx = \int_{v_0}^{v_1} m v dv \quad (8.10)$$

となる。 $v_0 = v(t_0)$, $v_1 = v(t_1)$ とした。この左辺は質点が x_0 から x_1 に移動する際に力がなす仕事 W_{01} である（わからない人は式 (4.20) を見よ）。一方、右辺は

$$= \left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_{v_0}^{v_1} = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (8.11)$$

となる。以上より

$$W_{01} = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (8.12)$$

である。右辺に運動エネルギーが出てきたではないか！

式 (8.12) を式 (8.4) を使って書き換えると、

$$W_{01} = T(v_1) - T(v_0) \quad (8.13)$$

あるいは同じことだが、

$$T(v_1) = T(v_0) + W_{01} \quad (8.14)$$

となる。この式は味わい深い。質点にかかる力がなした仕事は質点の運動エネルギーの変化に等しい。つまり、

^{*1} 形式的には右辺の dt を約分することに相当する。

仕事が行われるぶんだけ運動エネルギーが増えるのだ。そう考えると、運動エネルギーは仕事と等価な物理量、つまり「エネルギー」の名にふさわしい。運動エネルギーは「質量を持つ物体の運動」という姿をまとったエネルギーである。

ここで運動エネルギーの定義式 (8.3) を再度よく見よう。速度 v が「2乗」の形で入っている。したがって運動エネルギーは速度 v の符号（つまり方向）によらず、速度 v の大きさつまり「速さ」だけで決まる。質点がどちら向きに進んでいるかは無関係なのだ。

● 問 117 式 (8.12) を導出せよ。ヒント：式 (8.5) 以下の議論を整理して再現すればよい。

さて式 (8.12) は運動方程式を位置（変位）で積分したものにすぎない（高校物理では式 (8.12) を「エネルギーの原理」とよぶらしいが大学ではそのようなよび方はほとんどしない）。しかしその有用性はハンパではない。式 (8.12) を使えば運動の過程を気にすることなく、運動の最初の状態から最後の状態を直接的に導くことができるのだ。以下の例でそれを学ぼう。

● 問 118 質量 m の質点が一定の力 F を受けて一定の加速度 a で直線（ x 軸）上を運動している。時刻 t における位置と速度をそれぞれ $x(t)$, $v(t)$ とする。

(1) 時刻 t_0 から時刻 t_1 の間に、力 F がなした仕事 W_{01} は次式のようになることを示せ：

$$W_{01} = F\{x(t_1) - x(t_0)\} \quad (8.15)$$

(2) 次式を示せ：

$$W_{01} = m a \{x(t_1) - x(t_0)\} \quad (8.16)$$

(3) 以上と式 (8.12) より次式を示せ^{*2}：

$$v(t_1)^2 - v(t_0)^2 = 2a\{x(t_1) - x(t_0)\} \quad (8.17)$$

● 問 119 カーリングの問題（問 90）をもう一度考えてみよう。初速度 v_0 で放されたストーンが距離 x だけ進んで停止したとすると、

^{*2} これは高校物理で「 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ 」と言われる公式だ。高校では暗記させられる式だが、実はこのように簡単に導出できる公式なので、諸君はもちろん暗記する必要は無い。本当に重要で記憶すべきなのは運動の三法則だ。もしも式 (8.17) を覚えていながら運動の三法則を言えないという人がいたとしたら、その人の物理学の学び方はズレている。

- (1) ストーンが放されてから止まるまでの間に摩擦力がした仕事は $-F_{\text{m}}x$ であることを示せ。
- (2) ストーンが放されてから止まるまでの間の運動エネルギーの変化は

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (8.18)$$

であることを示せ。ヒント：止まったとき速度は 0。

- (3) 以上より次式を導け：

$$F_{\text{m}} = \frac{mv_0^2}{2x} \quad (8.19)$$

これは式 (5.85) に一致する。

- (4) ストーンの到達距離が初速度の 2 乗に比例することを示せ。

● 問 120 地球のはるか遠方に静止している質量 m の隕石が地球の万有引力に引かれて徐々に加速しながら一直線に地球に向かってきたとする。我々は隕石を迎撃する計画を立てねばならない。そのためには隕石が地球に衝突する直前の速さ v_1 を求めねばならない。地球の質量を M 、半径を R とし、万有引力定数を G とし、隕石を質点とみなす。

- (1) 隕石が無限遠方から地球の表面（中心から距離 R ）まで地球の万有引力に引かれてやってくる時、地球の万有引力がなす仕事 $W_{\infty \rightarrow R}$ は

$$W_{\infty \rightarrow R} = \frac{GMm}{R} \quad (8.20)$$

となることを示せ。

- (2) 隕石が無限遠方から地球表面までやってくる時、隕石の運動エネルギーの変化は次式であることを示せ。

$$\frac{mv_1^2}{2} \quad (8.21)$$

ヒント：初速度は 0 である。

- (3) このことから地球衝突直前の隕石の速さ v_1 は次式のようになることを示せ：

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (8.22)$$

- (4) 上の式の定数に適切な数値を代入し、 v_1 の値を求めよ。

8.2 力学的エネルギー保存則

前節の式 (8.13), 式 (8.14) で、「運動エネルギー T はされる仕事のぶんだけ増える」ことを学んだ。さて、ここで以前学んだポテンシャルエネルギーを思い出そう：ある特定の位置（基準点 O ）から位置 x まで質点を運ぶときに保存力がなす仕事を $W_{O \rightarrow x}$ とすると、ポテンシャルエネルギー $U(x)$ は $U(x) = -W_{O \rightarrow x}$ と定義された。

ここで、基準点からまず位置 x_0 まで運び、さらに位置 x_0 から位置 x_1 まで運ぶという 2 段階での操作を考えよう。第一段階での仕事は $W_{O \rightarrow x_0}$ であり、第二段階での仕事を $W_{x_0 \rightarrow x_1}$ とする。トータルの仕事はこの 2 つの和である。ところがこれらの 2 つの段階をひとつにまとめて考えると、中継地点 x_0 を経由するとはいえ、結局基準点から位置 x_1 まで運ぶことに他ならないから、トータルの仕事は $W_{O \rightarrow x_1}$ でもある。したがって

$$W_{O \rightarrow x_0} + W_{x_0 \rightarrow x_1} = W_{O \rightarrow x_1} \quad (8.23)$$

である。ところがポテンシャルエネルギーの定義から

$$W_{O \rightarrow x_0} = -U(x_0) \quad (8.24)$$

$$W_{O \rightarrow x_1} = -U(x_1) \quad (8.25)$$

とできるので、結局

$$-U(x_0) + W_{x_0 \rightarrow x_1} = -U(x_1) \quad (8.26)$$

である。すなわち

$$W_{x_0 \rightarrow x_1} = -U(x_1) + U(x_0) \quad (8.27)$$

である。これを式 (8.12) に代入すれば ($W_{x_0 \rightarrow x_1}$ と W_{01} は同じものを意味することに注意) ,

$$-U(x_1) + U(x_0) = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (8.28)$$

となる。これを整理すると

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) = \frac{1}{2}mv_1^2 + U(x_1) \quad (8.29)$$

となる。あるいは運動エネルギー $T(v)$ を使って書き換えれば

$$T(v_0) + U(x_0) = T(v_1) + U(x_1) \quad (8.30)$$

となる。これらの式は味わい深い。左辺は質点が x_0 にあるときの、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和であり、右辺は質点が x_1 にあるときの、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和である。これらが等しいということはつまり、「運動エネルギーとポテン

シャルエネルギーの和」(これを力学的エネルギーという)は運動の始めから終わりまで一定である、ということである(x_0 や x_1 は運動の最中のどこの位置を選んでもよいことに注意せよ)。これを「力学的エネルギー保存則」とよぶ。ただし既に述べたように仕事とポテンシャルエネルギーの変化がきちんと対応するのは働く力が「保存力」のときだけだ。摩擦力のような非保存力が働く場合は、仕事とポテンシャルエネルギーの変化が対応しないために力学的エネルギー保存則が成り立つ保証は無い。まとめると

—— 力学的エネルギー保存則 ——

保存力だけが働く場合(非保存力が働かない場合)、力学的エネルギー(運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和)は運動の初めから終わりまで常に一定である。

● 問 121

- (1) 力学的エネルギーとは何か?
- (2) 力学的エネルギー保存則とは何か?
- (3) 力学的エネルギー保存則が成り立たないのはどういう場合か?

● 問 122 鉛直線上を自由落下する質点の運動(空気抵抗無し)について、力学的エネルギー保存則が成り立つことを確かめよう。問 87 の状況を考える。 $t = 0$ で $v = 0$, $x = 0$ とすると

$$v(t) = -gt \quad (8.31)$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (8.32)$$

である。

- (1) 時刻 t のときの質点の運動エネルギー T と(重力による)ポテンシャルエネルギー U はそれぞれ

$$T = \frac{1}{2}mg^2t^2 \quad (8.33)$$

$$U = -\frac{1}{2}mg^2t^2 \quad (8.34)$$

となることを示せ。

- (2) 力学的エネルギー保存則を知らなかったことにして、次式が恒等的に成り立つことを示せ:

$$T + U = 0 \quad (8.35)$$

● 問 123 バネにつけられて振動する質点の運動(単

振動)について、力学的エネルギー保存則が成り立つことを確かめよう。前章の図 6.1 の状況を考える。時刻 t での質点の位置と速度をそれぞれ $x(t)$, $v(t)$ とする。 $t = 0$ で $v = 0$, $x = x_0$ とすると

$$x(t) = x_0 \cos \omega t \quad (8.36)$$

である。ここで $\omega = \sqrt{k/m}$ である。

- (1) 時刻 t のときの質点の速度 $v(t)$ は次式になることを示せ(ヒント: $x(t)$ を t で微分):

$$v(t) = -x_0\omega \sin \omega t \quad (8.37)$$

- (2) 時刻 t のときの質点の運動エネルギー T と(バネの力による)ポテンシャルエネルギー U はそれぞれ

$$T = \frac{1}{2}mx_0^2\omega^2 \sin^2 \omega t \quad (8.38)$$

$$U = \frac{1}{2}kx_0^2 \cos^2 \omega t \quad (8.39)$$

となることを示せ。ただしポテンシャルエネルギーの基準点として、ばねが自然状態のときの質点の位置(つまり $x = 0$)を考える。ヒント: $U = kx^2/2$ の x に $x(t)$ の式を代入。

- (3) 力学的エネルギー保存則を知らなかったことにして次式が恒等的に成り立つことを示せ:

$$T + U = \frac{1}{2}kx_0^2 \quad (8.40)$$

問 122, 問 123 では力学的エネルギー保存則が成り立った。そうなったのは、これらの間で働く力が保存力だけだったからだ。しかし、以下のように非保存力が働くような場合は力学的エネルギー保存則は成り立たない(というか適用されない):

- 問 124 カーリングの問題, すなわち問 90, 問 119 で力学的エネルギー保存則が成り立たないことを示せ。成り立たないのはなぜなのだろうか?

8.3 問題の解答の作り方

ところで、物理学の問題で解答を作るにはルールというコツがある。それをここで学んでおこう。

例題 某国の弾道ミサイルは高度 2000 km まで達した後、ほぼ垂直に落下してくる。ミサイルは地表に到達するときにはどのくらいの速さになると考えられるか? 有効数字 2 桁で答えよ。ただしここでは空気抵抗を

無視する。地球の半径を $R = 6400 \text{ km}$, 重力加速度を $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ とする。

(解答例)

ミサイルを質点とみなし, 質量を m , 地表近くでの速さを v , 最高到達点の高さを h とする。 G を万有引力定数, M を地球質量とする。万有引力によるポテンシャルエネルギーを最高到達点と地表のそれぞれで, U_h, U_0 とする。(必要な記号を定義した!)

最高到達点で速さ 0 とすると力学的エネルギー保存則から,

$$U_h = U_0 + \frac{1}{2}mv^2, \quad \text{したがって,} \quad U_h - U_0 = \frac{1}{2}mv^2$$

となる (1)。無限遠を基準点とすると, 万有引力の法則より

$$U_h = -\frac{GMm}{R+h}, \quad U_0 = -\frac{GMm}{R} \quad \text{と書ける。}$$

(必要な法則をこの問題に合わせて書き出した!)*³

ここから $U_h - U_0 = \frac{GMmh}{R(R+h)}$ となる。ところで地表での万有引力は $\frac{GMm}{R^2}$ だが, これはほぼ mg に等しい。したがって $\frac{GM}{R} = gR$ 。これを使うと $U_h - U_0 = \frac{gRmh}{R+h}$ となる。これと (1) より $\frac{gRmh}{R+h} = \frac{mv^2}{2}$ 。したがって $v^2 = \frac{2ghR}{h+R}$, したがって

$$v = \sqrt{\frac{2ghR}{h+R}}$$

(値の代入はせずに欲しい量をギリギリまで他の記号で表す努力をした!)

これに $R = 6400 \text{ km}$, $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$, $h = 2000 \text{ km}$ を代入すると(ここでようやく一気に代入!)

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 9.8 \text{ m s}^{-2} \times 2000 \text{ km} \times 6400 \text{ km}}{2000 \text{ km} + 6400 \text{ km}}}$$

(単位換算などはせずにそのまま数値と単位を放り込んだ!)

$$= \sqrt{\frac{2 \times 9.8 \times 2000 \times 6400 \text{ m s}^{-2} \text{ km}^2}{8400 \text{ km}}}$$

(数値は数値, 単位は単位で寄せて整理した。)

$$= \sqrt{\frac{2 \times 9.8 \times 2000 \times 16 \text{ m s}^{-2} \text{ km}}{21}}$$

(数値と単位のそれぞれで約分可能なものは約分した。)

$$= \sqrt{\frac{2 \times 9.8 \times 2000 \times 16 \text{ m s}^{-2} \times 10^3 \text{ m}}{21}}$$

(接頭辞 (km の k など) を処理して SI 基本単位に揃えた。)

$$= \sqrt{\frac{2 \times 9.8 \times 2.0 \times 16 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \times 10^6}{21}}$$

(10 のべき乗を整理して位取りを片付けた。単位も再整理。)

$$= \sqrt{\frac{2 \times 9.8 \times 2.0 \times 16}{21}} \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

(10 のべき乗と単位について根号の外に出せるものは出した。)

$$= 5.5 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

(電卓を叩いて数の掛け算と割り算をして根号を外し, 完成!!)

解答のポイント:

- 答えは小さな科学論文。わからないことをぼかしたり印象操作で誤魔化してはダメ(部分点狙いの入試答案とはそこが大きく違う)。
- まず必要な記号を定義する。後から「これも必要だった!」と気づくときに備えて, 多少スペースをとって書くときよい。
- 答えの直前まで記号だけの式変形で粘る。値の代入はギリギリまで我慢する。
- 上の $v =$ の後の計算は教育的にまわりくどく書いた一例。多少順序が変わったり手順を省いたりしても構わない。
- 値を代入するときは単位も代入しよう!! まずは素直に与えられた単位で代入し, 後から式の中で単位換算する。
- 数値(有効数字), 位取り(10 のべき乗), 単位をわけて, それぞれで整理する。ごっちゃにしない。
- 掛け算・割り算の計算は最後の最後に一気にまとめて行う。そうすれば有効数字の処理も簡単。
- 答の単位は式変形の結果として自然に出てくる。そうすれば「単位換算のし忘れ」は絶対に起きない。
- 「高さを $h \text{ [m]}$ とする」のような書き方をしている人がいるが, $[\text{m}]$ は蛇足である。なぜか? $h = 2000 \text{ km}$ は $h = 2000000 \text{ m}$ と書き換えても構わない。したがって「高さを表す記号」で単位まで指定する必然性はない。
- 高校までの参考書等で「高さを $h \text{ [m]}$ とする」みたいに書いたり, 単位を式に埋め込まずに数値だけで計算したりするものがあるが, それは科学的に合理的ではない。単位は「その量を数値で表す時」には必要だが「その量を記号で表す時」は(原則的に)

*³ (注: この式は基本法則ではないので答案の中で導出が必要だという考え方もあろう。それについては「正解」は無い。君と読者の間の信頼関係が決まることである。)

不要である。なんでもかんでも単位をつければよいというものではない。必要なときにつけ、不要なときにはつけないことが大事。

- 問 125 夏休みに南の島に行った君は、なぜか筑波大生の勇気を証明するためにバンジージャンプをする羽目になった。深い渓谷の上にかけられた橋からゴムバンドが垂れ下がっている。橋から渓谷の底までの高さは 50 m、ゴムバンドの長さ L は 20 m くらいある。ゴムバンドは十分に軽い。ゴムバンドの先端が質量 60 kg の君の体につけられたとき、君の脳裏に「こんなにゴムバンドが長ければ、自分の体は途中で止まらずに渓谷の底に叩きつけられるのではないか？」という不安がよぎった。

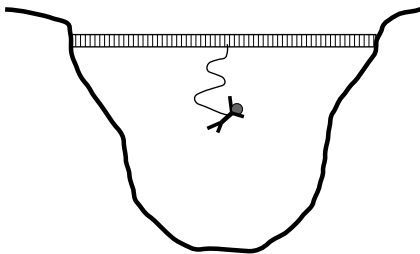


図 8.1 問 125 のバンジージャンプ。

そこで本番前に、試しにこのゴムバンドを 1.0 m だけ橋から出して、静かに自分の体を吊り下げてみたら 0.20 m だけ伸びた。

- (1) この 1.0 m のゴムバンドのバネ定数 k_0 は?
- (2) 20 m のゴムバンドは均一の素材・太さであるとする。20 m のゴムバンドのバネ定数 k は?

橋から初速度 0 で飛び降りるとき君の運動エネルギー T は 0 だ。重力のポテンシャルエネルギー U も 0 であるとする（つまり飛び降りる地点を基準点とする）。このとき当然ながら力学的エネルギー E_0 は 0 だ。また、橋から高さ x だけ落ちたとき重力のポテンシャルエネルギーは $-mgx$ である。そのときの速度を v とする。

- (3) 落下距離 x がゴムバンドの長さ未満のとき力学的エネルギー E_1 は

$$E_1 = \frac{mv^2}{2} - mgx \quad (8.41)$$

であることを示せ。このときゴムバンドには全く力がかかっていないことに注意せよ。

- (4) 落下距離 x がゴムバンドの長さを越えたら力学的

エネルギー E_2 は

$$E_2 = \frac{mv^2}{2} - mgx + \frac{k(x-L)^2}{2} \quad (8.42)$$

であることを示せ。

- (5) 君の体が運よく谷底の手前で停止したとするなら、停止の瞬間の力学的エネルギー E_3 は

$$E_3 = -mgx + \frac{k(x-L)^2}{2} \quad (8.43)$$

であることを示せ。

- (6) 以上を利用し、力学的エネルギー保存の法則 ($E_0 = E_3$) から、停止点までの落下距離 x を求めよ。この結果を見て、君はこのバンジージャンプを安全と判断するか? (注: 実際に実験したいと思った人へ: やめよう。)
- (7) 実際のバンジージャンプのアトラクションでは安全のために飛び人の体重を事前に測る。なぜか?

8.4 物理学における保存則

力学的エネルギー保存則は保存力だけが関与するような運動に限って成立するが、実は「エネルギー保存則」はもっと一般的・普遍的な法則である。たとえば氷上を滑るカーリングのストーンは、氷とストーンの間の摩擦力（非保存力）の仕事によっていずれ停止してしまうが、その過程では力学的エネルギーは一定でない。ストーンの運動エネルギーはポテンシャルエネルギーに転換されないのだ。しかしそのかわりにストーンの運動エネルギーは氷とストーンの界面の摩擦によって熱に変わる。熱はエネルギーのひとつの形態だ。そして熱エネルギーとストーンの運動エネルギーの合計は運動の最初・途中・最後のどの時点でも一定である。つまり力学的エネルギーだけでは一定でないが、「力学的エネルギー + 熱エネルギー」は一定なのだ。

熱エネルギー以外にも化学エネルギーや電氣的・磁氣的なエネルギーなど、様々なエネルギーの形態がある。実は質量もエネルギーの形態のひとつだ。ここでは詳述しないが、

$$E = mc^2 \quad (8.44)$$

という式が質量とエネルギーの関係を表す (E はエネルギー, m は質量, c は光の速さ)。それらをすべて勘案すればエネルギーは決して無くなることはない。これをエネルギー保存則という。エネルギー保存則はニュートン

力学だけでなく様々な物理法則に対して成り立つ、普遍的な法則である。

物理学ではエネルギーのように、様々な複雑な運動や反応の過程で最初から最後まで一定であるような量をとっても大切にす。万物流転、栄枯盛衰の世にあって、変わらない何かを求めようとするのは人間の普遍的な心理なのかもしれないが、実際、自然現象の中にはそのような「総和は変わらない（どこかで減った分はどこかで増えるような）特別な量」（不変量）というものがある。そのような事実（法則）を「保存則」とよぶ。エネルギー保存則はその例だが、それ以外にも以下のような例がある（理由や背景は今では理解しなくてもよい。そのようなものがある、ということを頭の片隅に留めておこう）：

- 質量保存則
- 電荷保存則
- 運動量保存則
- 角運動量保存則

ただし、非保存力が働くときに力学的エネルギー保存則が破れるのと同様に、これら保存則の中には、条件次第で「破れる」ものもある^{*4}。

なぜ物理学では保存則を大切にするのか？ それは君が勉強を進めて保存則の持つ威力を知るにしたがって、おのずと明らかになるだろう。

● 問 126 自動車の安全運転のために「スピードを控えめに」と言われるが、なぜだろう？ ひとつは高速での運動は制御が難しいということだ。運転者が危険を察知してからブレーキを踏んだりハンドルを切ったりするまでには時間がかかり、その間にも車は進んでしまうので危険を回避できない。しかしそれだけではない。スピードを控えめにすべき理由をエネルギー保存則の観点で説明せよ。

● 問 127 原子核崩壊で出る放射線に α 線、 β 線、 γ 線というのがある。 α 線は ${}^4\text{He}$ （質量数 4 のヘリウム）の原子核（それを α 粒子ともいう）が飛んでくるもの、 β 線は電子が飛んでくるもの、そして γ 線は光の一種（ただしとても波長が短い）だ。 α 粒子の質量を m_α とし、

電子の質量を m_e とする。

- (1) m_α を計算で求めよ。ヒント：質量数が 4 だから 1 mol の He の質量は 4 g。 ${}^4\text{He}$ 原子核は ${}^4\text{He}$ 原子よりも電子 2 個ぶん軽いとその差は無視してよい。
- (2) ${}^{239}\text{Pu}$ （放射性元素プルトニウム 239）の崩壊で発する α 線のエネルギーは α 粒子 1 個あたり 5.5 MeV である。このときの α 粒子の速さを求めよ。ヒント：MeV ってわからない？ M は SI 接頭辞。eV は索引で調べてみよう。
- (3) ${}^{137}\text{Cs}$ （放射性元素セシウム 137）の崩壊で発する β 線のエネルギーは電子 1 個あたり 510 keV である。このときの電子の速さを求めよ。なお $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg である。

ヒント：ここでいう「エネルギー」は運動エネルギーである。

演習問題 12 バネじかけのおもちゃの鉄砲を作った。銃身の中に仕込まれたバネのパネ定数は 40 N/m である。バネを 10 cm だけ縮めて 4.0 g の砲弾を仕込み、引き金を引いた。砲弾はどのくらいの速さで鉄砲から飛び出るか？ ただし砲身は水平に固定され、バネの質量や、砲身と砲弾の間の摩擦は無視する。ヒント：バネのポテンシャルエネルギーの式は導出せずに使ってよい。

演習問題 13 直径 4.0 mm、長さ 10 cm の鉄製の釘を木材に打ち込む。質量 1.0 kg のハンマーを釘の頭から 30 cm だけ高い位置から振り下ろして釘を叩くことを 10 回行ったら、釘の頭は木の表面まで届いた。このとき釘の頭を触ると熱かった。釘の温度は当初よりどれだけ上がったか？ ただしハンマーを振り下ろすとき手は力を加えない（ハンマーの自由落下に任せる）。また、木の熱伝導率は鉄のそれよりもはるかに小さいので、生じた熱の全ては釘に蓄えられ、木には行かないとする。鉄の密度を $\rho = 7.8 \text{ g cm}^{-3}$ 、鉄の比熱を $460 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ とする。

8.5 解答

答 116 式 (8.4) で定義される T のこと（レポートではその式をきちんと書くこと!）。

答 118

- (1) 質点を受ける力は一定値 F なので

$$W_{01} = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} F dx = \left[Fx \right]_{x(t_0)}^{x(t_1)} = F \{ x(t_1) - x(t_0) \}$$

^{*4} たとえば質量保存則は核分裂や核融合等の反応では成り立たない。その過程では質量がエネルギーに変わってしまうのだ。ただし質量保存則をエネルギー保存則と組み合わせてしまえば、その場合でも保存則は成り立つ。

(2) $F = ma$ を上の式に代入すればよい。

(3) 式 (8.12) を用いて W_{01} を消去する:

$$\frac{1}{2}mv(t_1)^2 - \frac{1}{2}mv(t_0)^2 = ma\{x(t_1) - x(t_0)\}$$

両辺を 2 倍して m で割れば与式を得る。

答 119 注意: 手放されて滑っているストーンにかかる力は、重力と氷面から受ける垂直抗力そして動摩擦だ。このうち重力と氷面から受ける垂直抗力は互いに逆向きで同じ大きさであり、打ち消しあう。したがってストーンの運動には動摩擦だけを考えればよい。

(1) 摩擦力 (動摩擦) はストーンの動く向きと逆方向で $-F_m$ 。これを F として問 118(1) の結果に入れば仕事は $-F_mx$ 。

(2) ストーンが放たれた直後の運動エネルギーは $mv_0^2/2$ であり、停止時には 0。したがって与式が成り立つ。

(3) 式 (8.12) によれば小問 (1) の式と小問 (2) の式は互いに等しい。したがって与式を得る。

(4) 小問 (3) の結果から

$$x = \frac{mv_0^2}{2F_m} \quad (8.45)$$

したがって x は v_0^2 に比例する。

答 120

(1) 式 (4.26) で, $R_0 = \infty$, $R_1 = R$ とすればよい。

(2) 略。

(3) 式 (8.13) より式 (8.20) と式 (8.21) が等しい。したがって

$$\frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (8.46)$$

したがって

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (8.47)$$

(4) $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$,

$M = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$,

$R = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$ とすると,

$v_1 = 1.12 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$ 。これは約 40000 km/h。

注: これを第二宇宙速度という。

答 121

(1) 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和を力

学的エネルギーという。

(2) 力学的エネルギーは運動の初めから終わりまで一定である、という法則。ただし力は保存力に限る。

(3) たとえば摩擦力は保存力ではないから摩擦力が関与する運動では力学的エネルギー保存則は成り立たない。

答 122

(1) 式 (8.4) に式 (8.31) を代入すると式 (8.33) を得る。また、式 (4.41) で h を x と書き換えると $U(x) = mgx$ である。この式に式 (8.32) を代入すると式 (8.34) を得る。

(2) 式 (8.33) と式 (8.34) の辺々を加えると与式を得る。

答 123

(1) 略 (式 (8.36) を t で微分するだけ)。

(2) 式 (8.4) に式 (8.37) を代入すると式 (8.38) を得る。また、式 (4.42) に式 (8.36) を代入すると式 (8.39) を得る。

(3) 式 (8.38) と式 (8.39) の辺々を加えると、

$$T + U = \frac{1}{2}mx_0^2\omega^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}kx_0^2 \cos^2 \omega t$$

ここで問題より $\omega = \sqrt{k/m}$ なので、上の式は

$$T + U = \frac{1}{2}kx_0^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}kx_0^2 \cos^2 \omega t$$

となる。これを変形すると

$$T + U = \frac{1}{2}kx_0^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2}kx_0^2$$

となり与式を得る。

答 124 ストーンが放たれた直後とストーンが停止したときのそれぞれで、運動エネルギーは $mv_0^2/2$ と 0 である。一方、ポテンシャルエネルギーは摩擦力については存在せず、重力についてはストーンが放たれた直後とストーンが停止したときで互いに等しい (どちらも水平面にあるから)。したがって力学的エネルギーはストーンが放たれた直後の方がストーンが停止したときよりも $mv_0^2/2$ だけ大きい。したがって力学的エネルギー保存則は成り立たない。それはストーンの運動に関与する力が摩擦力であり、摩擦力は非保存力であり、非保存力が関与する場合は力学的エネルギー保存則は成り立たないからである。

答 125 君の質量 (体重) を m , 重力加速度を g とする。

(1) ゴムバンドの弾性力と重力が釣り合う(合力が0)から $-k_0\delta + mg = 0$ である(ここで δ はゴムバンドの伸びで、0.2 m)。したがって

$$k_0 = \frac{mg}{\delta} = \frac{60 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m s}^{-2}}{0.2 \text{ m}} = 2940 \text{ N/m}$$

(2) パネ定数はパネの長さに反比例する(それがわからない人は問 44 あたりを復習!)。今の場合、ゴムの長さが 20 倍になるから $k = k_0/20 = 147 \text{ N/m}$ 。(3) 運動エネルギーは $mv^2/2$ 。ポテンシャルエネルギーは重力によるもののみであり、 $-mgx$ 。両者の和から $E_1 = mv^2/2 - mgx$ 。(4) ゴムバンドの伸びは $x - L$ である。したがってゴムバンドの弾性力によるポテンシャルエネルギーは $k(x - L)^2/2$ 。これを前小問の式に加えれば良い。(5) 停止する瞬間は速度が 0。したがって前小問の式で $v = 0$ とすればよい。(6) $E_0 = E_3$ より

$$0 = -mgx + \frac{k(x - L)^2}{2} \quad \text{したがって,}$$

$$x^2 - 2\left(L + \frac{mg}{k}\right)x + L^2 = 0$$

2 次方程式の解の公式から

$$x = L + \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\frac{2mgL}{k} + \frac{m^2g^2}{k^2}} \quad (8.48)$$

これに適当な数値を代入すれば $x = 37.3 \text{ m}$, 10.7 m となる。このうち求める解は少なくともゴムバンドの長さ $L = 20 \text{ m}$ 以上のはずなので、結局 $x = 37.3 \text{ m}$ となる。谷底までの深さは 50 m あるから君の体は谷底までは到達しない。したがってこのバンジージャンプは(ゴムがぶちっと切れたりしない限り)安全だろう。

答 126 高速で運動する物体の運動エネルギーは大きい。運動エネルギーは速度の 2 乗に比例するので、たとえば 40 km/h と 60 km/h では速さは 1.5 倍だが、運動エネルギーは $1.5^2 = 2.25$ 倍にもなる。そして事故で急停止したときは、エネルギー保存則のためにその運動エネルギーは車や搭乗者の身体の破壊に使われる。「事故ったときのダメージを小さくする」ためにもスピードは控えるべきであり、また、高速で運転するときほど事故の可能性を(低速での運転時よりも)減らすように心がけるべきなのだ。

答 127

- (1) $m_\alpha = 4 \text{ g}/(6.0 \times 10^{23}) = \dots = 6.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 。
 (2) α 線のエネルギーを E 、速さを v とすると、
 $\frac{1}{2}m_\alpha v^2 = E$ 。したがって $v = \sqrt{2E/m_\alpha} = \dots =$

$$1.6 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$

- (3) β 線のエネルギーを E 、速さを v とすると、上と同様にしたがって $v = \sqrt{2E/m_e} = \dots = 4.2 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ 。ところがこれは光速 $c = 299792458 \text{ m/s}$ より大きい! 世の中には光より速く動くものは無いということがアインシュタインの特殊相対性理論で明らかにされている。したがってこの結果はおかしい。このくらい速い運動になると Newton 力学は通用しない。特殊相対性理論を使って計算し直すと(その詳細は今ではわからなくてよい)、 $v = 2.6 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ となる。

注: eV を J に直して計算しないと正しい答にはならない。単位を埋め込んで計算すればそれに気がつくはず!

よくある質問 168 なぜカーリングのときに U が 0 になるのですか? ... まず摩擦力は非保存力なので U は無い。また、ストーンは水平方向に動くので重力のする仕事は 0。したがって U の変化は 0。したがって、もし重力による U をストーンの出発点で 0 と置けば、 U は氷面上のどこに行っても 0。

よくある質問 169 「示せ」という問題は数式だけでなく言葉(文章)も使って説明するのですか? 言葉での説明が苦手です。... はい、適宜、言葉(文章)でストーリーを組み立てることが必要です。そのためにはまず言葉の定義をしっかり把握しましょう。そして言葉を正確に使いながら、自分自身が読んで納得できるような説明を組み立ててみましょう。

よくある質問 170 自分の書いた説明・証明が正解なのかわかりません。... そう思うならまだ「正解」ではありません。たとえ他の人が「正解です!」と言ってくれたとしても、自分自身が納得しない限りそれは正解ではないのです。

よくある質問 171 自分の答が正しいかどうかは、よくわかった人に判定してもらえないんじゃないですか? ... もちろん他の人の目で見ってもらうことも大事です。でないと独りよがりになってしまいますからね。でもその人が正しいという保証もありません。どんな優秀・高名で権威のある科学者でも間違えるときはあります。その人があなたの答を正しいと言ってもあなたは単純に喜ぶべきではないし、間違いだと言ってもすぐに凹む必要はありません。科学はそれぞれの参加者が自分なりの正しさを追求し、互いに対等な立場で論をぶつけ合うのです。あなたはそれに参加するために、自分なりの正しさを持つべきなのです。

よくある質問 172 じゃあ「正しい」ってどういうことなのですか? ... とても良い質問であり、難しい質問です。時間をかけて自分なりに考えてみて下さい。それだけの価値のある問です。少なくとも「権威のある誰かの発言」が正しい、というものではないと私は思います。

よくある質問 173 じゃあ入試の正解・不正解はどうやって保証されるのですか? ... 入試にだって正解・不正解にそんなにちゃんとした保証はありませんよ。実際、毎年入試問題の不備が指摘されて新聞記事になるではないですか。指摘されない・気づかれないだけで、ツツコミどころのある微妙な問題はたくさんあると思います。スポーツの判定もそうでしょ? 微妙な判定や誤審はよくありますよね。だからテストは運や偶然にも左右されるものであり、完璧に実施できるものではないと私は思います。

よくある質問 174 でも志望校に入るために必死で勉強する受験生にとってはシリアスなことですよ... もちろんそれはそうです。でも、だからといってテストに完璧・無謬を求めるのは非現実的なのです。微妙な採点の揺れやミスを排除しようとすれば、記述式ではなく選択式の問題が増えるでしょう。でもそれでは学力評価としては偏ってしまうから記述式を増やせと言われる。そうしたら複数の採点者で徹底的に時間をかけて作問と採点をするしかありません。その人件費を考えたら受験料が何倍にもなりかねないし、大学の教員は入試の問題作成と採点に追われて肝心の学生の教育や研究ができなくなってしまう、大学の水準は落ちてしまいますよ。

確かに受験生にとっては入試は人生のかかる大きなものです。でもスポーツの試合もそうですよね。オリンピックやワールドカップのように4年に1回の大舞台で、誤審や理不尽な条件のせいで実力を出しきれずに終わる人はたくさんいます。人が人を評価したり判定することには理不尽さは必ず残るのです。

第9章

運動量保存則

前章で学んだ「力学的エネルギー保存則」をうまく使えば、運動方程式を解くまでもなく多くのことが簡単にわかる。しかしあの法則にも弱点がある。ひとつは摩擦力などの非保存力が働いてたら使えないということ。もうひとつは物体の運動の「速さ」は教えてくれても「方向」は教えてくれないことである。

そこでそれらを補ってくれるような、もうひとつの保存則をここでは学ぶ。それは「運動量保存則」である。この法則もいくつか弱点があるが、力学的エネルギー保存則が使えないときにも使える（ことがある）し、力学的エネルギー保存則と組み合わせることができればさらに威力を発揮する。

特に強力なのは複数の物体どうしが衝突するような状況である。

9.1 運動量保存則はどう便利なのか？

図 9.1 のような 2 つの物体 A, B が近づいてきて衝突し、一体化する運動を考える。衝突の前後ではこれらを質点とみなそう。A, B それぞれの質量を m_A, m_B とする。話を簡単にするため、いずれの質点にも重力などの外力（2 つの質点どうしが及ぼし合う力以外の力）は働いていないとする（無重力空間での運動を想像しよう）。

時刻 t_0 のとき（衝突前）A, B はそれぞれ速度 v_A, v_B で xy 平面上を別の方向に等速度運動しているとしよう。時刻 t_1 に 2 つは衝突して合体する。そして時刻 t_2 では（衝突後）合体した物体が新たな方向に速度 v で進んでいるとしよう。この速度 v を求めよと言われたらどうすればよいだろう？

極微の世界や高速の世界を除けばどんな運動も運動方程式に従うので、この件も運動方程式を解けば完璧に予測・解明できるはずだ。しかしこの件に関しては運動方程式を正面から解くのは難しい。というのもそもそも「衝突して合体」は時刻 t_1 の「瞬間」で起きるのではなく、衝突が始まって物体が徐々につぶれて、その間、弾性

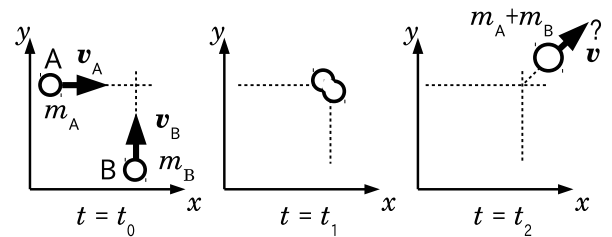


図 9.1 2 つの物体の衝突合体

力や摩擦力が複雑に働き、やがてお互いがくっつきあって一体化するまで、短い時間だが複雑な現象が起きるのだ（その間は物体 A, B の「大きさ」とか「変形」が重要なので A, B を質点とみなすことはできない）。その各時刻に 2 つの物体の間にどのように力が働くのかを解明するのは大変難しい作業だ。

というわけでこの時刻 t_1 付近で起きる「衝突して合体」という複雑な現象（物体を質点とみなすことのできない現象）を運動方程式で直接扱うことは避けたい。「君子危うきに近寄らず」と言うではないか。

そこで有用なのがこれから学ぶ以下の法則である：

運動量保存則

外力が働かない質点系では全運動量は不変である。

外力はさきほども出てきた言葉だが、考察の対象になっている物体どうしに働く力（それを内力という）以外の力だ。本件でも外力は働いていない*1。質点系とは 1.11 節で学んだように、複数の質点からなる系である。全運動量とは各質点の運動量を全部足したもの（ベクトルとしての足し算）である。運動量とは式 (5.49) で定義さ

*1 衝突して合体するまでに生じる複雑な力は、具体的にその力がどんなものなのかというのはさておき、「考察の対象になっている物体どうしに働く力」なので内力である。

れたように、質量と速度の積である。

この法則がなぜ成り立つかは後で説明するとして、とりあえずこの法則が正しいと信じてみよう。本件では時刻 t_0 (つまり衝突前) の全運動量は

$$m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B \quad (9.1)$$

である。ここで添字の A, B はそれぞれ質点 A, 質点 B の属性であることを示す。時刻 t_2 (つまり衝突後) では質点はひとつに合体しており、その運動量は

$$(m_A + m_B) \mathbf{v} \quad (9.2)$$

である。運動量保存則は式 (9.1) と式 (9.2) が等しいと主張するのだ。すなわち

$$m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B = (m_A + m_B) \mathbf{v} \quad (9.3)$$

が成り立つはずだ。それを認めるなら

$$\mathbf{v} = \frac{m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B}{m_A + m_B} \quad (9.4)$$

となって、衝突・合体後の質点の速度が求まる。実際、実験してみると確かにこうなるのだ。

● 問 128 図 9.1 の問題において $m_A = m_B = 1.0 \text{ kg}$ とし、時刻 t_0 で A は x 軸方向に 1.0 m s^{-1} , B は y 軸方向に 1.0 m s^{-1} で動いているとする。

- (1) 衝突合体後の速度 $\mathbf{v}$ を求めよ。
- (2) $|\mathbf{v}|$ を求めよ。

9.2 運動量保存則の証明: 1 つの質点バージョン

では運動量保存則を証明しよう。とりあえず 1 つの質点について考える。まず運動方程式に戻る (運動の話は全て運動方程式から始まるのだ!)。質量 m の質点が力 $\mathbf{F}$ を受けて運動しているときその運動はどんなものでも以下の運動方程式に従う:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (9.5)$$

t は時刻である。 $\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}$ はそれぞれ質点の位置, 速度, 加速度。さて式 (9.5) は以下のように書ける:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad (9.6)$$

両辺に dt をかけると次式になる:

$$m d\mathbf{v} = \mathbf{F} dt \quad (9.7)$$

これを時刻 $t = t_0$ から時刻 $t = t_1$ まで t で積分すれば

$$\int_{\mathbf{v}(t_0)}^{\mathbf{v}(t_1)} m d\mathbf{v} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt \quad (9.8)$$

となる (わからない人は積分の定義に戻って考えよう)。左辺は

$$\left[m\mathbf{v} \right]_{\mathbf{v}(t_0)}^{\mathbf{v}(t_1)} = m\mathbf{v}(t_1) - m\mathbf{v}(t_0) \quad (9.9)$$

となるから、式 (9.8) は

$$m\mathbf{v}(t_1) - m\mathbf{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt \quad (9.10)$$

となる。この式の左辺は「時刻 t_0 から t_1 の間に運動量がどれだけ変わったか」だ。一方、右辺は以下で定義される力積 (りきせきと読む) という量である:

力積の定義

時刻を t とする。質点に力 $\mathbf{F}(t)$ が働くとき

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt \quad (9.11)$$

を時刻 t_0 から t_1 までに質点に働く力積とよぶ。

- 問 129 力積の定義を 5 回書いて記憶せよ。

すなわち式 (9.10) は「1 つの質点の運動量の変化は受けた力積に等しい」と解釈できる。これが 1 つの質点に関する運動量保存則である。そしてこの法則をもとに質点系の運動量保存則が証明される。

よくある質問 175 第 8 章で学んだ「運動エネルギーの変化は仕事に等しい」という「力学的エネルギー保存則」に似てますね... 似てるけど違います。両者の違いをきちんと認識しよう。運動エネルギーや仕事はスカラーですが運動量や力積はベクトルです。力学的エネルギー保存則は運動方程式を位置で積分して得られますが、運動量保存則は運動方程式を時刻で積分することで得られたのです。

9.3 運動量保存則: 2 つの質点バージョン

次に 2 つの質点からなる質点系について運動量保存則を証明する。

2 つの質点 A, B が互いに力を及ぼし合いつつ時刻 $t = t_0$ から時刻 $t = t_1$ まで運動する状況を考えよう。質点 A にかかる力 $\mathbf{F}_A$ は質点 B から受ける力 (内力)

と外部から受ける力（外力）の和である：

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_A^e \quad (9.12)$$

ここで $\mathbf{F}_{AB}$ は質点 A が質点 B から受ける力とし、 $\mathbf{F}_A^e$ は質点 A が受ける外力とする（e は external 外部の頭文字）。同様に質点 B にかかる力 $\mathbf{F}_B$ は次式のようになる：

$$\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_{BA} + \mathbf{F}_B^e \quad (9.13)$$

ここで $\mathbf{F}_{BA}$ は質点 B が質点 A から受ける力、 $\mathbf{F}_B^e$ は質点 B が受ける外力とする。

さて各質点に関して式 (9.10) と同様の式が成り立つはずだ：

$$m_A \mathbf{v}_A(t_1) - m_A \mathbf{v}_A(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_A dt \quad (9.14)$$

$$m_B \mathbf{v}_B(t_1) - m_B \mathbf{v}_B(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_B dt \quad (9.15)$$

これらを辺々足し合わせると

$$\begin{aligned} m_A \mathbf{v}_A(t_1) + m_B \mathbf{v}_B(t_1) - m_A \mathbf{v}_A(t_0) - m_B \mathbf{v}_B(t_0) \\ = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_A dt + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_B dt = \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B) dt \end{aligned} \quad (9.16)$$

となる。ここで最後の式の積分の中は、式 (9.12)、式 (9.13) を使うと

$$\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BA} + \mathbf{F}_A^e + \mathbf{F}_B^e \quad (9.17)$$

となる。ところが作用反作用の法則から $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$ である。したがって式 (9.17) の右辺の中の $\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BA}$ は 0 である。それも用いて式 (9.16) を書き換えると

$$\begin{aligned} m_A \mathbf{v}_A(t_1) + m_B \mathbf{v}_B(t_1) - (m_A \mathbf{v}_A(t_0) + m_B \mathbf{v}_B(t_0)) \\ = \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{F}_A^e + \mathbf{F}_B^e) dt \end{aligned} \quad (9.18)$$

となる。右辺は「質点 A、質点 B のそれぞれに働く外力の総和」を時刻で積分したもの、つまり「外力の総和による力積」である。したがってこの式は「2 つの質点の運動量の和は外力の総和による力積のぶんだけ変化する」と解釈できる。特に外力が働いていないときは「外力の総和による力積」は 0 である。したがって「2 つの質点が外力を受けずに運動する場合、全運動量は不変である」ということが示された。（3 つ以上の質点の場合の証明は後で述べる）

● 問 130 2 つの質点 A、B が x 軸上を互いに逆向きに等速度運動で運動し、接近しいずれ衝突する。質点 A、B の質量はそれぞれ 2.0 kg と 3.0 kg であり、衝突前の質点 A、B の速度はそれぞれ -4.0 m s^{-1} 、 5.0 m s^{-1} であ

る。衝突後、2 つの質点はくっついて 1 つの質点になる場合、衝突後のこの質点の速度を求めよ。ただし外力は働いていないものとする。ヒント：この場合 2 つの質点の全運動量は不変。

9.4 重心を考えると簡単になる

本章で扱っているような複数の質点（質点系）の運動は、重心というものを考えるとシンプルになる。そのことを説明しよう。

まず重心を定義しよう： n 個の質点について

$$\mathbf{R} := \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \cdots + m_k \mathbf{r}_k + \cdots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_k + \cdots + m_n} \quad (9.19)$$

を位置ベクトルにとるような点を重心という（定義）。ここで m_k は k 番目の質点の質量、 $\mathbf{r}_k$ は k 番目の質点の位置ベクトルである。要するに各質点の位置を質点の質量で重み付けして平均したものが重心である。

これを使って前節で述べた 2 質点系の運動量保存則を表現してみよう。まず 2 つの質点（質点 A、質点 B とよぶ）の重心を $\mathbf{R}$ とすると、式 (9.19) から

$$\mathbf{R} := \frac{m_A \mathbf{r}_A + m_B \mathbf{r}_B}{m_A + m_B} \quad (9.20)$$

である。 $\mathbf{r}_A$ 、 $\mathbf{r}_B$ は質点 A、B のそれぞれの位置ベクトルだ。式 (9.20) の両辺を時刻 t で微分すると

$$\mathbf{R}' = \frac{m_A \mathbf{r}'_A + m_B \mathbf{r}'_B}{m_A + m_B} \quad (9.21)$$

となる。ここで、位置を時刻で微分すると速度だから $\mathbf{r}'_A = \mathbf{v}_A$ 、 $\mathbf{r}'_B = \mathbf{v}_B$ である。また、重心の位置を時刻で微分したもの（つまり重心の速度）を $\mathbf{V}$ とする。すると式 (9.21) は

$$\mathbf{V} = \frac{m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B}{m_A + m_B} \quad (9.22)$$

となる。ここで右辺の分母は 2 つの質点の質量の合計、つまり質点系の全質量である。それを M と書こう：

$$M := m_A + m_B \quad (9.23)$$

そして式 (9.22) の両辺に M を掛けて左右を入れ替えると

$$m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B = M \mathbf{V} \quad (9.24)$$

となる。左辺は 2 つの質点の運動量の合計、つまり質点系の全運動量である。一方、右辺は「質点系の全質量

M 」と「重心の速度 V 」の積、つまり全質量があたかも重心に集中して存在するような（仮想的な）質点の運動量である。これを「重心の運動量」とよぼう。ひらたく言えば全運動量は重心の運動量に等しいのだ。

これを使うと式 (9.18) は次式のように書ける：

$$MV(t_1) - MV(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (F_A^e + F_B^e) dt \quad (9.25)$$

つまり「重心の運動量 (MV) は外力の総和による力積のぶんだけ変化する。特に、外力が無い場合は式 (9.25) の右辺が 0 なので、 $MV(t_1) = MV(t_0)$ となり、重心の運動量 (MV) は不変である。ところが全質量 M は普通、不変なので、結局「外力が無い場合は重心の速度 (V) は不変である（重心は等速度運動をする）」と言える。

例 9.1 本章の冒頭で 2 つの質点の衝突・合体について考えた。衝突・合体後の速度は式 (9.4) で求めることができた。なんとこれは式 (9.22) の右辺と同じ、つまり衝突前の 2 つの質点の重心の速度ではないか!! そして衝突後は 2 つの質点はこの速度 v で一緒に動くのだから、その重心の速度もこの v に等しい*2。したがって衝突合体の前と後で確かに重心の速度は不変である!

- 問 131 式 (9.25) の導出を再現せよ。

9.5 衝突のときエネルギーはどうなるのか?

「よくある質問 175」で述べたように、この運動量保存則は第 8 章で学んだ力学的エネルギー保存則になんとなく似ているが違う法則である。それらはどういう関係にあるのだろうか? そこで以下の問を考えよう：

- 問 132 問 128 の続きを考える。
- (1) 衝突前の運動エネルギーの総和を求めよ。
 - (2) 衝突合体後の運動エネルギーを求めよ。

この現象では衝突合体で運動エネルギーが減ってしまった。ではこの減ったぶんのエネルギーはどこに行ってしまったのだろうか?

まず考えられるのはポテンシャルエネルギーである。力学的エネルギー保存則では運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの総和は一定なのだから、運動エネルギーが減った分、ポテンシャルエネルギーが増えていれ

ばつじつまは合う。

しかしその考え方はうまくないのだ。まず問題設定で質点には外力は働いていないとした。したがって外力によるポテンシャルエネルギーはそもそも存在しない（どこに基準点を設けても、そしてそこからどの点に移動するにしても、仕事は 0 なので）。

仮に外力が働いているような場合も、衝突の短い瞬間だけに注目すると、物体の運動は小さい空間領域で発生するので、外力による仕事はほとんど無視できる（仕事 = 力 × 変位の「変位」が小さいから!）。したがって外力がある場合でも衝突の前後で外力によるポテンシャルエネルギーの変化はほぼ 0 だ。したがって外力があろうがなかろうが、衝突の前後でポテンシャルエネルギーは変化しない。

ならば外力以外の力によるポテンシャルエネルギーはどうだろう? たとえばボールどうしが衝突するときボールは変形する。その変形はボールを構成する各部分の弾性力に逆らって行われる（仕事がされる）ものなので、弾性力によるポテンシャルエネルギーを増加させる。しかもこの変形は、衝突終了後もボールをぐにゃぐにゃと振動させることによって継続する。弾性力によるポテンシャルエネルギーはこの振動の運動エネルギーにも転化するだろう。

そのような振動はやがて収まるだろう。それはボール内部の摩擦によるものである。そのとき振動のエネルギーは最終的にはボールの温度を上げる熱エネルギーとなるだろう。

このように、衝突の際に減った運動エネルギーは物体内部の振動のエネルギーや熱になるのである。

このようなことのない衝突、すなわち衝突によって全運動エネルギーが変化しない（減らない）ような衝突を弾性衝突とか完全弾性衝突という。弾性衝突でない衝突現象（全運動エネルギーが減る衝突）を非弾性衝突という。上の例は非弾性衝突である。

よくある間違い 6 弾性衝突を「エネルギーが減らない衝突」のことだと思っている... 定義としては間違いです。弾性衝突であろうが非弾性衝突であろうがそれら以外の現象であろうが、世の中のありとあらゆる現象では熱エネルギーを含むありとあらゆる形のエネルギーの全てを考えればエネルギーは失われません。定義はその概念を他と区別するために必要十分な特徴・性質を述べねばなりませんから、これは弾性衝突の定義としては不十分です。だから「エネルギーが」ではなく「全

*2 $(m_A v + m_B v) / (m_A + m_B) = v$

運動エネルギーが」なのです。

よくある間違い 7 弾性衝突を「運動量が減らない衝突」のことだと思っている... いろいろ微妙な点があります。まず「運動量」でなくて「全運動量」です。でないと、どの質点の運動量のことですか? となってしまう。また、運動量はベクトルですので、減る・減らないというようなものではありません(たとえば向きが逆になるのは「減る」ですか?)。そして弾性衝突では全運動量是不変ですが、それは弾性衝突に限ったことではなく非弾性衝突でも全運動量是不変です。

よくある質問 176 それ、最後はなんか揚げ足のような気がしました。弾性衝突は全運動量が不变な衝突ではないのですか? ... 以下のような 3 つの文章を考えてみましょう:

1. 弾性衝突は全運動量が不变な衝突である。
2. 弾性衝突は全運動量が不变な衝突のことである。
3. 弾性衝突とは全運動量が不变な衝突である。

このうち 1 は正しいですが、2 と 3 は間違いです。「のこと」や「とは」という語は定義を意味します。

● 問 133 弾性衝突とは何か?

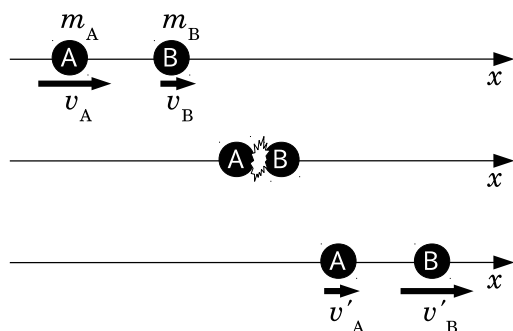


図 9.2 1 直線上を運動する 2 つの質点どうしの衝突。
上: 衝突前, 中: 衝突の瞬間, 下: 衝突後

● 問 134 x 軸上で 2 つの質点 A, B がそれぞれ速度 v_A, v_B で運動し(図 9.2 上), やがて互いに弾性衝突を起こし(図 9.2 中), 衝突後はそれぞれ速度 v'_A, v'_B で(ここではダッシュ'は微分ではなく「衝突後」を表すし)再び x 軸上で運動をする(図 9.2 下)。質点 A, B のそれぞれの質量を m_A, m_B とする。2 つの質点に外力は働いておらず, 2 つの質点どうしに働く力(内力)は衝突時だけに働くとする。

(1) 運動量保存則と力学的エネルギー保存則より, 以下

の 2 つの式が成り立つことを示せ:

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \quad (9.26)$$

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A v'^2_A + \frac{1}{2} m_B v'^2_B \quad (9.27)$$

(2) 式 (9.26), 式 (9.27) から次式を示せ:

$$m_A (v'_A - v_A) = -m_B (v'_B - v_B) \quad (9.28)$$

$$m_A (v'^2_A - v^2_A) = -m_B (v'^2_B - v^2_B) \quad (9.29)$$

(3) 式 (9.29) から次式を示せ:

$$m_A (v'_A - v_A)(v'_A + v_A) = -m_B (v'_B - v_B)(v'_B + v_B) \quad (9.30)$$

(4) 式 (9.30) の両辺を式 (9.28) で割って次式を示せ:

$$v'_A + v_A = v'_B + v_B \quad (9.31)$$

(5) 式 (9.31) を変形して次式を示せ:

$$v'_B - v'_A = -(v_B - v_A) \quad (9.32)$$

(6) 式 (9.32) を変形して次式を示せ:

$$\frac{|v'_B - v'_A|}{|v_B - v_A|} = 1 \quad (9.33)$$

式 (9.32) によって, 衝突の前と後で相対速度は向きが逆になることがわかった。つまり衝突前には互いに近づいて来たが, 衝突後では互いに遠ざかっていく。これは直感にも合う。

衝突後の相対速度の大きさ $|v'_B - v'_A|$ を衝突前の相対速度の大きさ $|v_B - v_A|$ で割ったものを反発係数とか跳ね返り係数とよび, 慣習的には e と表す。すなわち

$$e = \frac{|v'_B - v'_A|}{|v_B - v_A|} \quad (9.34)$$

である。弾性衝突では式 (9.33) からわかるように $e = 1$ である。非弾性衝突では e は 0 から 1 の間の値をとる。 $e = 0$ は物体 B が物体 A にべちゃっとくっついてしまう場合だ。たとえばゴルフボールとゴルフクラブの衝突に関する反発係数は 0.8 程度である。

よくある質問 177 e ってネイピア数(自然対数の底)じゃないんですか? ... 記号がかぶってて紛らわしいけどここでは違います。 e は反発係数で 0 から 1 までの間の値をとります。ネイピア数は $e = 2.718 \dots$ です。

● 問 135 問 134 の続きを考える。

- (1) 式 (9.31) を使って式 (9.28) から v'_B を消去することによって次式を示せ:

$$v'_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_A + \frac{2m_B}{m_A + m_B} v_B \quad (9.35)$$

- (2) 式 (9.31) を使って式 (9.28) から v'_A を消去することによって次式を示せ:

$$v'_B = \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} v_B + \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A \quad (9.36)$$

- (3) $m_A = m_B$ のとき次式を示せ:

$$v'_A = v_B \quad (9.37)$$

$$v'_B = v_A \quad (9.38)$$

- (4) $m_A \gg m_B$ のとき次式を示せ:

$$v'_A \doteq v_A \quad (9.39)$$

$$v'_B \doteq -v_B + 2v_A \quad (9.40)$$

式 (9.37), 式 (9.38) から, 2 つの質点の質量が等しければ弾性衝突によって速度が入れ替わる (図 9.3) ということがわかった。すなわち追いついた方は追いつかれた方の速度になり, 追いつかれた方は追いついた方の速度になる。この極端な場合は片方が静止してもう片方が

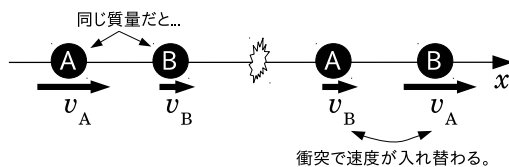


図 9.3 同一直線上を等速度運動する 2 つの質点どうしの衝突。質量が等しく, なおかつ弾性衝突なら, 速度が入れ替わる。

ぶつかってくる場合だ。ぶつかってきた方は衝突後に静止し, ぶつかられた方がすっとんでいく。ビリヤードの経験がある人はそれを知っているだろう。

ところで式 (9.39), 式 (9.40) から, 片方の質量が極端に大きいときは, 大きい方はほとんど速度を変えず (痛くも痒くもない), 小さい方は激しく速度を変える (ふっとばされる) ということがわかった (図 9.4)。小さな軽自動車と大きなトラックの衝突事故では軽自動車に乗っていた人の方がダメージが大きいのだ。

● 問 136 ボールを高さ h_0 から初速度 0 で真下に落としてバウンドさせる。ボールと地面の間の反発係数を e としよう。空気抵抗やボールの回転は無視する。地面の動きも無視する (地球はボールより遥かに大きいので)。

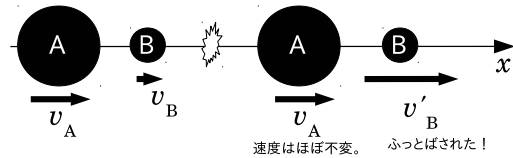


図 9.4 同一直線上を等速度運動する 2 つの質点どうしの衝突。片方が極端に大きいときは小さいほうがふっとばされる。

- (1) ボールが地面につく直前の速度を v_0 とする。力学的エネルギー保存則から次式を示せ:

$$v_0^2 = 2gh_0 \quad (9.41)$$

- (2) ボールが地面で跳ね返った直後の速度を v_1 とする。次式を示せ:

$$|v_1| = e|v_0| \quad (9.42)$$

- (3) ボールは地面で跳ね返ったあと上向きに運動し, いずれある点 (それを到達点とよぼう) に達してまた落ち始める。そのときの到達点の高さを h_1 として次式を示せ:

$$v_1^2 = 2gh_1 \quad (9.43)$$

- (4) 次式を示せ:

$$h_1 = e^2 h_0 \quad (9.44)$$

- (5) そのまま放っておけばまたボールは地面に衝突して跳ね返り, また落ちて地面に衝突して跳ね返り, ... ということを繰り返すだろう。 n を 1 以上の整数としてボールが n 回バウンドしたあとの到達点の高さを h_n とすると次式を示せ:

$$h_n = e^{2n} h_0 \quad (9.45)$$

- (6) $e = 0.8$, $h_0 = 10$ m のとき, 到達点の高さが 0.1 m 以下になるまでに何回バウンドするか?

● 問 137 2 つのボールをわずかに隙間をあけて縦に重ねて高さ h から (初速度 0 で) 真下の地面に落とし, バウンドさせる。下のボールを「ボール A」とし, その質量を m_A とする。上のボールを「ボール B」とし, 質量を m_B とする。ボール B はボール A よりはるかに小さい ($m_A \gg m_B$) とする。ボール A と地面の衝突やボール A とボール B の衝突は弾性衝突であるとする。重力加速度を g とする。上向きに座標軸をとる。

- (1) 地面に衝突する直前 (図 9.5 中左) のボール A の速度を v_0 とする。 $v_0 = \sqrt{2gh}$ であることを示せ。

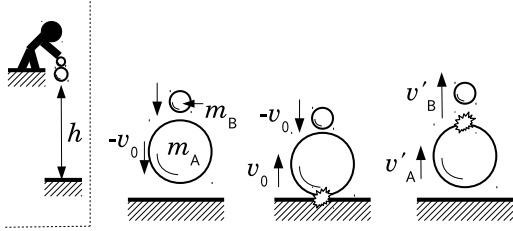


図 9.5 2 段のボールの落下と跳ね返り。問 137。

(2) ボール A が地面に衝突して跳ね返った直後はボール B はまだボール A の上空にあるとする (図 9.5 中右)。このときのボール A の速度を v_A 、ボール B の速度を v_B とする。次式を示せ:

$$v_A = v_0 \quad (9.46)$$

$$v_B = -v_0 \quad (9.47)$$

(3) その直後にボール B はボール A に衝突して跳ね返る (図 9.5 右端)。衝突直後のボール B の速度を v'_B とする。これらの一連の衝突は地面付近の狭い範囲で起きるので、重力によるポテンシャルエネルギーの変化を無視しよう。すると式 (9.40) が成り立つことから次式を示せ:

$$v'_B = 3v_0 \quad (9.48)$$

(4) ボール B はボール A に衝突して跳ね返った後、もとの落下開始点 (高さ h) の何倍の高さまで飛び上がるか?

9.6 (発展) 質点系バージョンの運動量保存則の証明

(しんどい人は本節は飛ばしてもかまわない。)

ここで質点が 3 つ以上の質点系について運動量保存則を証明しておこう。いま n 個の質点が互いに力を及ぼしあいながら運動する状況を考えよう。 k 番目 ($k = 1, 2, \dots, n$) の質点のことを「質点 k 」とよび、その質量、位置、速度をそれぞれ m_k , $\mathbf{r}_k$, $\mathbf{v}_k$ とする。質点 k にかかる力 $\mathbf{F}_k$ は、その他の質点から受ける力 (内力) と、それ以外から受ける力 (外力) の和である:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_k &= \mathbf{F}_{k1} + \mathbf{F}_{k2} + \dots + \mathbf{F}_{kn} + \mathbf{F}_k^e \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{kj} + \mathbf{F}_k^e \end{aligned} \quad (9.49)$$

ここで $\mathbf{F}_{kj}$ は質点 k が質点 j から受ける力である。質点 k が自分自身から受ける力は考えなくてよいので $\mathbf{F}_{kk}$ は考えなくてよいのだが、ここでは形式的に残しておい

て、そのかわり $\mathbf{F}_{kk} = 0$ としよう。また、 $\mathbf{F}_k^e$ は質点 k にかかる外力である。例として図 9.6 に 3 個の質点からなる質点系に働く力を示す:

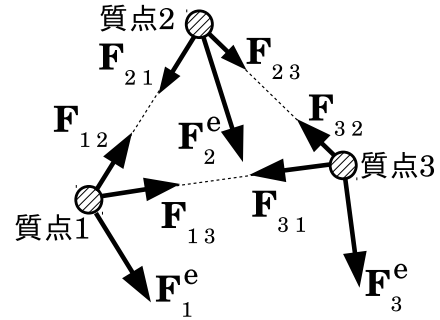


図 9.6 質点系に働く力。

さて質点 k について式 (9.10) を考えると

$$m_k \mathbf{v}_k(t_1) - m_k \mathbf{v}_k(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_k dt \quad (9.50)$$

である。同様の式を全ての質点に関して考えて

$$m_1 \mathbf{v}_1(t_1) - m_1 \mathbf{v}_1(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_1 dt$$

$$m_2 \mathbf{v}_2(t_1) - m_2 \mathbf{v}_2(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_2 dt$$

...

$$m_n \mathbf{v}_n(t_1) - m_n \mathbf{v}_n(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_n dt$$

これらを辺々足し合わせると

$$\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k(t_1) - \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \right) dt \quad (9.51)$$

となる。この右辺の中の $\sum$ の部分 (各質点にかかる力の総和) は式 (9.49) を使うと

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{kj} + \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^e \quad (9.52)$$

となるが、この 2 重の $\sum$ の中には任意の 2 つの質点 k, j どうしが互いに及ぼしあう力、つまり $\mathbf{F}_{kj}$ と $\mathbf{F}_{jk}$ が入っており、これらは (作用反作用の法則によって) 互いに逆向きで大きさが同じ為、打ち消し合う (そして前述のように $\mathbf{F}_{kk} = 0$ である) したがって

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^e \quad (9.53)$$

となる。よって式 (9.51) は

$$\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k(t_1) - \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^e \right) dt \quad (9.54)$$

となる。この左辺の第1項と第2項はそれぞれ時刻 t_1 、時刻 t_0 の全運動量であり、右辺は時刻 t_0 から t_1 の間の外力の総和による力積である。したがって式 (9.54) は「全運動量の変化は外力の総和による力積に等しい」ということになる。そして外力が無い場合はもちろんその力積は0なので、結局「外力を受けずに運動する場合、質点系の全運動量は不変である」ということが示された。

ついでにこの話を重心を使って表しておこう。今考えている質点系の重心 $\mathbf{R}$ は式 (9.19) で表される。その両辺を時刻 t で微分し、重心の速度を $\mathbf{V}$ と書けば

$$\mathbf{V} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k}{\sum_{k=1}^n m_k} \quad (9.55)$$

となる。また、質点系の全質量を M と書こう:

$$M := \sum_{k=1}^n m_k \quad (9.56)$$

そして式 (9.55) の両辺に M を掛けて左右を入れ替えると

$$\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{v}_k = M \mathbf{V} \quad (9.57)$$

となる。これを使うと式 (9.54) は次式のように書ける:

$$M \mathbf{V}(t_1) - M \mathbf{V}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^e \right) dt \quad (9.58)$$

つまり「重心の運動量の変化は外力の総和による力積に等しい」、そして「外力を受けずに運動する場合、重心の速度は不変である」といえる。

9.7 回転運動再考

ところで太陽のまわりを地球が円運動（公転）している系を考えよう。太陽と地球だけの系には外力は働かないので、運動量保存則から、全運動量は一定のはずだ。さて地球の速度は大きさこそ一定であっても、円軌道に沿って時々刻々と向きを変える。すると地球の運動量は大きさこそ一定であっても、時々刻々と向きが変わるはずだ。一方、太陽はほぼ静止しているとみて運動量を見捨てる。ということは全運動量は地球の運動量だけ

だ。ということは全運動量が時々刻々と変化している、ということになる!! これは運動量保存則に矛盾している。どこが間違っているだろうか?

実はこの考察は「太陽はほぼ静止しているとみて運動量を見捨てる」が間違っている。地球が太陽から引力を受けるように太陽も地球から引力を受ける（「作用・反作用の法則」）。その力によって太陽も小さいながらも円運動するのだ。しかもその運動量は絶えず地球の運動量とは逆向きで大きさが同じであるため、太陽と地球の全運動量は0で一定なのである^{*3}。

9.8 量子力学におけるエネルギーと運動量

エネルギーや運動量についてここまで述べてきた事はニュートン力学に限定した話である。これが量子力学、つまり電子や光子（光の粒子）の力学になるとだいぶ雰囲気の違いになる。本章の最後にそれについて説明しよう。

電子や光子は粒子の性質と波の性質の両方を持つ。なんともよくわからない奇妙な話だが、それがどういうことかは様々な解説書があるので興味があればそちらを参照して欲しい（本書の最後にも少し触れる）。

電子や光子のように粒子の性質と波の性質の両方を持つ存在を量子とよぶ。量子に関する物理学が量子力学である。

量子の波長が λ であり、振動数（周期の逆数）が ν であるとき、量子の運動量 $\mathbf{p}$ とエネルギー E について次式が成り立つことが実験的にわかっている:

$$|\mathbf{p}| = \frac{h}{\lambda} \quad (9.59)$$

$$E = h\nu \quad (9.60)$$

ここで h はプランク定数とよばれ、 $h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J s}$ である。

演習問題 14 さっき（問 137）はボールを2段にして落としたが、こんどはボールをもっとたくさん用意して重ねて落としてみよう。 n 個のボールを縦に重ねて前問と同じように高さ h から落とす。ボールは上のもののほど軽く、隣りあう上下のボールは上のボールのほうが下のボールよりはるかに小さい（軽い）とする。最下部のボールが地面に弾性衝突して跳ね返った後、ボール同士は多段階に弾性衝突する（図 9.7）。最後に最上部のボー

^{*3} ただし太陽と地球をあわせた系の重心に対して静止している座標系で見た場合。

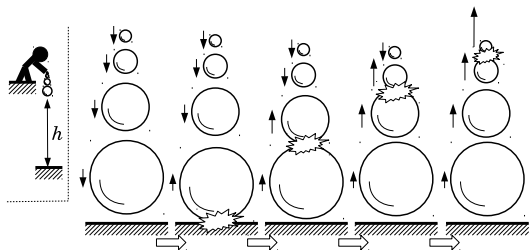


図 9.7 多段のボールの落下と跳ね返り。演習問題 14。

ルが跳ね上がる時のそのボールの速度を v'_n とする。

(1) 次式を示せ:

$$v'_n \doteq (2^n - 1)v_0 \quad (9.61)$$

(2) 最上部のボールはもとの落下開始点 (高さ h) の何倍の高さまで飛び上がるか?

(3) ボール群を $h = 5 \text{ m}$ から落下させ、最上部のボールを宇宙の彼方まで飛ばすにはボールを 10 段程度にすればよいことを示せ。(ヒント: 第二宇宙速度)

演習問題 15 テニスのトップ選手の打つボールの速さは 200 km/h 程度である。フェデラー選手が 200 km/h のサービスを打ち、それを錦織圭選手が 200 km/h で打ち返した。その際、錦織選手のラケットとボールが接触している時間は 3.0 ms だった。その間、ボールに働いた力の大きさを見積もれ。また、そのような大きな力が発生するにもかかわらず錦織選手の右腕が壊れないのはなぜだろう? ただしテニスボールの質量を 60 g とする。

演習問題 16 質量 50 kg の学生が質量 10 kg の台車の上に乗って台車から見て 1.0 m s^{-1} の早さで歩き始めた。そのとき台車は学生が歩く方向とは逆方向に動き始めた。台車の外から見た台車の動く速さを求めよ。

演習問題 17 宇宙空間で直線上を加速しながら進むロケットの運動を考えよう。ロケットにはたくさんの燃料が積まれている。燃料込みでのロケットの質量を M とする。ロケットは相対速度 u で燃料を後方に噴射することによって加速していく。と同時に噴射した燃料のぶんだけ質量 M は減る。すなわちロケットは質量が減るほど速度が増す。ロケットの初期速度を 0 、初期の質量を M_0 とする。ロケットの速度 v と質量 M の関係を求めよ。ヒント: ある瞬間と、そこから少し経った瞬間での運動量保存則を考える。ロケットの質量 M は $M + dM$ に変わる ($dM < 0$)。 dM は出て行った微小な燃料の質量 (にマイナスをつけたもの)。燃料は $v - u$ という速度でロケットから離れる。運動量保存則

は $Mv = (M + dM)(v + dv) + (-dM)(v - u)$ という式になることがわかるだろう (右辺第一項はロケットの運動量、右辺第二項は噴射された燃料の運動量)。

9.9 解答

答 128

- (1) $m_A = m_B = 1 \text{ kg}$, $\mathbf{v}_A = (1 \text{ m s}^{-1}, 0 \text{ m s}^{-1})$, $\mathbf{v}_B = (0 \text{ m s}^{-1}, 1 \text{ m s}^{-1})$ として式 (9.4) に代入すると $\mathbf{v} = (0.5 \text{ m s}^{-1}, 0.5 \text{ m s}^{-1})$ 。
 (2) $|\mathbf{v}| = |(0.5 \text{ m s}^{-1}, 0.5 \text{ m s}^{-1})| = 0.71 \text{ m s}^{-1}$ 。

答 129 略。

答 132

- (1) A, B とともに同じ運動エネルギー: 0.5 J をもつ。したがって全運動エネルギーは 1 J 。
 (2) $(m_A + m_B)|\mathbf{v}|^2/2 = 0.5 \text{ J}$ 。

答 133 略。

答 134 略。

答 135 (1), (2), (3) は略 (実直に計算すれば導出できる)。 (4) 式 (9.35), 式 (9.36) の分子分母を m_A で割ると

$$v'_A = \frac{1 - m_B/m_A}{1 + m_B/m_A} v_A + \frac{2m_B/m_A}{1 + m_B/m_A} v_B$$

$$v'_B = \frac{m_B/m_A - 1}{1 + m_B/m_A} v_B + \frac{2}{1 + m_B/m_A} v_A$$

となる。ここで $m_A \gg m_B$ なので $m_B/m_A \doteq 0$ とすると、上の 2 つの式は

$$v'_A \doteq \frac{1 - 0}{1 + 0} v_A + \frac{2 \times 0}{1 + 0} v_B = v_A$$

$$v'_B \doteq \frac{0 - 1}{1 + 0} v_B + \frac{2}{1 + 0} v_A = -v_B + 2v_A$$

となり与式を得る。

答 136

- (1) 地面を基準点とする。ボールを手放した瞬間は、重力によるボールのポテンシャルエネルギーは mgh_0 で、運動エネルギーは初速度 0 なので 0 。したがって力学的エネルギーは mgh_0 。一方、地面につく直前はボールのポテンシャルエネルギーは 0 で、運動エネルギーは $mv_0^2/2$ 。したがって力学的エネルギーは $mv_0^2/2$ 。力学的エネルギー保存則より $mgh_0 = mv_0^2/2$ 。ここから与式を得る。
 (2) 略。 (e の定義から)

- (3) 略。(式 (9.41) と同様)
- (4) 略。(式 (9.41), 式 (9.42), 式 (9.43) より v_0, v_1 を消去)
- (5) 前小問と同様に $h_n = e^2 h_{n-1}$ 。これは公比 e^2 の等比数列。したがって与式を得る。
- (6) $h_0 = 10 \text{ m}$ で, $h_n = e^{2n} h_0 < 0.1 \text{ m}$ より,
 $e^{2n} < 0.01$ となる。 $e = 0.8$ だから $0.8^{2n} < 0.01$ 。
 $n = 10$ のとき $0.8^{2n} = 0.0115 > 0.01$ 。 $n = 11$ のとき $0.8^{2n} = 0.0074 < 0.01$ 。したがって $n = 11$,
 つまり 11 回バウンドする。

答 137 (1) ボール A について落下から地面での衝突の直前までを考えると, 力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2} m_A v_0^2 = m_A g h \quad (9.62)$$

これを v_0 について解けば与式を得る。(2), (3) は略(誘導にしたがって実直に計算すれば導出できる)。 (4) ボール B について (1) と同様に考えれば次式のようになる:

$$\frac{1}{2} m_B v_0'^2 = m_B g h \quad (9.63)$$

一方, 最高到達点の高さを H とし, 衝突直後から最高点到達までを考えると, 力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2} m_B v_B'^2 = m_B g H$$

ここで (3) より $v_B' = 3v_0$ だから

$$\frac{9}{2} m_B v_0^2 = m_B g H \quad (9.64)$$

となる。式 (9.64) の辺々を式 (9.63) の辺々で割ると $9 = H/h$ となる。すなわち $H = 9h$ 。すなわちもとの高さの 9 倍まで上がる。

第10章

力学的エネルギー保存則(2)

第8章では「力学的エネルギー保存則」が直線上(1次元)での質点の運動について成り立つことを確かめた。本章ではこの法則を3次元空間に拡張する。それによってより多くの様々な現象を「力学的エネルギー保存則」で説明できるのだ。

まずこれまで1次元の直線上での運動に限定して考えてきた「仕事」「ポテンシャルエネルギー」「運動エネルギー」を3次元空間で再定義しよう。とりあえずいちばん簡単なのは「運動エネルギー」だ。

10.1 3次元空間における運動エネルギー

第8章を振り返ると、質量 m の質点が速度 v で直線的な運動(1次元の運動)をしているとき、その運動エネルギー $T(v)$ は

$$T(v) = \frac{1}{2}mv^2 \quad (10.1)$$

と定義された(式(8.4))。速度は本来ベクトルなので、質点の運動が3次元的ならば式(10.1)の v^2 は速度ベクトル $\mathbf{v}$ によって、 $|\mathbf{v}|^2$ と置き換えたい。ここで $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ とすると、 $|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ である。多くの教科書では $|\mathbf{v}|^2$ のことを単に $\mathbf{v}^2$ と書く慣習がある。ここでもその慣習に習おう。すなわち

$$\mathbf{v}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad (10.2)$$

である(約束)。そこで3次元では式(10.1)のかわりに

$$T(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \quad (10.3)$$

を運動エネルギーの定義としよう。これは運動が1次元のときには式(10.1)に帰着する。つまり式(10.1)を内包した定義になっている。

式(10.3)は明らかにスカラー量(大きさは持つが向きは持たない量)である。つまり運動エネルギーはスカラーである。このことは運動エネルギーに限らない。どんな形のエネルギーもスカラー量なのである。それは工

ネルギーは仕事に等価な量だからである。そして次節で見るように、仕事はスカラー量なのである。

10.2 3次元空間における仕事は「線積分」で定義

次に仕事を3次元に拡張する。仕事とは「力と、その力が働く質点が“力と同じ向き”に動いた距離との掛け算」であった。3次元空間でもこの定義を採用する:

ある質点にかかる力を $\mathbf{F}$ とし、その質点が動いた距離と方向を表すベクトル(これを変位ベクトルという)を $\Delta\mathbf{r}$ とする。 $\mathbf{F}$ と $\Delta\mathbf{r}$ のなす角を θ とすると、「その力が働く質点が“力と同じ向き”に動いた距離」は

$$|\Delta\mathbf{r}| \cos \theta \quad (10.4)$$

となる。したがって仕事 ΔW は

$$\Delta W = |\mathbf{F}| |\Delta\mathbf{r}| \cos \theta \quad (10.5)$$

となる。ところが内積の定義から、これは

$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} \quad (10.6)$$

と同じである*1。式(10.6)は式(4.13)を3次元に拡張した式でもある。

よくある質問 178 ベクトルの内積なんてどうして勉強するのかと思ってましたが、こういうことだったんですね。... そうです。そしてベクトルどうしの内積の結果はスカラーですね? だから仕事はスカラー量なのです。他にも内積の用途はいろいろあります。

式(10.6)は質点が動く範囲で $\mathbf{F}$ が一定であるときにしか成り立たない。一般には $\mathbf{F}$ は場所によって異なりうる。そこで質点の移動の経路をたくさんの細かい区間に刻んで、各区間では $\mathbf{F}$ がほとんど一定であるとみなそ

*1 式(10.6)の中の「 $\cdot$ 」はベクトルどうしの内積を表す。内積とは何かがわからない人は数学の教科書を参照せよ。

う。つまり式 (4.16) から式 (4.20) までと同じように考えればよい。

いま、位置ベクトル $\mathbf{r}_0$ の位置から位置ベクトル $\mathbf{r}_n$ の位置まで質点が力を受けて動くとしよう。この経路を細かく細かく刻み、途中の点の位置ベクトルを $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$ とする。いま、 k を 1 以上 n 以下の整数とし、 $\mathbf{r}_{k-1}$ と $\mathbf{r}_k$ という隣接する 2 つの点を結ぶ変位ベクトルを

$$\Delta \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1} \quad (10.7)$$

とする。この 2 点の間で力は $\mathbf{F}_k$ でほぼ一定とする (図 10.1)。この 2 点の間で力がなす仕事 ΔW_k は式 (10.6)

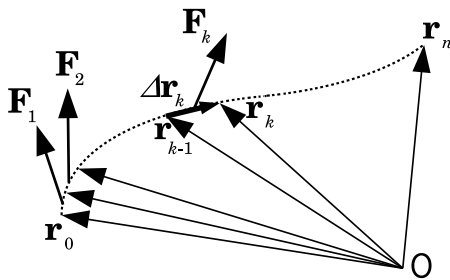


図 10.1 質点の動く経路を細かく分割する。

より $\Delta W_k \doteq \mathbf{F}_k \cdot \Delta \mathbf{r}_k$ となる。これを全区間について合計すれば $\mathbf{r}_0$ から $\mathbf{r}_n$ までの移動でなされる仕事 $W_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}_n}$ になる:

$$W_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}_n} \doteq \sum_{k=1}^n \Delta W_k \doteq \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \Delta \mathbf{r}_k \quad (10.8)$$

これは式 (4.18) を 3 次元に拡張した式でもある。ここで刻みをどんどん小さくしていけば

$$W_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}_n} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \mathbf{r}_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \Delta \mathbf{r}_k \quad (10.9)$$

となる。これは積分の定義より (Σ は $\int$ になり、 Δ は d になる!)

$$W_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}_n} = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_n} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.10)$$

となる ($\mathbf{r}_n$ を改めて $\mathbf{r}$ とおいた)。

よくある質問 179 何ですかこの積分!? 普通の積分は $\int$ なんちゃら dx とか $\int$ なんちゃら dt みたいに、 d がつくのは x や t などです。でもこれは $d\mathbf{r}$ って、ベクトルに d がついてます。しかも内積!? ... 初めて見たらちょっとびっくりしますよね。でもこれはそんなに不思議なことではありません。積分の定義を思い出して下さい。「関数と微小量の掛け算」がここ

では力 (位置の関数で、ベクトル) と変位 (位置の変化を表す微小量で、ベクトル) の内積 (掛け算をベクトルに拡張したもの) になっているだけです。

この式は式 (4.20) を 3 次元に拡張した式だ。この積分は始点 $\mathbf{r}_0$ と終点 $\mathbf{r}$ のみならず、移動の経路にも依存するから、その経路を Γ と名づければ以下のように言える: 経路 Γ を移動する質点にかかる力 $\mathbf{F}$ のなす仕事 W_Γ を次式で定義する:

$$W_\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.11)$$

ここで $\mathbf{r}$ は位置ベクトル。この式は仕事の最も一般的な定義式である。

ここで出てきた積分は君にとって目新しいものだろう。ここでは被積分関数も積分変数もベクトルであり、「関数と微小量の掛け算」がここではベクトルの内積であり、しかも積分区間が「経路 Γ 」であるのだ。このように、ある経路に沿ってベクトルと微小ベクトルの内積を足し合わせるような積分を線積分という。3 次元では仕事は線積分で定義されるのだ。

- 問 138 仕事を 3 次元空間で定義せよ。

10.3 3 次元空間におけるポテンシャルエネルギー

次に「ポテンシャルエネルギー」の定義も 3 次元空間に拡張しよう。といっても仕事の定義を上述のように改めること以外は 1 次元のときと同じだ。式 (4.40), つまり式 (4.43), 式 (4.44) の位置 x を位置ベクトル $\mathbf{r}$ に置き換えたものが 3 次元空間におけるポテンシャルエネルギーだ。すなわち、ポテンシャルエネルギーを $U(\mathbf{r})$ とすると

$$\text{定義 1': } U(\mathbf{r}) := -W_{O \rightarrow \mathbf{r}} \quad (10.12)$$

ここで $W_{O \rightarrow \mathbf{r}}$ は、物体を基準点 O から点 $\mathbf{r}$ まで運ぶときに、物体にかかっている保存力がなす仕事。

$$\text{定義 2': } U(\mathbf{r}) := W'_{O \rightarrow \mathbf{r}} \quad (10.13)$$

ここで $W'_{O \rightarrow \mathbf{r}}$ は、物体を基準点 O から点 $\mathbf{r}$ まで運ぶときに、かかっている保存力に逆らって誰かがなす仕事。

$$\text{定義 3': } U(\mathbf{r}) := W_{\mathbf{r} \rightarrow O} \quad (10.14)$$

ここで $W_{\mathbf{r} \rightarrow O}$ は、物体を点 $\mathbf{r}$ から基準点 O まで運ぶときに、物体にかかっている保存力がなす仕事。

無論これらの3つの定義は互いに同値だ。力が保存力でなければならないということに注意しよう。

- 問 139 物体が保存力 $\mathbf{F}$ を受けて、ある点 $\mathbf{r}_0$ から別の点 $\mathbf{r}_1$ まで移動するとき、 $\mathbf{F}$ がなす仕事 $W_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}_1}$ は

$$W_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}_1} = U(\mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}_1) \quad (10.15)$$

であることを示せ。ここで U はポテンシャルエネルギーである。

- 問 140 保存力が3次元空間の任意の閉曲線（始点と終点が一致する曲線）に沿ってなす仕事は必ず0になることを示せ。

10.4 3次元空間における力学的エネルギー保存則

役者は揃った。ではいよいよ力学的エネルギー保存則が3次元でも成り立つことを確認していこう。1次元で力学的エネルギー保存則を導いたとき、式(8.7)から式(8.9)にかけて運動方程式を位置で積分した。3次元でも同じ事をやるのだ。まず運動方程式:

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (10.16)$$

を考える。 $\mathbf{F}$, $\mathbf{v}$, m , t はそれぞれ質点に働く力、質点の速度、質点の質量、そして時刻である。質点の位置ベクトルを $\mathbf{r}(t)$ とする。時刻 t と、そこから微小時間 dt だけ経過した $t + dt$ で、質点は少し違う位置にいる（移動している）。その差、つまり変位を $d\mathbf{r}$ と書こう。つまり

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + dt) - \mathbf{r}(t) \quad (10.17)$$

である。この両辺を dt で割ったもの（つまり位置を時刻で微分したもの）が速度 $\mathbf{v}$ だ。つまり $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ だ。したがって次式が成り立つ:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt \quad (10.18)$$

式(10.16)に式(10.18)を辺々、内積すると次式を得る:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt \quad (10.19)$$

これはちょうど式(8.8)を3次元に拡張した式だ。

ここで時刻 t_0 から t_1 までの運動を考える。 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(t_1)$ とし、 $\mathbf{r}_0$ から $\mathbf{r}_1$ までの質点の運動の軌跡を Γ とする。 Γ をたくさんの短い区間に分割し、それぞれの区間で式(10.19)を考

えて足し合わせる。つまり時刻 t_0 から t_1 までの間で式(10.19)を積分すると

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t_1} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt \quad (10.20)$$

となる。左辺は式(10.11)の右辺と同じ形になっている。つまり質点に働く力がなす仕事 W_{Γ} である。

ここで $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ とすれば、

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right) \quad (10.21)$$

である。これらを使って式(10.20)の右辺を成分で書くと次のようになる:

$$\int_{t_0}^{t_1} m \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right) \cdot (v_x, v_y, v_z) dt \quad (10.22)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} m \left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt} \right) dt \quad (10.23)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} m v_x \frac{dv_x}{dt} dt + \int_{t_0}^{t_1} m v_y \frac{dv_y}{dt} dt + \int_{t_0}^{t_1} m v_z \frac{dv_z}{dt} dt$$

$$= \int_{v_x(t_0)}^{v_x(t_1)} m v_x dv_x + \int_{v_y(t_0)}^{v_y(t_1)} m v_y dv_y + \int_{v_z(t_0)}^{v_z(t_1)} m v_z dv_z$$

$$= \left[\frac{1}{2} m v_x^2 \right]_{v_x(t_0)}^{v_x(t_1)} + \left[\frac{1}{2} m v_y^2 \right]_{v_y(t_0)}^{v_y(t_1)} + \left[\frac{1}{2} m v_z^2 \right]_{v_z(t_0)}^{v_z(t_1)}$$

$$= \frac{1}{2} m (v_x^2(t_1) + v_y^2(t_1) + v_z^2(t_1)) - \frac{1}{2} m (v_x^2(t_0) + v_y^2(t_0) + v_z^2(t_0)) \quad (10.24)$$

$$= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_1^2 - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2 \quad (10.25)$$

となる。したがって式(10.20)は次式のようにになる:

$$W_{\Gamma} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_1^2 - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2 \quad (10.26)$$

ここで式(10.3)を使うと式(10.26)は

$$W_{\Gamma} = T(\mathbf{v}_1) - T(\mathbf{v}_0) \quad (10.27)$$

となる。ここで $T(\mathbf{v})$ は質点の運動エネルギーである。

式(10.27)は1次元で導いた式(8.13)と同じ形の式だ。つまり3次元の運動でも力がなした仕事は運動エネルギーの変化に等しいということが成り立つ。

ところで力が保存力の場合は、仕事 W_{Γ} は経路 Γ のとりかたによらず出発点 $\mathbf{r}_0$ と $\mathbf{r}_1$ だけで決まる。つまり W_{Γ} は式(10.15)の $W_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}_1}$ と同じである。そこで、式(10.15)と式(10.27)から

$$U(\mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}_1) = T(\mathbf{v}_1) - T(\mathbf{v}_0) \quad (10.28)$$

となる。あるいは

$$T(\mathbf{v}_0) + U(\mathbf{r}_0) = T(\mathbf{v}_1) + U(\mathbf{r}_1) \quad (10.29)$$

となる。すなわち、運動の最初(時刻 t_0)と運動の最後(時刻 t_1)で「運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和」は等しいのだ。1次元のときと同様に、「運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和」のことを「力学的エネルギー」とよぼう(定義)。すなわち式(10.29)によって3次元における力学的エネルギー保存則が確かめられた!

- 問 141 運動方程式から式(10.29)を導出せよ(上の議論を整理・再現すればよい)。

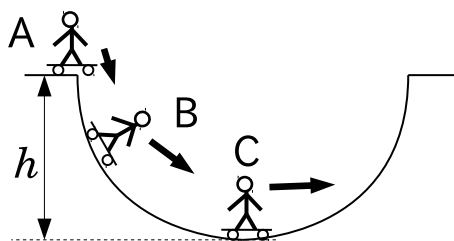


図 10.2 スケートボードのハーフパイプ

- 問 142 スケートボードでハーフパイプを降りる人(スケートボードとあわせて質量 m)の運動を考えよう(図 10.2)。ハーフパイプの縁 A にいるときは速さ 0 である。そこから静かにハーフパイプの側面を降りはじめ、重力にまかせて加速しながら降りていき(点 B)、ハーフパイプの底(点 C)に至る。点 C に至ったときは速さ v で水平方向に動いている。ハーフパイプの底と縁の高度差は h であるとする。ただし摩擦や空気抵抗や車輪の回転に伴うエネルギーなどは無視する。

- (1) 重力加速度を g とする。次式を示せ:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad (10.30)$$

- (2) $h = 5.0 \text{ m}$ のとき v を求めよ。
- (3) ハーフパイプの断面が半円だすると点 C でその人が受ける垂直抗力の大きさは重力の何倍か?

10.5 振り子の運動

振り子の運動を考えてみよう。天井に固定された点 P から長さ l の糸が垂れており、その先に質量 m の質点

がついている(図 10.3)。質点が最も下に来たとき(糸が鉛直になったとき)の位置を O とする。糸をぴんと張ったまま質点を少し持ち上げたときの位置を Q とする。Q から静かに質点を手放すと質点は P, O, Q を含む鉛直平面内で振動運動をする。

時刻 t で質点は点 $X(t)$ にあるとし、角 OPX をラジアンであらわしたものを θ としよう。当然 θ は時間の関数だ。以下、糸の質量は 0 とする。空気抵抗は無視する。

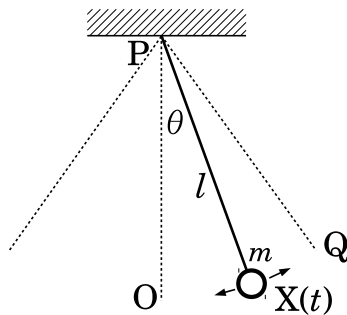


図 10.3 振り子

- 問 143 この質点の運動について

- (1) 時刻 t における質点の速度を $\mathbf{v}(t)$ とすると

$$|\mathbf{v}(t)| = \left| l \frac{d\theta}{dt} \right| \quad (10.31)$$

であることを示せ。ヒント: t から $t + dt$ の間に X が移動するのは扇形の弧の部分である。その弧の長さ(つまり移動距離)は「半径」かける「角度の変化」であり、「角度の変化」は $\theta(t + dt) - \theta(t)$ である。また、速度の絶対値(つまり速さ)は t から $t + dt$ の間に X が移動した距離を時間間隔 dt で割ったものだ。

- (2) 時刻 t における質点の運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U はそれぞれ次のようになることを示せ:

$$T = \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (10.32)$$

$$U = mgl(1 - \cos \theta) \quad (10.33)$$

ただし質点が点 O にあるとき $U = 0$ と定める。

- (3) 働く力は重力と張力だけだが、重力は保存力であり、張力は仕事をしない(移動方向と力の方向が直交しているので)。したがって力学的エネルギー保存則が成り立つ。すなわち $T + U$ は時刻 t によらず一定である。したがって $T + U$ を t で微分すると 0 にならねばならない。このことから次式を導け:

$$ml^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgl \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (10.34)$$

(4) その結果、次式（振り子の運動をあらわす微分方程式）を得ることを示せ：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (10.35)$$

(5) θ が 0 に近い場合、振り子の運動方程式は近似的に次のようになることを示せ：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta \quad (10.36)$$

この近似式が成り立つとして以下の小問に答えよ：

(6) $\omega = \sqrt{g/l}$ とすると式 (10.36) は次式になることを示せ（これは関数 $\theta(t)$ に関する微分方程式）：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta \quad (10.37)$$

(7) $\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t$ は上の微分方程式の解であることを示せ。ただし θ_0 は定数とする。

(8) 振り子の周期 τ を g と l であらわせ*2。

(9) $l = 1.0 \text{ m}$ のとき振り子の振動の角速度と周期は？

(10) l を何倍にすれば振り子の周期は半分になるか？

● 問 144 前問で見たように、振幅が十分に小さいときに限れば（すなわち θ が 0 に近ければ）、振り子の周期は糸の長さ l と重力加速度 g だけで決まってしまう、質点の質量 m や振れ幅 θ_0 などには依らない。これは振り子の重要な性質である（これを振り子の等時性という）。

(1) これを利用して重力加速度 g を測定する。つまり、長さ l の糸の先に適当な重りをつけて振動させ、その周期 τ を測ったとする。では l と τ から g を求める式は？

(2) 月面では地球上に比べて振り子の周期は何倍になるか？

● 問 145 2 つの互いに同仕様の振り子時計がある。これらの時刻を互いに合わせた後、東京（重力加速度 9.798 m s^{-2} ）と札幌（重力加速度 9.805 m s^{-2} ）のそれぞれに置いた。1 日たつと札幌の時計は東京の時計より何秒進んでいる（もしくは遅れている）か？

よくある質問 180 振り子といえばフーコーですね。振り子で地球の自転を証明したんですね ... そうです。自転によって生じる「コリオリ力」という見かけの力を実証しました。

よくある質問 181 高校物理では式 (10.35) は質点にかかる重力を分解すれば導けたと思います。なぜここではわざわざ力学的エネルギー保存則を使ったのですか？ ... 質点は実際は円弧を動くのに、高校物理学ではそれを水平方向の直線上での運動とみなしています。ここでの導出はそのような単純化をせずに導出しています。ちなみにこれは P.139 で学ぶ「剛体振り子」の伏線です。

10.6 地球の形は「ジオイド」で表す

さて、地球が作る重力に関するポテンシャルエネルギーを式 (4.45) で検討した。そのときは地球を質点とみなした。これはモデル化であり近似である。実際は地球は大きさを持った物体だが、もしも地球が密度一様の球体ならば、地球を質点とみなすモデルで構わないということが数学的に証明できる（ここでは証明しないが）。

ところが地球の形をよく調べると、それは真球ではなく、北極・南極間を少しつぶしたような形、つまり横から見たら楕円っぽい形、楕円を回転させた形に近いことがわかっていて。地球の形に最もよくフィットする「楕円を回転させた形」を地球楕円体という。

ところが地球の形をもっとよく調べると、地球楕円体からさらにほんのちょっとだけずれた、いびつな形であることがわかっていて。この形は「ジオイド」という概念で表される。この節の目標はこの「ジオイド」を理解することである。というのもジオイドは標高の基準であり、農地・森林の測量や灌漑水路の設計など生物資源学類の分野で実用上大切な概念だからである。

そもそも「地球の形」とは何だろうか？ 地球の「表面」が作る形のことだろうか？ ところが地球表面の面積の 7 割は海であり、海面は波や潮汐によって絶えず上下している。また、陸地の表面も穴を掘ったりビルを立てたりすることで変化するし、地震が起きたら揺れて上下する。そのようなことまで考えると地球の形を定義することは意外に難しい。

そこで「ジオイド」である。ジオイドは、「地球のまわりの重力*3）のポテンシャルエネルギーが一定になる面のうち、海水面の平均的な位置に最もよく一致するもの」と定義される。そしてジオイドが地球の形をもっともよく表すものとみなすのだ。なんと、地球の形を表すのにポテンシャルエネルギーの概念が必要なのだ!!*4

*2 普通は周期は T で表す慣習が多いが、ここでは T は運動エネルギーの記号に使っているので周期は τ （ギリシア文字のタウ）を使う。

*3 ここでは質量に比例してかかる力を重力とよんでいる。したがって地球の自転に起因する遠心力も「重力」である。

*4 ところが「ポテンシャルエネルギー」をちゃんと理解している

地球がもし質点でモデル化できるならポテンシャルエネルギーは式 (4.45) のように地球の中心からの距離だけで決まる。つまり地球中心から等しい距離にある面 (それは球面) がジオイドになるだろう。しかし実際は地球は質点ではモデル化できず、式 (4.45) は単なる近似であり、実際のポテンシャルエネルギーはそれよりも複雑な数式になる。その数式を追求・説明すること自体が「測地学」というひとつの学問分野になるほどの重いテーマなのだが、ともあれ現在の測地学ではジオイドはかなりの高精度で説明されている (その説明には人工衛星を使う)。

よくある間違い 8 ジオイドを「地球が作る重力 (の大きさ) が一定の面のうち...」という勘違い。... 「重力 (の大きさ)」が一定なのではなく「重力のポテンシャルエネルギー」が一定です。これらは互いに違います。ポテンシャルエネルギーが同じでも重力 (の大きさ) は違うということはありません。というも次節で述べるように、重力 (の大きさ) はポテンシャルエネルギーそのものと対応するのではなく、ポテンシャルエネルギーの「微分」に対応するからです。

さて、山の標高や海の深さはこのジオイドを基準にして定義される。ジオイドから何 m だけ上に (または下に) あるかで表すのだ。そうやって標高を定義することで水は確実に「高いところ」から「低いところ」に流れるのだ。その理由は次の節でわかるだろう。

ここで地球楕円体の話に戻ろう。地球の形を最もよく表すのはジオイドだが、それをざっくり近似するのが地球楕円体である。地球楕円体も各時代の最新技術を使って最も「よくあてはまる」ものが計測・検討され、そのパラメータ (長軸や短軸など) が決定されている。現在は GRS80 という名前の地球楕円体が国際標準で採用されている。地球上の緯度や経度はこの回転楕円体によって定義される。このように、地球楕円体とその上で定義された緯度・経度の座標系をまとめて測地系という。

よくある質問 182 地球の形がジオイドで表されるならそれをざっくり近似した地球楕円体とって、考える必要ないんじゃないですか? ... 原理的にはそうです。しかしジオイドを実際に数値的に表現するときは、まずざっくりと回転楕円体で

近似し、その近似値から実際どのくらいずれているかを表すという 2 段階の方が実用上は好都合なのです。

- 問 146 以下の概念の定義を述べよ。

- (1) ジオイド
- (2) 地球楕円体
- (3) 測地系

ジオイドは、先に述べた地球楕円体との差で表すのが普通である。それによると、日本からインドネシアにかけての西太平洋沿岸島嶼部ではジオイドは回転楕円体よりも 20 m から 80 m も高い^{*5}。一方、インド南部ではジオイドは回転楕円体よりも約 80 m も低い。このような傾向は地球の内部構造やプレートの動きと密接に関係している。

- 問 147 日本水準原点 (日本で測量をするときの高さの基準点^{*6}) ではジオイドは地球楕円体から約 37 m 高いことがわかっている。

- (1) 日本水準原点の真下にある、地球楕円体の面上の点の標高を述べよ。
- (2) 日本水準原点 (のすぐ近く) に高さ 50 m のビルを建てたら、そのビルの屋上は地球楕円体からどのくらい高いか?

このような話は、ひと昔前までは「なんとなくざっくり」わかっていたらよかった。ところが近年、自動車の自動運転や農地のトラクターの自動運転が実現したり、広大な造林地の木を 1 本 1 本、個別に計測して管理するなどの技術が生まれつつある。それらの技術では車両や木の位置をセンチメートル単位の高精度で計測・制御する必要もある。その基盤となるのは位置の定義をしっかりとすることである。その背景には、ここで述べたような物理学を使った地球の形に関する知見がある。そのことを理解してはじめて新しい技術の可能性や限界、コストなどが判断できるのである。

10.7 (発展) ポテンシャルエネルギーと力の関係

(本節は後の話に関係しないので読み飛ばしてもよい。秋学期に電磁気学を学ぶときに復習すると役立つだろう。)

さて、力学的エネルギー保存則の話から少し外れるが、

学生は少ないので、多くの地学や測量学の本ではポテンシャルエネルギーを使わずにジオイドを説明しようとして、かえって難しくなっている。結局、基礎を理解していない人は実用的で重要な概念を勉強するときに苦労するし、正確なことは理解できないのだ。

^{*5} このような、回転楕円体からジオイドまでの距離 (高さ) を「ジオイド高」という。

^{*6} 東京の国会議事堂の近くにある。標高は 0 m ではない。

ここで力とポテンシャルエネルギーの関係をもう少し深くみておこう。いま、符号を無視しておおまかに言えば、力の(線)積分がポテンシャルエネルギーを与えるわけだから、積分と微分は互いに逆の操作であることを考えれば、ポテンシャルエネルギーの微分が力を与えるのではないだろうか? 実はこの発想は正しい。以下にそれを説明しよう:

いま、ある質点に働く力が保存力であり、しかも場所だけによって一意的に定まり、時刻や速度などには陽に依存しない^{*7}としよう。

とりあえず簡単のため、物体の移動は直線上(x 軸の上)に制限され、働く力もその直線に沿った方向に限定されるとしよう。物体が位置 x_0 から x_1 まで動くときに、力 F がなす仕事 $W_{x_0 \rightarrow x_1}$ は、式 (8.27) より

$$W_{x_0 \rightarrow x_1} = -U(x_1) + U(x_0) \quad (10.38)$$

である(U はポテンシャルエネルギー)。ここで x_0 を x とし、 x_1 を x から非常に近い位置、すなわち、その間で力がほとんど変わらないとみなせるくらい近い位置としよう。そして $x_1 = x + dx$ としよう(dx は 0 に近い量)。すると、仕事の定義から

$$W_{x_0 \rightarrow x_1} = F dx \quad (10.39)$$

である。一方、式 (10.38) から

$$W_{x_0 \rightarrow x_1} = -U(x + dx) + U(x) \quad (10.40)$$

である。したがって

$$F dx = -U(x + dx) + U(x) \quad (10.41)$$

となる。両辺を dx で割って

$$F = -\frac{U(x + dx) - U(x)}{dx} \quad (10.42)$$

ここで dx が十分に 0 に近いことを思い出せば

ポテンシャルエネルギーと力の関係 (1 次元)

$$F = -\frac{dU}{dx} \quad (10.43)$$

である。つまり、力はポテンシャルエネルギーを微分してマイナスをつけたものに等しい。

この話は 3 次元空間に拡張できる。物体が力 $\mathbf{F}$ を受

けながら位置 $\mathbf{r}$ から、わずかに離れた位置 $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ に移動することを考える。

$$d\mathbf{r} = (dx, dy, dz) \quad (10.44)$$

は十分に小さいベクトルである。するとこの移動において力がなす仕事 $W_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + d\mathbf{r}}$ は、式 (10.40) と同じように考えれば

$$W_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + d\mathbf{r}} = -U(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \quad (10.45)$$

である(U はポテンシャルエネルギー)。ここで全微分^{*8}を使うと

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) &= U(x + dx, y + dy, z + dz) \\ &= U(x, y, z) + \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \\ &= U(\mathbf{r}) + \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (10.46)$$

である。これを式 (10.45) に代入すると次式になる:

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + d\mathbf{r}} &= -U(\mathbf{r}) - \frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz + U(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz \\ &= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \cdot (dx, dy, dz) \\ &= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (10.47)$$

一方、 $d\mathbf{r}$ を小さくとすることで、その移動の間で力 $\mathbf{F}$ はほぼ一定とみなせるため、仕事の定義か

$$W_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + d\mathbf{r}} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.48)$$

とできる。したがって

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \cdot d\mathbf{r} \quad (10.49)$$

である。 dx, dy, dz は 0 に近い任意の量なので、上の式が成り立つには

ポテンシャルエネルギーと力の関係 (3 次元)

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \quad (10.50)$$

^{*7} この「陽に」(explicit) という言葉は科学ではよく使う。「あからさまに」とか「直接的に」という意味。今の場合は、時間と共に場所が変われば力も変わるかもしれないが、それは場所が変わったからであり、時間の変化が直接的に力を変えたわけではないということ。

^{*8} 数学の教科書を参照。

でなければならない*9。ここで“grad”という記号を

$$\text{grad } U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (10.51)$$

と定義する*10。この記号を使うと式 (10.50) は次式のように書ける:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U \quad (10.52)$$

演習問題 18 アインシュタインの相対性理論によると、重力によるポテンシャルエネルギーが高い位置ほど時間は速く進む(とても不思議!)。すなわち、ある2つの位置 A, B があって、重力によるポテンシャルエネルギーが、位置 B では位置 A よりも $m\phi$ だけ高いとし (m は質点の質量)、位置 A に置かれた時計が時間 T だけ進む場合、位置 B に置かれた時計は以下のぶんだけ進む。

$$T \left(1 + \frac{\phi}{c^2} \right) \quad (10.53)$$

ここで $c = 299792458 \text{ m/s}$ は光の速さである。以後、地球の半径を $R = 6400 \text{ km}$ とする。

(1) GPS 衛星は地表から約 20,000 km の高さを飛んでいる。地上の時計が1秒進む間に、GPS 衛星に搭載された時計は、1秒よりどれだけ多くの時間を進むか? (他の要因のために、実際に起きるのはここで計算される値よりも若干小さい値である)

(2) 高精度の時計が2つあれば、これらの時計が示す時刻の差から、これらの時計の置かれた高さの差がわかる。つまり時計を高度計として使うことができるだろう。ところで東大の香取秀俊博士が開発した「光格子時計」は300億年に1秒しか狂わないという、世界的にもブッチギリな高精度を持つ。この時計を高度計として使う場合、地表付近(海面から高さ±数kmの範囲)ではどのくらいの誤差で高度を計測できるか?

*9 $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ とする。式 (10.49) で $dx \neq 0$ として $dy = dz = 0$ とすると、

$$F_x dx = -\frac{\partial U}{\partial x} dx, \quad \text{したがって、} F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

を得る。 $dy \neq 0$ で $dx = dz = 0$ の場合や、 $dz \neq 0$ で $dx = dy = 0$ の場合も同様に考えれば、

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

を得る。したがって式 (10.50) が成り立つ。

*10 この grad とは、“gradient”の略であり、日本語では「勾配」という。詳しくは「ライブ講義 大学生のための応用数学入門」参照。

なおこの「高度計」が素晴らしいのは、GPS のような衛星からの電波が入ってこない水中や地下、屋内などでも原理的には利用可能ということである。

10.8 解答

答 138 略。

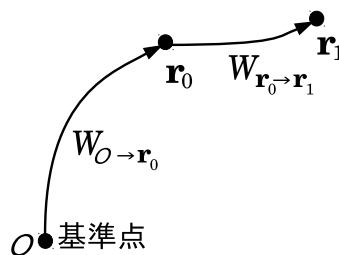


図 10.4 問 139 の仕事の経路。

答 139 物体を基準点 O から点 r_0 まで運ぶときに保存力 $\mathbf{F}$ がなす仕事を $W_{O \rightarrow r_0}$ とすると、定義から

$$U(r_0) = -W_{O \rightarrow r_0} \quad (10.54)$$

である。同様に、物体を基準点から点 r_1 まで運ぶときに保存力 $\mathbf{F}$ がなす仕事を $W_{O \rightarrow r_1}$ とすると、

$$U(r_1) = -W_{O \rightarrow r_1} \quad (10.55)$$

である。ここで、基準点から点 r_1 へ物体を運ぶときの経路を、点 r_0 を経由するようにとれば(図 10.4), 保存力ゆえに仕事は経路によらず一定なので、 $W_{O \rightarrow r_1} = W_{O \rightarrow r_0} + W_{r_0 \rightarrow r_1}$ となる。ここで $W_{r_0 \rightarrow r_1}$ は物体を点 r_0 から点 r_1 に運ぶときの仕事。この式の $W_{O \rightarrow r_0}, W_{O \rightarrow r_1}$ を、式 (10.54), 式 (10.55) を使って置き換えると $-U(r_1) = -U(r_0) + W_{r_0 \rightarrow r_1}$ となる。したがって $U(r_0) - U(r_1) = W_{r_0 \rightarrow r_1}$ となる。

答 140 閉曲線 Γ に沿う移動によってなす仕事を W_Γ とする。移動の開始点と終了点をそれぞれ r_0, r_1 とすると、閉曲線なので開始点と終了点は同じなので $r_0 = r_1$ である。保存力だから式 (10.15) を使うことができ、 $r_1 = r_0, W_{r_0 \rightarrow r_1} = W_\Gamma$ として、 $W_\Gamma = U(r_0) - U(r_0) = 0$ となる。

答 142 (1) 点 C をポテンシャルエネルギーの基準点とする。点 A では運動エネルギーは 0, ポテンシャルエネルギーは mgh である。したがって力学的エネルギーは mgh となる。点 C では運動エネルギーは $mv^2/2$, ポテンシャルエネルギーは 0 である。したがって力学的エ

エネルギーは $mv^2/2$ となる。働く力は重力と垂直抗力だけだが、重力は保存力であり、垂直抗力は仕事をしない（移動方向と力の方向が直交しているのだから）。したがって力学的エネルギー保存則が成り立つ。すなわち点 A と点 C で力学的エネルギーは等しいことから、与式を得る。

(2) 前小問より、

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \text{ m s}^{-2} \times 5 \text{ m}} = 9.9 \text{ m s}^{-1}$$

(3) 半円形ハーフパイプの高さが h なのだから、この円の半径は h である。人はパイプの底で半径 h 、速さ v の円運動をするので、それを実現する向心力を受けるはずだ。すなわち、式 (6.38) より、C 点では人は円の中心に向かって（つまり上向きに） mv^2/h という合力を受けるはず。一方、垂直抗力を N とする。人には下向きに mg という重力も働くから、上向きの力は垂直抗力と重力の合力であり、その大きさは $N - mg$ である。したがって $N - mg = mv^2/h$ である。したがって

$$N = \frac{mv^2}{h} + mg \quad (10.56)$$

である。小問 (1) より $mv^2 = 2mgh$ だから

$$N = 2mg + mg = 3mg \quad (10.57)$$

となる。よって垂直抗力は、半径 h によらず重力の 3 倍。だからハーフパイプ走者は重力の 3 倍の力に耐える頑丈な肉体を持っていなければならない。

答 143 (1) t から $t + dt$ の間に X が移動する距離は $l|\theta(t + dt) - \theta(t)|$ である。微分の定義からこれは $l|\theta' dt|$ に等しい。これを dt で割ったものが速度の大きさになる。したがって与式が成り立つ。(2) 略 ($T = mv^2/2$ の v に前小問の結果を代入すると運動エネルギー T の与式を得る。また O に比べて X は $l(1 - \cos \theta)$ だけ高い位置にある。したがって重力によるポテンシャルエネルギー U の与式を得る。)(3) 略。ヒント：合成関数の微分。(4) 略。(5) 略。($\sin \theta \approx \theta$ とすればよい)(6) 略。(7) 略(式 (10.37) の左辺と右辺に代入して、それらが等しくなることを示せばよい)。(8) $\tau = 2\pi/\omega$ により(式 (6.4) 参照)。

$$\tau = 2\pi\sqrt{l/g} \quad (10.58)$$

(9) 角速度は $\omega = \sqrt{g/l} = \sqrt{9.8 \text{ m s}^{-2}/(1.0 \text{ m})} = 3.1 \text{ s}^{-1}$ 。周期は(計算略) $\tau = 2\pi/\omega = 2.0 \text{ s}$ 。

(10) 式 (10.58) より、 τ は $\sqrt{l}$ に比例するから、 τ を半分にするには、 $\sqrt{l}$ を半分にするればよい。したがって l を

$1/4$ 倍にすればよい。

答 144 (1) 式 (10.58) を変形して $g =$ の式にすると $g = 4\pi^2 l/\tau^2$ 。(2) 月面では重力加速度が地表の $1/6$ 倍になる。式 (10.58) より、 τ は $1/\sqrt{g}$ に比例するから、 g が $1/6$ 倍になると τ は $\sqrt{6} = 2.4$ 倍(ゆっくり振動)。

答 147 (1) -37 m 。(2) $50 \text{ m} - (-37 \text{ m}) = 87 \text{ m}$

よくある質問 183 ポテンシャルエネルギーは力学的エネルギー保存則を見やすくするために定義されたもの、と考えてよいのですか? ... それだけではありません。まず、力はベクトルだけどポテンシャルエネルギーはスカラーなので、力を直接考えるよりも数学的に取扱いがシンプルで楽になります。また、量子力学では力よりもポテンシャルエネルギーの方が直接的に重要な働きをします。

よくある質問 184 力学的エネルギー保存則とエネルギー保存則は違うんですね? ... 違うというより前者は後者の一種(特別なケース)ですね。

よくある質問 185 「保存力は経路に依存しない」というフレーズが頭にしっかりこない。... ちょっと省略しすぎですね。「保存力がなす仕事は、経路によらず始点と終点だけで決まる」というのが正しい表現です。例えば話でいうと、山に登るのにきつい勾配の坂をまっすぐ登るのとジグザグになった緩やかな道を登るのとでは、全体の仕事(力かける距離)は同じということです。きつい道では大きな力が(移動方向に)かかるけど、そのぶん短くてすみます。

コラム: ベクトルは太字、スカラーは細字なのはなぜか?

「ベクトルは太字で書く」ことがきちんとできない人が多い。そもそもなぜベクトルは特別な書き方(太字で書く)をするのだろうか? それは、スカラーとベクトルは本質的に違う量であり、計算ルールも異なるからだ。

たとえば「スカラーでの割り算」は(0 で割る以外は)許されるが「ベクトルでの割り算」は許されない。スカラー同士やベクトル同士は足せるがスカラーとベクトルは足せない。スカラーとベクトルの大小関係は比べられないし、スカラーとベクトルが等号で結ばれることもない。それらの「ルール破り」を防ぐための「要注意記号」としてベクトルを太字や上付き矢印で書くのだ。

ベクトルは太字という慣習を守ることができない人は、そもそも何がベクトルで何がスカラーかをわかって

いない可能性がある。それは単なる深刻な問題である。ベクトルを太字で書くのは「自分はどれがベクトルでどれがスカラーなのかちゃんとわかってるぜ!」ということを自分自身で確認し、他者にアピールするためなのだ。

ところがこの話には例外がある: ひとつの直線上に限定された現象 (直線運動) では本来ベクトルである量もスカラーとして扱い、細字で書くのだ。というのも、この場合はベクトルに成分がひとつしかない。その成分はスカラーであり、その符号 (正か負か) で直線上の 2 つの向きを表現できる。だからわざわざベクトルとして扱うまでもない。

数学や物理では「区別すべきものは区別せねばならないが、区別する必要や理由のないものは区別しない」という慣習がある (例外もあるが)。これに照らせば、直線上に限定されることが最初からわかっている運動では $F = ma$ のように書いてよいし、むしろそう書くべきである (F, m, a は力, 質量, 加速度)。この場合は F や a はスカラーと同様に扱うことができ、 $m = F/a$ と書けるからでもある ($a \neq 0$ の場合)。

第11章

角運動量保存則

11.1 ベクトル同士のもう一種類の掛け算: 外積

本章では「外積」という数学的概念が必要になる。詳しいことは数学の教科書を読んでもらうとして、ここでは外積の概略だけを述べておく。

3次元空間中の正規直交座標系^{*1}で表された2つの幾何ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ について、

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \quad (11.1)$$

というベクトルを与えるような演算を外積とよび、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と表す(この $\times$ を省略したり $\bullet$ と書き換えたりしてはいけない!)。すなわち

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) \\ &:= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned} \quad (11.2)$$

である。

外積には以下のような幾何学的性質がある(ここでは証明はしない):

- 性質 1. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ は、 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ が張る平行四辺形の面積に等しい^{*2}。
- 性質 2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は、 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の両方に垂直である。
- 性質 3. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は、 $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ に右ネジをまわすときにネジが進む側にある。
- 性質 4. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ は互いに等しい大きさで逆向きである。すなわち

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (11.3)$$

- 性質 5. 互いに平行なベクトルどうしの外積はゼロである。特に、同じベクトルどうしの外積はゼロで

ある。すなわち

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (11.4)$$

性質 4 は、性質 1, 性質 2, 性質 3 から示すことができる。性質 5 は、性質 1 から示すことができる。

- 問 148 以下の各場合について $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を求め、 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の張る平行四辺形の面積を求めよ。

$$(1) \quad \mathbf{a} = (1, 2, 0), \quad \mathbf{b} = (1, 1, -1)$$

$$(2) \quad \mathbf{a} = (1, 0, 1), \quad \mathbf{b} = (-1, 1, 2)$$

- 問 149 2つのベクトル:

$$\mathbf{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t)), \quad \mathbf{b}(t) = (b_1(t), b_2(t), b_3(t))$$

がともに変数 t の関数であるとする。次式を示せ(ダッシュは t による微分を表す):

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}' \quad (11.5)$$

11.2 角運動量

これからしばらく物体の回転運動について考察しよう。物体の運動を考察するときのよりどころはいつも運動の3法則だ。運動の3法則は様々な運動を統一的に支配・説明する力を持っている。回転運動も例外ではない。

しかし回転運動を扱う際は、運動の3法則を直接的に使うよりも角運動量という概念(物理量)を導入する方がすっきりして便利である^{*3}。

^{*1} x, y, z の3つの座標軸が互いに直交しており長さのスケールが同じ座標系。まあいわば「普通の座標系」のことである。厳密には「右手系」という性質を満たす必要があるが、今はそのことは理解できなくてもよい。

^{*2} それは $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$ である。ここで θ は $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ のなす角。

^{*3} この事情は、ちょうど衝突という現象を扱う際に運動量という概念を導入すると便利であったことに似ている。

角運動量の定義

質点の運動量を $\mathbf{p}$ 、質点の位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とするとき、位置ベクトルと運動量の外積、つまり

$$\mathbf{L} := \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (11.6)$$

を角運動量 (angular momentum) とよぶ (図 11.1)。

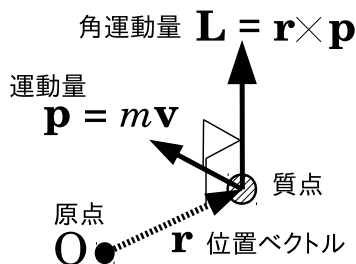


図 11.1 角運動量の定義。 m は質点の質量、 $\mathbf{v}$ は質点の速度、 $\mathbf{r}$ は質点の位置ベクトル。 $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{p}$ 、 $\mathbf{L}$ はいずれもベクトル (だから太字)。 m はスカラー (だから細字)。

よくある間違い 9 $\mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{r}$ と覚えてしまう ... ダメです。外積は順序が逆になると結果が異なる (向きが逆になる) ので $\mathbf{p} \times \mathbf{r}$ と $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ は違います。

● 問 150 角運動量の定義を確認しよう。

- (1) 角運動量とは何か?
- (2) 角運動量の SI 単位は?
- (3) 角運動量は位置ベクトルと運動量の両方に垂直であることを示せ。

この「角運動量」なる奇妙な物理量がどのように便利なのかは後回しにして、とりあえずいくつかの系の角運動量を考えてみることで角運動量に慣れよう。

● 問 151 3次元空間に座標軸 (x, y, z 軸; 各軸は互いに直交している) を設定する。 xy 平面上で原点を中心とする半径 r の円周上を質量 m の質点が角速度 ω で等速円運動している。時刻 $t = 0$ で質点は x 軸上にある。

- (1) 時刻 t のときの質点の位置ベクトル $\mathbf{r}$ は次式になることを示せ。

$$\mathbf{r} = r(\cos \omega t, \sin \omega t, 0) \quad (11.7)$$

(ただしこれと逆向きの回転のことは考えないとしてよう。)

- (2) 時刻 t のときの質点の運動量 $\mathbf{p}$ は次式になること

を示せ。

$$\mathbf{p} = mr\omega(-\sin \omega t, \cos \omega t, 0) \quad (11.8)$$

- (3) この質点の角運動量 $\mathbf{L}$ は次式になることを示し、時刻 t によらず一定であることを確認せよ (図 11.2 参照)。

$$\mathbf{L} = (0, 0, mr^2\omega) \quad (11.9)$$

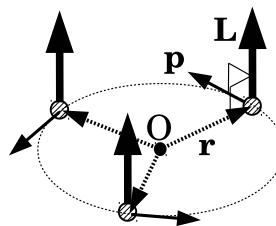


図 11.2 等速円運動する質点の角運動量

この問題の結果から、原点を中心とする等速円運動をする質点の角運動量は時刻によらず一定であることがわかった。

ちなみに角運動量は回転以外の運動についても考えることができる。そもそも角運動量の定義、つまり式 (11.6) には、運動が回転であるというような前提は存在しない。

● 問 152 xyz 空間の中で質量 m の質点が時刻 t のときに位置ベクトル $\mathbf{r} = (Vt, y_0, 0)$ の位置にいるとしよう。 V と y_0 は定数である。

- (1) この質点の速度 $\mathbf{v}$ を求め、この運動が等速度運動であることを示せ。
- (2) この質点の運動量 $\mathbf{p}$ を求めよ。
- (3) この質点の角運動量 $\mathbf{L}$ は次式のようになることを示し、時刻 t によらず一定であることを確認せよ (図 11.3 参照)。

$$\mathbf{L} = (0, 0, -mVy_0) \quad (11.10)$$

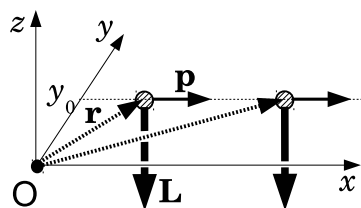


図 11.3 等速度運動する質点の角運動量

この問題の結果から、等速度運動をする質点の角運動量は時刻によらず一定であることがわかった。

しかしちょっと変な気がしないだろうか？ 問 152 では式 (11.10) のように角運動量が y_0 に依存した。 y_0 は質点が運動する直線（この場合は x 軸に平行な直線）が原点からどれだけ離れているかを示す定数である。ということは角運動量は同じ運動についても原点をどこに置くかで違った値を持つのだ。原点をどこに置くかは人間が勝手に決めることなので、結局、角運動量の値は人間の恣意的な判断に依存してしまうのだ！

回転運動などを考えるときは原点は回転の中心に置くのが普通だし便利だが、必ずしもそうでなければならぬという必然性は無い。ならば原点の置き方によって変わる角運動量って何なんだ？ と思うかもしれない。実は角運動量はその値だけで意味を持つのではなく、次節に述べる考え方によって意味を持つのだ。そしてこの考え方は原点の選択には依存しないのだ。つまりどこに原点を置いてもよいし、その結果として角運動量の値がどのように変わってもかまわないが、それでもなお以下の話は成り立つのだ^{*4}。

11.3 角運動量保存則 (1つの質点バージョン)

式 (11.6) の両辺を時刻で微分してみよう。質量 m を一定とすれば

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \quad (11.11)$$

$$= \frac{d}{dt}(m\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (11.12)$$

$$= m \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (11.13)$$

$$= m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \quad (11.14)$$

$$= m\mathbf{v} \times \mathbf{v} + m\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (11.15)$$

ここで式 (11.13) から式 (11.14) の変形において式 (11.5) の性質を使った。

式 (11.15) について第 1 項の $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$ は恒等的に 0 であ

る（性質 5 より）。したがって式 (11.15) は

$$m\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (11.16)$$

となる。さらに運動方程式

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad (11.17)$$

を使うと（ $\mathbf{F}$ は質点にかかる力）、式 (11.16) は

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (11.18)$$

となる。したがって式 (11.11) 左辺から式 (11.15) に至る方程式は結局

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (11.19)$$

となる。この右辺に現れた物理量には特別な名前が付けられている：

トルク（力のモーメント）の定義

$\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ 、つまり位置ベクトルと力の外積のことを トルク (torque) とか 力のモーメント とよぶ。

そして式 (11.19) が表すのは

質点に関する角運動量保存則

質点の角運動量の単位時間あたりの変化は、質点に働くトルクに等しい。

という重要な物理法則である^{*5}。

- 問 153 式 (11.19) の導出を再現せよ。

例 11.1 自動車のタイヤを回転軸にとりつけるとき、そのネジは適度な強さで締めねばならない。強すぎるとネジが破断しかねないし、弱すぎると緩んでタイヤが脱落してしまうからである。いずれにしても大変危険であり、生命に関わることなので、その「強さ」をきっちり表現したり計測せねばならないトルクはまさにそのような概念である。ネジを回しながら締めるにはレンチという工具を使うが、その中でもトルクレンチという工具にはあらかじめトルクの上限值を設定でき、それを超えたトルクがかかった場合は空回りする仕組みになっている。ネットで調べてみよう！

^{*4} これはちょうどポテンシャルエネルギーの値が基準点（原点）のとりかたによって異なるという事情に似ている。原点のとりかたによってポテンシャルエネルギーは異なってもポテンシャルエネルギーの空間微分は保存力に一致するし（式 (10.50)）、力学的エネルギー保存則は成り立つ。

^{*5} ただしこれは導出過程から明らかなように、運動の 3 法則（特に $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ）から派生する法則なので基本法則とは言えない。

11.4 角運動量保存則 (複数の質点バージョン)

この法則を複数の質点に拡張しよう。いま n 個の質点が互いに力を及ぼしあいながら運動する状況を考えよう。 k 番目 ($k = 1, 2, \dots, n$) の質点のことを「質点 k 」とよび、その質量、位置、速度、角運動量をそれぞれ m_k , $\mathbf{r}_k$, $\mathbf{v}_k$, $\mathbf{L}_k$ とする。質点 k にかかる力 $\mathbf{F}_k$ は、その他の質点から受ける力(内力)と、それ以外から受ける力(外力)の和である:

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_{k1} + \mathbf{F}_{k2} + \dots + \mathbf{F}_{kn} + \mathbf{F}_k^e \quad (11.20)$$

ここで $\mathbf{F}_{k1}$, $\mathbf{F}_{k2}$, ... はそれぞれ質点 1 が質点 k に及ぼす力、質点 2 が質点 k に及ぼす力、... である。質点 k が自分自身に及ぼす力は考えなくてよいので、 $\mathbf{F}_{kk}$ は考えなくてよいのだが、ここでは形式的に残しておいて、そのかわり $\mathbf{F}_{kk} = \mathbf{0}$ としよう。また、 $\mathbf{F}_k^e$ は外力が質点 k に及ぼす力である。例として図 11.4 に 3 個の質点からなる質点系に働く力を示す:

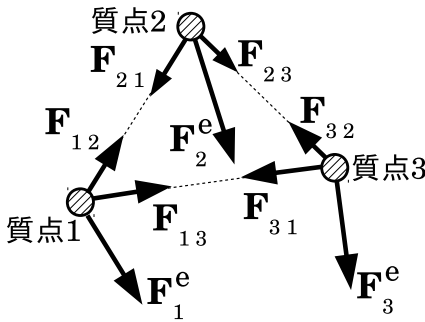


図 11.4 質点系に働く力。この図では内力どうし ($\mathbf{F}_{12}$ と $\mathbf{F}_{21}$ など) が中心力 (後述) である (同一直線上にある) ことを仮定している。

さて質点 k について式 (11.19), 式 (11.20) を考えると

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_k = \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k \quad (11.21)$$

$$= \mathbf{r}_k \times (\mathbf{F}_{k1} + \mathbf{F}_{k2} + \dots + \mathbf{F}_{kn} + \mathbf{F}_k^e) \quad (11.22)$$

である。同様の式を全ての質点に関して考えて

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{L}_1 &= \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{F}_{11} + \mathbf{F}_{12} + \dots + \mathbf{F}_{1n} + \mathbf{F}_1^e) \\ \frac{d}{dt} \mathbf{L}_2 &= \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{22} + \dots + \mathbf{F}_{2n} + \mathbf{F}_2^e) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} \mathbf{L}_n &= \mathbf{r}_n \times (\mathbf{F}_{n1} + \mathbf{F}_{n2} + \dots + \mathbf{F}_{nn} + \mathbf{F}_n^e) \end{aligned}$$

これらを辺々足し合わせると

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \mathbf{L}_k &= \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times (\mathbf{F}_{k1} + \mathbf{F}_{k2} + \dots + \mathbf{F}_{kn}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e \end{aligned} \quad (11.23)$$

この式の右辺の最初の $\sum$ に注目しよう。この和を分解して考えると、その中には 1 以上 n 以下の任意の j, k について ($j \neq k$ とする), 1 つの $\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{jk}$ と 1 つの $\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{kj}$ が存在する。これらをひとまとめにすると

$$\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{jk} + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{kj} \quad (11.24)$$

となる。ところが作用反作用の法則から

$$\mathbf{F}_{kj} = -\mathbf{F}_{jk} \quad (11.25)$$

である。したがって式 (11.24) は以下ようになる:

$$(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{F}_{jk} \quad (11.26)$$

$\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$ は質点 k から質点 j へのベクトルである。

ところで質点どうしが及ぼし合う力が互いを結んだ直線上にある場合、すなわち互いの方向 (もしくは逆方向) をまっすぐに向いているような場合、そのような力を中心力という*6。もし $\mathbf{F}_{jk}$ が中心力であると仮定すれば、 $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$ と $\mathbf{F}_{jk}$ は互いに平行だからその外積は 0 になる (性質 5 より)。したがって式 (11.26) は恒等的に 0 になる。そのことと $\mathbf{F}_{kk} = \mathbf{0}$ を使えば式 (11.23) は右辺の最初の $\sum$ が 0 になってしまて

$$\sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \mathbf{L}_k = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e \quad (11.27)$$

となる。ここで左辺の t による微分を $\sum$ の前に出せば

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \mathbf{L}_k = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e \quad (11.28)$$

となる。この式は味わい深い。左辺の $\sum$ は全質点の角運動量の和であり、全角運動量とよぶ。右辺は各質点に働く外力によるトルクの和だ。すなわち以下の法則が成り立つことが証明された:

—— 質点系に関する角運動量保存則 (1) ——

内力が中心力であるような質点系 (質点の集合) については、その全角運動量の単位時間あたりの変化は各質点に働く外力によるトルクの総和に等しい。

*6 重力や静電気力 (クーロン力) は中心力である。

- 問 154 式 (11.28) の導出を再現せよ。

ここで特に全ての質点が静止していれば当然ながら全ての k について $\mathbf{L}_k = 0$ が恒等的に成り立つ。したがってそのとき全角運動量 $\sum_{k=1}^n \mathbf{L}_k$ も恒等的に 0 である。したがってそれを t で微分したもの (式 (11.28) の左辺) も恒等的に 0 である。したがって式 (11.28) の右辺も恒等的に 0 である：

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e = 0 \quad (11.29)$$

この式の意味するのは「内力が中心力であり、静止状態にある質点の集まりでは、外力によるトルクの和は 0」ということだ。物体は無数の原子や電子 (質点と考えられる) の集まりなので、上の文章の「質点の集まり」は「物体」であっても差し支えない。これが物体の静止状態における (力の) モーメントのつりあいである。その特別な場合が「てこの原理」だ。第 3 章では仮想仕事の原理から「てこの原理」つまり式 (4.7) を導いたが、このように運動方程式から導くこともできるのだ^{*7}。

さて式 (11.28) に戻ろう。こんどは質点は静止していない (運動している) が外力は働かない (内力は中心力だけが働く) ような状況を考えよう。その場合式 (11.28) の右辺は 0 だ。したがって

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \mathbf{L}_k = 0 \quad (11.30)$$

である。この式は全角運動量は時刻 t によらず一定である、ということだ。したがって次の法則が成り立つことがわかった：

—— 質点系に関する角運動量保存則 (2) ——

外力が無く内力が中心力である場合は全角運動量は時刻によらず一定である。

- 問 155

- (1) トルクとは何か?
- (2) トルクは別名、何というか?
- (3) トルクの SI 単位は?
- (4) 中心力とは何か?
- (5) モーメントのつりあいとは何か?
- (6) 角運動量保存則とは何か?

^{*7} 力学の法則は全て運動の法則から導かれるという立場からすると、これはむしろ自然である。不思議なのは仮想仕事の原理という考えから出発しても同じ結論が導かれたことである。

例 11.2 玩具のコマは角運動量保存則の好例である。あんな不安定な形の物体が回転中は 1 本の軸足だけで地面に立ち続けることができるのは、回転のために大きな角運動量があり、それが一定であり続けようとするからである。

例 11.3 ドローンは羽が回転して飛ぶのだが、高速回転するプロペラはコマと同じように大きな角運動量を持つ。ところがドローンは姿勢や向きを柔軟に変える必要があるので、それを妨げる大きな角運動量は邪魔なのだ。そこでドローンは複数のプロペラのうち半分を右回り、もう半分を左回りというふうに互いに逆回転させ、プロペラ回転による角運動量を打ち消すのである。これによりドローンの機体全体では角運動量はほぼ 0 となり、柔軟な姿勢・方向制御が容易になるのである。

11.5 回転運動の不思議

ここで次章への伏線を張っておく。それが次の 2 つの問題である。

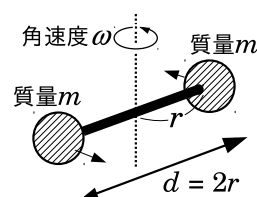


図 11.5 棒でつながれた 2 つの質点の等速円運動。

- 問 156 質量 m の質点が 2 つあって伸縮可能な軽い棒でつながっている (図 11.5)。棒の長さを $d = 2r$ としよう。さて最初は棒の長さが一定で、2 つの質点は棒の真ん中を中心とする等速円運動をしている。そのときの角速度の大きさを ω とする。なお中心 (重心) は静止している。外力は働いていないとする。質点どうしに働く力は中心力であるとする。

- (1) 1 つの質点の運動量の大きさは $mr\omega$ であることを示せ。
- (2) 1 つの質点の角運動量の大きさは $mr^2\omega$ であることを示せ。
- (3) それぞれの質点の角運動量はどのような方向を向いているか?
- (4) 2 つの質点をあわせた角運動量の大きさは $2mr^2\omega$ であることを示せ。

- (5) 2 つの質点をあわせた運動エネルギーは $mr^2\omega^2$ であることを示せ。
- (6) $2mr^2$ を I という記号で表そう (これが伏線!)。するとこのような回転運動する 2 つの質点からなる質点系について

$$\text{角運動量の大きさは, } I\omega \quad (11.31)$$

$$\text{運動エネルギーの大きさは, } \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (11.32)$$

であることを示せ (簡単!!)。

ここで出てきた I という量を「慣性モーメント」という。これは伏線だからその詳しい説明は次章に譲るが、慣性モーメントは 2 つの質点からなる質点系だけでなく、特定の軸のまわりに一斉に回転するような多くの質点から構成される様々な形の質点系にも定義される。そしてそれらには式 (11.31)、式 (11.32) が成り立つのだ。それを理解することで回転する物体の運動を我々は理解・予想できるようになる。それが次章の目標である。

よくある質問 186 回転運動なんか直感的に簡単に理解・予想できるように思いますが? ... そう思うでしょ? それが大きな勘違いだということに次章で気づくでしょう。回転運動は簡単ではないのです。シンプルな運動なのに我々の素朴な直感では理解も予想もできないようなことがたくさん起きますのです。

よくある質問 187 そんなバカな (笑)。物体が単にくるくるまわるだけではないですか? 生まれてからこれまで自転車の車輪や観覧車や地球など回転する物体をたくさん眺めたり学んできましたが、その中に私が直感で理解・予想できないものなんかありませんでした。... それは単に気づいていないだけです。回転運動をちゃんと見ていないのです。例として次の問題を考えてみて下さい。

- 問 157 前の問題の続きを考える。ある時点で棒が急に縮んで長さが半分になったとする。角運動量保存則により、棒が縮んだ後の角速度の大きさは縮む前より大きくなることを示せ (つまり回転が速くなる!!)。

このように、回転する物体は各部分が回転軸に近寄るほど回転が速くなるのだ。これを応用しているのがフィギュアスケートのジャンプ (スピン) である。

例 11.4 スケーターが氷盤から飛び上がると空中で両手を体の軸に強く引き寄せることを君は見たことがあるだろう (なければネットで見てみよう)。スケーターの

両手が上の問題の 2 つの質点に相当すると考えれば、この動作はジャンプ直前に体に加えた回転で得た角運動量を最大限に活用して空中での回転を高速化する工夫であることがわかるだろう。

もうひとつ例を挙げよう。これはもっと巨大な現象である。

例 11.5 2011 年 3 月に発生した東北太平洋沖地震の後、地球の自転周期が 1.8 マイクロ秒だけ短くなった (自転が早くなった) ことが観測された。この現象は地球の形がわずかに変化して地球の回転軸に近寄ったからだと考えられる。

よくある質問 188 私はクラシック・バレエをやっています。バレエでもフィギュアスケートで言うスピンと同じことを地表で行い (踊り) ますが、腕をうまくタイミング良く体の中心に引き寄せると速く且つ安定して回れます。... それは問 157 や例 11.4、例 11.5 と同じ原理です。

このように回転運動は実に不思議であり、それを角運動量保存則が説明してくれる。真に驚きに値するのは、それが「スケートのジャンプ」と「地球の自転の変化」というジャンルも大きさも全く異なる現象を統一的に支配していることだ。このような普遍性が物理学の顕著な特長である。

11.6 量子力学における角運動量

角運動量についてここまで述べてきた事はニュートン力学に限定した話である。これが量子力学、つまり電子や光子 (光の粒子) の力学になるとだいぶ雰囲気の違いになる。本章の最後にそれについて説明しよう。

P.112 で述べたように、電子や光子のように粒子の性質と波の性質の両方を持つ存在を量子とよぶ。いま、ひとつの量子を考え、それが粒子的に見ると半径 r の円周上を速さ v で等速円運動しているとしよう。このとき粒子の (ニュートン力学的な意味での) 角運動量は円周に垂直であり、その成分 L は $L = rp$ を満たすはずだ (p は運動量の大きさ)。ところが量子は波の性質もある。この量子を波と見たときの波長を λ の波だとしよう。この波は円周上に存在するから、円のどこから波が始まると、ぐるっと回って元の位置に波が戻ったときに最初の波とうまく滑らかに接続しなければならない。それには円周上に 1 周期ぶんの波がちょうど整数個入る状況であればよい。その整数を n とすると、次式が成り立てば

よい:

$$2\pi r = n\lambda \quad (11.33)$$

したがって $r = n\lambda/(2\pi)$ が成り立つ。一方、式 (9.59) より、 $p = h/\lambda$ である。これらを $L = rp$ に代入すれば $L = rp = \{n\lambda/(2\pi)\}(h/\lambda) = nh/(2\pi)$ となる。つまり角運動量は $h/(2\pi)$ の整数倍なのである。量子力学ではなぜか $h/(2\pi)$ という量がよく現れるので、これをディラック定数と呼び、 $\hbar$ という記号 (エイチバーと読む) で表す。つまり

$$\hbar := \frac{h}{2\pi} \quad (11.34)$$

である。この記号を使うと、等速円運動する量子の角運動量 (の円周に垂直な成分) L は

$$L = n\hbar \quad (11.35)$$

となる。そしてなぜか不思議なことに、量子が運動するときの角運動量は「等速円運動」であってもなくても式 (11.35) のように書けるのだ!!

さらに不思議なことに、電子は円運動をしてなくてもなぜか角運動量を持っており、それを「スピン」というのだが、それは式 (11.35) において $n = 1/2$ か $n = -1/2$ であることが理論的にも実験的にもわかっている*8。つまり量子の角運動量は式 (11.35) のように書けるのだが、その n は整数だけでなく、整数に $1/2$ を足したり引いたりしたものでもありえるのだ (それ以外はあり得ない)。

11.7 解答

答 148 略 (「大学1年生のための数学入門」に同じ問題が載っているのだ。)

*8 これは大変不思議なことだ。というのも、電子は大きさを持たない点状の物体と考えられている。ところが古典的には角運動量は式 (11.6) のように、距離 (r) と運動量の外積だから、点状の物体なら (回転中心からの) 距離が 0 なので角運動量も $\{bf0\}$ のはずである!! 電子は我々の古典的な考え方では理解できない存在なのである。

そもそも量子力学では角運動量の定義は式 (11.6) ではなくなる。量子力学では、角運動量 (のみならず様々な物理量) を「線型微分演算子」と「固有値」という数学的な概念で定義する。その理論では、電子のスピンは x, y, z の各成分が $\pm\hbar/2$ の 2 とおりの値しか取りえず、なおかつ 1 つの成分が決まると他は不確定になる。そのような電子スピン状態の集合は「線型空間」を作り、その中に 2 つの線型独立な状態があって、それらを象徴的に上向き・下向きと呼ぶ。このような理論の枠組みは、今はわからなくても、いずれ線型代数学という数学を学ぶことで理解できる。

答 149 略 (「大学1年生のための数学入門」に同じ問題が載っているのだ。)

答 150 (1) 略。(2) r の SI 単位は m, p の SI 単位は kg m s^{-1} 。したがって $r \times p$ の SI 単位は $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ 。注: 外積は単なる「積」ではないが、その定義を見れば、2 つの物理量の外積の単位は元の物理量の単位どうしの積になることがわかるだろう。(3) 外積の性質 2 より、 $r \times p$ は r と p の両方に垂直。

答 151 (1) 題意より、質点の位置は xy 平面に限定されるので z 座標は常に 0 である。また、 xy 平面内では、原点から距離 r で x 軸から角度 ωt だけ回転した位置に質点があるので、その位置は式 (11.7) のようになる。(2) 式 (11.7) を t で微分すると速度になる。それに m をかければ与式を得る。(3) $L = r \times p$

$$\begin{aligned} &= mr^2\omega(\cos\omega t, \sin\omega t, 0) \times (-\sin\omega t, \cos\omega t, 0) \\ &= (0, 0, mr^2\omega) \end{aligned}$$

これは t を含まない式なので t によらず一定。

答 152 (1)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{d}{dt}(Vt, y_0, 0) = (V, 0, 0)$$

この式は、この質点が x 軸方向に一定の速度で運動することを示している。したがって等速度運動。(2) $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = (mV, 0, 0)$ 。(3) $L = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (Vt, y_0, 0) \times (mV, 0, 0) = (0, 0, -mVy_0)$ 。これは t を含まない式なので t によらず一定。

答 155 略。トルクの SI 単位は $\text{N m} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$ 。なんとこれは J, すなわちエネルギーの単位ではないか! しかし書き方の慣習としてトルクは J で書くことはほとんどなく、 N m で書くことの方が圧倒的に多い。もちろん J と N m は本質的に全く同じ単位なのだが、あくまで慣習としてである。

答 156 回転軸を z 座標軸とし、それに直交するように x 軸、 y 軸を適当にとれば、1 つの質点の位置は $\mathbf{r} = (r \cos\omega t, r \sin\omega t, 0)$ と書ける (t は時刻)。

(1) 1 つの質点の運動量を $\mathbf{p}$ とすると、運動量の定義から

$$\begin{aligned} m\mathbf{r}' &= m(-r\omega \sin\omega t, r\omega \cos\omega t, 0) \\ &= mr\omega(-\sin\omega t, \cos\omega t, 0) \end{aligned}$$

である。したがってその大きさは $mr\omega$ である

($|(-\sin \omega t, \cos \omega t, 0)| = \sqrt{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t} = 1$ であることに注意)。

(2) 質点の角運動量は、定義から、 $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$

$$\begin{aligned} &= (r \cos \omega t, r \sin \omega t, 0) \times m(-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t, 0) \\ &= mr^2\omega(\cos \omega t, \sin \omega t, 0) \times (-\sin \omega t, \cos \omega t, 0) \\ &= mr^2\omega(0, 0, \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) \\ &= mr^2\omega(0, 0, 1) \end{aligned}$$

したがってその大きさは $mr^2\omega$

(3) それぞれの角運動量はともに前小問の式で表される。したがってともに z 軸の正方向を向いている。

(4) 2 つの質点は同じ大きさで同じ向きの角運動量を持っている。したがって全角運動量の大きさは 1 つの質点の角運動量の 2 倍、すなわち $2mr^2\omega$ である。

(5) 1 つの質点の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{mr^2\omega^2}{2}$$

である。全質点の運動エネルギーはこの 2 倍なので $mr^2\omega^2$ となる。

答 157 縮んだ後の角速度の大きさを Ω とすると、前問の小問 (4) と同様に考えれば、縮んだ後の全角運動量の大きさは

$$2m\left(\frac{r}{2}\right)^2\Omega$$

である。ここで、縮む過程で系に働く力は 2 つの質点を近づける内力である。それは当然、2 つの質点を結んだ直線の上にある（その直線自体もくるくる回るが、いずれにせよそれらの力は直線の上にある）。したがって働く力は中心力であるような内力だけである（外力は働かない）。したがってこの系は「質点系に関する角運動量保存則 (2)」の条件を満たすので、縮む前後で全角運動量の大きさは変わらない（もちろん全角運動量の方向も変わらないはずだが、ここではそれを使う必要はない）。したがって

$$2mr^2\omega = 2m\left(\frac{r}{2}\right)^2\Omega$$

この式を変形すれば（いろいろ約分されて） $\Omega = 4\omega$ を得る。すなわち角速度の大きさは 4 倍になる。

よくある質問 189 数学や物理学ができる人はイメージやひらめきが大事だと言います。私はそういうセンスが無くて苦手です。どうすればよいのでしょうか？ ... 「センス」が無くて

も大丈夫です。確かに数学や物理学の新たな理論を発見するには「センス」が必要かもしれません。しかし既に確立された理論（生物資源学類としてはとりあえずそれを理解すれば十分）は筋道立てて論理的に表現・説明されるので（それが「確立」の意味です）、それを丁寧に理解すればよいのです。確立された学問は一部の賢い人たちが独占するものではなく、万人に開かれているものであり、誰もが理解できるような理論体系なのです。

もちろん「センス」は否定しません。それに恵まれた結果、数学や物理学が好き・得意という人もいます。ただ「センスが無いと無理」というのは違います。むしろセンスに頼ってばかりだと、かえって理解できないことが出てきます。高校や大学入試までは数学・物理は好きだし得意だったのに大学入ってから全然わからない・つまらない・苦手になってしまったという人は、センスに頼り過ぎて丁寧に論理的に学ぶことができていないのではないかと振り返ってみるとよいと思います。

よくある質問 190 でも実際、こんな解法どうやったら思いつくんだ？ みたいな問題ってよくありますよね。... それは大学入試の話でしょ？ もう入試は終わったのです。大学での学びは「難しい問題を初見で短時間で独力で解く」ことは求められていないのです。

第12章

慣性モーメント

これまでは質点単体や複数の質点（質点系）について運動を考えてきた。この章ではさらに進んで、大きさと形を持つ物体の運動、特にその回転運動を考えよう。

12.1 剛体というモデル

第1章で述べたように、大きさと形をもつ物体は質点の集まりとしてモデル化できる。ただし物体自体の変形（大きさや形が変わること）まで考えると話が複雑になるので、ここでは

- 物体は質点の集まりで構成される。
- 物体は大きさと形を持つ。
- 物体は変形しない（ひとつの物体を構成する質点どうしの距離は変わらない）。

というようなモデルを考える。このような物体のモデルを剛体（rigid body）とよぶ。

我々の身の回りの物体の多くは剛体とみなせる。カーリングストーンやボールなどはこれまでは質点とみなしてきたが、その大きさや形が関与する運動（ボールの回転や、それによる軌道の変化等）を考えると剛体として扱わねばならない。たとえば地球は太陽との位置関係を議論するときは質点でよいが、地球の自転の様子を議論するときは剛体とみなさねばならない。

ただし剛体も質点ほどではないが、一種の単純化・抽象化されたモデルであり、問題設定によってはそれは不適切なこともある。たとえば地球に起きる地震を考えると地球を剛体とみなしてはダメであり、変形する弾性体として扱わねばならない^{*1}。

^{*1} さらに言えば、起きた振動（地震）が減衰して収まることを表現するためには弾性体ではダメで、摩擦も考慮した「粘弾性体」という物体としてモデル化しなければならない。また、物体が変形して元に戻らないことを表現するには塑性というものも考えねばならず、粘性や弾性も一緒に考慮するには「粘弾塑性体」として考えねばならない。また、水や空気のように流れる性質を持った物体は「流体」として考えねばならない。このように、扱う物体の性質や運動の時空間スケールに応じて本質的に関与する現象は異なるため、物体をどのようにモデル化すべきかは

さて、ここでは理由は詳述しないが、剛体の運動は2つの要素にわけて考えることができる。ひとつはその「重心」の運動であり、もうひとつはその重心のまわりの回転運動である（図12.1）。

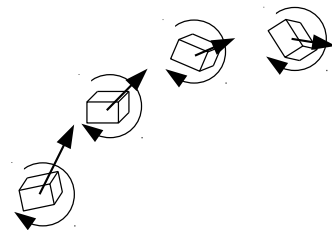


図12.1 空中に投げられたレンガ。このような剛体の運動は、重心の運動と、重心まわりの回転で表現される。

12.2 剛体の回転運動

ここでは剛体の回転運動について考えよう。

まず最も単純な場合として、前章の問156で見たような、2つの質点がペアになって等速円運動（回転）することを考えよう（図12.2）：

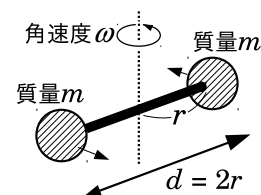


図12.2 棒でつながれた2つの質点からなる剛体の等速円運動。

2つの質点どうしの距離 d が変わらないとき、この2つの質点からなる質点系は剛体である。さてこのとき、

様々な複雑なモデルであればあるほどよいというわけではない。一般に、様々な性質を取り入れれば取り入れるほど、その問題を解くことは難しくなる。したがって、本質を失わない範囲で、扱う物体をできるだけ単純なモデルで考える必要がある。

各質点の運動の速さ（速度の大きさ） v は、式 (6.37) より $v = r\omega$ となる。したがって各質点の運動エネルギーは式 (8.4) より

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 \quad (12.1)$$

となる。したがってこの剛体の運動エネルギー（つまり 2 つの質点の運動エネルギーの和） T は

$$T = mr^2\omega^2 \quad (12.2)$$

となる（ここまでは前章の問 156 の復習である）。式 (12.1) のように、各質点の（回転運動の）運動エネルギーが角速度の 2 乗に比例するから、式 (12.2) のように、全質点の運動エネルギーの和も角速度の 2 乗に比例する。同様に考えれば、ある固定点のまわりを 3 個以上の質点が互いに同じ角速度で等速円運動をしている場合についても、その回転による運動エネルギーは角速度の 2 乗に比例すると類推できるだろう。

12.3 慣性モーメントは剛体の回転を特徴づける量

そこで一般的に、ある軸のまわりに剛体が一斉に同一の角速度 ω で回転する状況を考えよう。剛体を n 個の微小な部分に分割し、それぞれを質量 $m_1, m_2, \dots, m_n$ の質点とみなす。回転軸からそれぞれの質点への距離を $r_1, r_2, \dots, r_n$ とする。 k 番目の質点の速さ（速度の大きさ）は $r_k\omega$ だから、 k 番目の質点の運動エネルギー T_k は次式のようになる：

$$T_k = \frac{1}{2}m_k r_k^2 \omega^2 \quad (12.3)$$

全体の回転の運動エネルギー T はこれらの総和であり、

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + \dots + T_n \\ &= \frac{1}{2}m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2}m_2 r_2^2 \omega^2 + \dots + \frac{1}{2}m_n r_n^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2) \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n m_k r_k^2 \right) \omega^2 \end{aligned} \quad (12.4)$$

となる。式 (12.4) の () 内を抜き出して以下のように定義する：

慣性モーメントの定義

質量がそれぞれ $m_1, m_2, \dots, m_n$ であるような n 個の質点について、

$$I = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 \quad (12.5)$$

で定義される物理量 I を慣性モーメント（moment of inertia）もしくは慣性能率とよぶ。ただし $r_1, r_2, \dots, r_n$ は回転軸から各質点までの距離である。

すると式 (12.4) は以下のように書ける：

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (12.6)$$

これは前章で考えた式 (11.32) と同じ形をしているが、あれよりも一般的な物体について考えた式である。回転する物体の運動エネルギーを考えるとときに頻りに現れる便利で実用的に重要な式である（といっても基本法則や定義ではないが）。

よくある間違い 10 $r_1, r_2, \dots$ を「回転軸からの距離」ではなく「原点からの距離」や「中心からの距離」や「位置ベクトル」と間違える ... 後で述べますが、慣性モーメントは「回転運動の変えにくさ」を表すような量であり、回転の軸から遠いところにあるものほど回しにくいという性質が背景にあります。したがって「回転軸からの距離」が大事なのです。

● 問 158

- (1) 慣性モーメントの定義を述べよ。
- (2) 慣性モーメントの SI 単位は？

● 問 159 問 156 では慣性モーメントは $2mr^2$ であることを示せ。

式 (12.6) を質点の運動エネルギー T の式（式 (8.4) で学んだ）：

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (m \text{ は質量, } v \text{ は速さ}) \quad (12.7)$$

と比べてみよう。すると両者は形式的によく似ていることに気づく。実際、形式的には式 (12.7) における速さ v と質量 m は式 (12.6) における角速度 ω と慣性モーメント I に対応する。つまり形式的に言えば、慣性モーメントは「回転運動における質量みたいなもの」である*2。

*2 注意：同じ物体についても回転軸の位置や向きが違えば慣性モーメントも違う。ここでは深入りしないが、一般的に物体の

質量が物体の「動きにくさ」を表すとしたら慣性モーメントは物体の「回りにくさ」を表すと言ってもよからう*3。

- 問 160 半径 r の円周上に質量 m の質点が 3 個、等間隔に並んで互いに固定されている (図 12.3)。このとき円の中心を貫く垂線を軸とする回転の慣性モーメント I は?

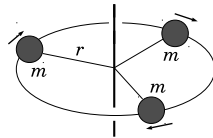
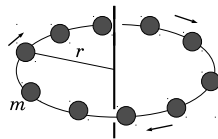


図 12.3 3 個の質点の回転

- 問 161 半径 r の円周上に、質量 m の質点が n 個、等間隔に並んで互いに固定されている (図 12.4)。このとき、円の中心を貫く垂線を軸とする回転の慣性モーメント I は?

図 12.4 n 個の質点の回転

- 問 162 前問で質量の合計すなわち nm を M としよう。 M を一定として m を小さくしながら n を無数に増やせば、これは質量 M の円環になるだろう。そのように考えて、半径 r の円環 (太さは無視できるほど小さいとする) の慣性モーメントは

$$I = Mr^2 \quad (12.8)$$

となることを示せ (図 12.5)。

- 問 163 密度 ρ 、厚さ b の鉄板でできた半径 r 、幅 Δr の円環盤について、中心を貫く垂線を軸とする回転の慣性モーメント ΔI は

$$\Delta I = 2\pi \rho b r^3 \Delta r \quad (12.9)$$

慣性モーメントを任意の回転軸に関して完全に表現するには行列 (テンソル) を使う必要がある (後述する)。

*3 もちろん既に動いている物体については、むしろ質量は「止まりにくさ」であり、慣性モーメントは「回転の止まりにくさ」である。

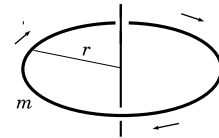


図 12.5 円環の回転

であることを示せ (図 12.6)。ただし Δr は r に比べて十分に小さいものとする。ヒント: Δr が十分に小さいから円環盤は円環とみなせる。また、円環盤の質量は $2\pi r \rho b \Delta r$ である。

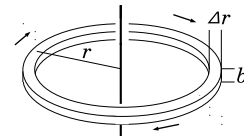


図 12.6 円環盤の回転

- 問 164 密度 ρ 、厚さ b の鉄板でできた半径 r の円盤を考える (図 12.7)。この円盤の中心を貫く垂線を軸とする回転の慣性モーメントを I とする。

- (1) I は次式で表されることを示せ。

$$I = \frac{\pi \rho b r^4}{2} \quad (12.10)$$

円盤は円環盤のあつまりとみなして、前問の結果を様々な r について適用して足しあわせる。 Δr を十分小さくすれば足し合わせは積分になる。

- (2) この円盤の質量を M とすると I は次式で表されることを示せ:

$$I = \frac{Mr^2}{2} \quad (12.11)$$

- (3) この円盤の慣性モーメントは同じ質量と半径を持つ円環の慣性モーメントの半分であることを示せ。

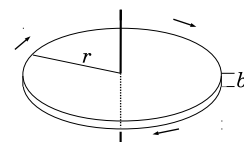


図 12.7 円盤の回転

この問題でわかったように、同じ質量で同じ半径の円形物体でも、円盤の慣性モーメントより円環の慣性モーメントのほうが大きい。つまり、それらを同じ角速度で

回転させると、回転の運動エネルギーは円盤より円環のほうが大きい。

これはなぜだろう？ 考えてみよう。

運動エネルギーは速さが大きいほど大きい（速さの 2 乗に比例する）。円形の物体を回転させるとき、全体がいっしょに回るものの、回転軸から遠い部分ほど速さは大きい。これは運動会などで人が横一列で行進するとき、カーブで曲がる際に外側の人は早足で、内側の人はゆっくり歩かないと列が崩れるのと同じ理屈である。一方、運動エネルギーは質点が持つものである。したがって質点が回転軸よりも遠い部分に多く存在するような物体は回転に多くの運動エネルギーが必要になる。円環はその典型であり、それを構成する全ての質点が回転軸から最も遠いところ（円の縁）にある（それに対して円盤は回転軸から縁まで連続的にびっちりと質点が詰まっているので、回転軸の近くにも質点がそれなりにある）。そういうわけだ。そう考えると慣性モーメントなるものの意味や性質が少しわかってくるだろう。

例 12.1 同じ半径、同じ質量の 2 つの球がある。球 A は表面だけに物質があり、内部は空洞、つまり球殻である。球 B は内部まで物質（固体）が一様にびっちり詰まっている。慣性モーメントはどちらが大きいだろうか？

球 A は球の表面に質量が集中しているのに対して、球 B は球の内部すなわち回転軸に近い部分にも質量が分布している。したがって球 A の方が慣性モーメントは大きい。ちなみにちゃんと計算すると、質量を M 、半径を R とすると、球 A の慣性モーメントは $(2/3)MR^2$ 、球 B の慣性モーメントは $(2/5)MR^2$ であることが証明できる（ここではやらないが、興味のある人は調べてやってみよう）（例おわり）

ここまでは主に円形物体の慣性モーメントを考えてきたが、慣性モーメントはどんな形の物体にでも考えられる量である。そこで、ここまで見た慣性モーメントの計算法を様々な物体にも使えるように拡張・一般化しよう。

任意の形状の連続的な剛体 V について、それがひとつの軸の回りに回転することを考える。回転軸を z 軸とし、それに直交するように x 軸と y 軸を設定しよう。剛体 V を x 軸、 y 軸、 z 軸に沿ってメッシュ状に分割し、横 Δx_i 、縦 Δy_j 、高さ Δz_k の小さな直方体（その中心の座標を (x_i, y_j, z_k) とする。 i, j, k は整数）のあつまりとみ

なす。個々の部分の体積は $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ となり、その質量は $\rho \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ となる（ ρ は密度）。

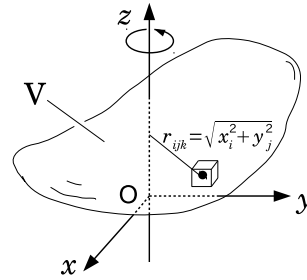


図 12.8 連続的な剛体の回転

さて回転軸（ z 軸）からの距離 r_{ijk} の二乗は

$$r_{ijk}^2 = x_i^2 + y_j^2 \quad (12.12)$$

となる（ z_k^2 は入らないことに注意せよ！）。すると慣性モーメント I は式 (12.5) より

$$I = \sum_i \sum_j \sum_k \rho (x_i^2 + y_j^2) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \quad (12.13)$$

となる。ここで $\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k$ を限りなく小さくすると、それぞれの和は積分に置き換えられ次式のようになる：

連続的な剛体の慣性モーメントの定義

$$I = \int \int \int_V \rho (x^2 + y^2) dx dy dz \quad (12.14)$$

この積分は「体積分」であり（わからない人は数学の教科書を参照せよ）、積分区間は剛体 V の隅から隅までである。

● 問 165 上の式 (12.13) や式 (12.14) においてカッコの中（つまり r^2 ）が $x^2 + y^2 + z^2$ でないのはなぜか？（ z^2 を入れてはいけないのはなぜか？）

● 問 166 問 164 で扱ったのと同じ円盤について、ある直径を軸とする回転の慣性モーメント（図 12.9）が次式のようになることを示せ。

$$I = \frac{Mr^2}{4} \quad (12.15)$$

式 (12.11) と式 (12.15) を比べればわかるように、同じ物体であっても回転軸をどのように設定するかによっ

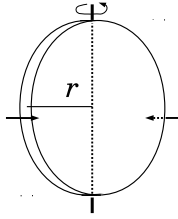


図 12.9 円盤の回転。ただし縦回転。

で慣性モーメントは異なる値をとる。ここでは詳述しないが、互いに直交する 3 つの回転軸を適切に定めてそれらのまわりの慣性モーメントを求めれば、それらを元にどんな方向の回転軸についても慣性モーメントを計算できることが数学的に証明できる^{*4}。

慣性モーメントは農業機械の設計などで重要だ。耕運機はどのような形・質量のロータリーを搭載するかで大きく性能が決まるが、そのロータリーを駆動するのにどのくらいの出力のエンジンが必要か、などという判断は、慣性モーメントを含む力学的見地からの設計にかかっている。出力の大きなエンジンならどんな慣性モーメントを持つロータリーも動かせるが、その反面、重くなるので操作性が悪くなるし燃費も悪くなる。

大きな慣性モーメントを持つ物体、たとえば大きな鉄の円盤などが回転すると大きな運動エネルギーを持つ。これはエネルギーの貯蔵装置として利用できる。

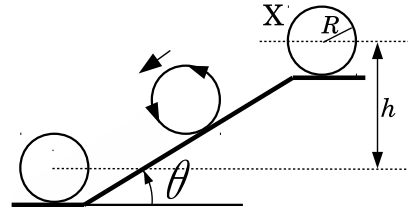
例 12.2 太陽光や風力などの不安定なエネルギー源でも、エネルギーが得られるときには大きな鉄円盤を回すことができる。いったんまわり始めた鉄円盤は角運動量保存則でまわり続けるので、エネルギーが欲しいときに鉄円盤の回転で発電機を回してエネルギーを取り出すことができる。このようなエネルギー貯蔵装置をフライホイールとよぶ。

12.4 慣性モーメントの応用: 斜面を転がる丸い物体

丸い物体が斜面で転がるという現象は、我々がこどもの頃から馴染み深いありふれたシンプルな現象である。ところがそこには直感に反する不思議なことが潜んでいる。そしてそれは慣性モーメントで説明できる。ここでは慣性モーメントをより深く理解する練習として、この

現象を考えてみよう。

- 問 167 傾斜 θ 、高さ h の坂の上から、半径 R 、質量 M 、慣性モーメント I の物体 X を転がそう (図 12.10)。物体 X は横から見たら丸く見える物体であるとする (球や円筒など)。重力加速度を g とする。

図 12.10 斜面を転がり下る物体 X 。

- (1) X のポテンシャルエネルギーを U とする。 X が坂の下にあるとき $U = 0$ とする。 X が坂の上にあるときの U は? ただし一般的に、一様な外力 (重力など) による剛体 (変形しない物体) のポテンシャルエネルギーは、質量が全て重心 (この場合は X の中心) に集中すると仮想したときの質点のポテンシャルエネルギーに等しいことがわかっている。
- (2) X は坂の上から初速 0 で転がり出す。 X が転がり出したとき (速さは 0) の力学的エネルギー E_0 は?
- (3) X が坂の下まで到達したとき重心 (X の中心) の速さは v 、回転の角速度は ω であった。このとき

$$v = R\omega \quad (12.16)$$

が成り立つことを示せ。ヒント: ごく短い時間間隔 Δt の間 (v や ω が一定とみなせるくらいに短い時間間隔) に X は $R\omega\Delta t$ だけ進む。

- (4) X が坂の下まで到達したとき X の力学的エネルギー E_1 は

$$E_1 = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad (12.17)$$

となることを示せ。ただし運動エネルギーは重心の運動エネルギー (全質量が重心に集中した仮想的な質点の運動エネルギー) と重心まわりの回転の運動エネルギーの和であることがわかっている。

- (5) 力学的エネルギー保存則 ($E_0 = E_1$) から以下の式を導け:

$$Mgh = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad (12.18)$$

^{*4} その「適切な 3 つの回転軸」と「そのまわりの慣性モーメント」を求めることは、行列 (対称行列) の固有ベクトルと固有値を求めることに対応する。興味のある人は、しっかりした力学の教科書を参照してみよう。

- (6) (3) で得た関係と前問から以下の式を導け：

$$2gh = v^2 \left(1 + \frac{I}{MR^2} \right) \quad (12.19)$$

- (7) 前問から以下の式を導け：

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I/(MR^2)}} \quad (12.20)$$

- (8) 慣性モーメント I が 0 の場合, $v = \sqrt{2gh}$ となることを示せ。これは質量 M の質点が坂を滑り降りる時の速さに等しい。
- (9) X が, 質量 M が縁に集中している円環の場合, $v = \sqrt{gh}$ となることを示せ。
- (10) X が, 質量 M が一様に分布している円盤の場合, v はどうなるか?

式 (12.20) から, 円形物体が転がる速さは $I/(MR^2)$ に依存することがわかる。これは興味深い結論だ。というのも円形の物体の慣性モーメントは多くの場合, MR^2 に比例するのだ。そのため, $I/(MR^2)$ を求めると質量 M や半径 R が約分されて消えてしまうのだ。たとえば円環は式 (12.8) より, $I/(MR^2) = 1$

円盤は式 (12.11) より, $I/(MR^2) = 1/2$

球殻は例 12.1 より, $I/(MR^2) = 2/3$

一様に詰まった球は例 12.1 より, $I/(MR^2) = 2/5$

となる。このように, $I/(MR^2)$ は物体の質量や大きさによらない定数になってしまうことが多い。つまり, 転がる物体の速さは物体の質量や大きさによらず, 形状 (質量が全体の中のどのあたりに多く分布しているか) によって決まるのだ。たとえば円環の転がる速さは円環の質量や大きさによらず同じだし, 円盤の転がる速さは円盤の質量や大きさによらず同じである。しかし円環と円盤では転がる速さは違うのだ。実際, 式 (12.20) をじっと睨むと, $I/(MR^2)$ が大きければ転がる速さ v は小さくなることがわかる。

- 問 168 円環, 円盤, 球殻, 中身が一様に詰まった球を, 同じ斜面に転がすことを考える。すると速い順に

- (1) 詰まった球 (最も速い)
- (2) 円盤
- (3) 球殻
- (4) 円環 (最も遅い)

となるはずだ。それがなぜか説明せよ。また, やる気があれば (笑) それを実際に実験して確かめてみよ。円盤

のかわりに円柱, 円環のかわりに円筒を使ってもよい。

- 問 169 ガリレオ・ガリレイは質量の異なる 2 つの球を斜面に転がして速さが同じであることを観察し, 物体の落下の速さは質量によらないということを発見したと言われる。ところがガリレイがもし, 片方は中空の球を, もう片方は中身がびっちり詰まった球を実験に使ったとしよう。その場合, 科学の歴史はどう変わったと君は考えるか?

12.5 (発展) 分子の回転運動

慣性モーメントは化学でも重要だ。多原子分子は温度に応じて並進と振動と回転という 3 種類の運動をする^{*5}。この回転運動の性質を解析することで分子の様子を調べることができる。

例として, 質量 m の原子 2 個からなる 2 原子分子を考える。原子間の距離を d とする。重心は原子どうしの中点にある。2 つの原子を結ぶ直線に垂直で重心を通るひとつの直線を軸とする回転運動を考える (図 12.11)。重心から各原子までの距離を r とする。当然 $d = 2r$ だ。

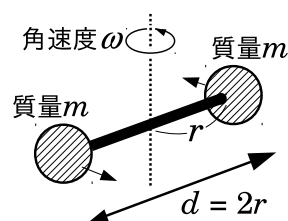


図 12.11 2 原子分子の回転。

P.143 で学ぶエネルギー等分配則によれば, 一般に, 絶対温度 T の気体の 1 分子は, ひとつの自由度につき $k_B T/2$ という運動エネルギーを平均的に持つ。今考えている回転運動も 1 つの自由度を持った運動といえるので, この回転に関する平均的な運動エネルギー K は

$$K = \frac{1}{2} k_B T \quad (12.21)$$

である^{*6}。一方, この原子の慣性モーメント I は, 問 159

^{*5} ただし常温では振動運動は熱にあまり関係しない。

^{*6} これまで運動エネルギーは T で表すことが多かったが, この問題では T は温度を表すので, それとの混乱を避けるために運動エネルギーを K と書いた。

より $I = 2mr^2$ だ。したがって次式が成り立つ:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = mr^2 \omega^2 \quad (12.22)$$

- 問 170 この 2 原子分子について

- (1) 次式を示せ:

$$\omega = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{k_B T}{2m}} \quad (12.23)$$

- (2) 窒素原子 ^{14}N と ^{15}N の質量をそれぞれ求めよ (単位を kg とする)。
 (3) 窒素分子の原子間距離は $d = 0.11 \text{ nm}$ である。常温 (300 K) における, $^{14}\text{N}_2$ 分子の回転の角速度 ω_1 と, $^{15}\text{N}_2$ 分子の回転の角速度 ω_1 を調べよ。両者にはどのくらいの差があるか?

諸君は, 元素の同位体は化学的特性が同じなので化学的に分別することは難しいと習っただろう。しかしこの問題でわかるように, 異なる同位体は同じ温度のもとでも異なる角速度で回転する。これによって異なる同位体が発したり吸収したりする光の波長は微妙に異なる。これが同位体計測の鍵である。

ただしこの問題で扱った方法はニュートン力学に基づく「古典的」と言われるものであり, 正確ではない。実際は分子の回転運動は古典的な扱いではダメで, 量子力学で扱わねばならない。量子力学的では「回転運動の角速度」という概念は意味を持たない。そのかわりに「角運動量」をもとに理論を組み立てる。しかしこのような古典的な扱いでもいろんなことがわかるし, 量子力学的な扱いをするときに考え方の出発点となる。

12.6 (発展) 剛体振り子

大学の「物理学実験」という科目には振り子を利用して重力加速度を測る実験が行われることが多い。そこでは問 143 で学んだ糸に質点がつるされた振り子でなく, 剛体の振り子を使う。ここではその予習をしておこう。

- 問 171 質量 M の剛体に穴が開けられ, その穴に軸を通してその軸が定点 P に固定されている (図 12.12)。剛体は軸のまわりに自由に回転することができる。軸のまわりの回転の慣性モーメントを I とする。剛体の重心を G とする。P から G の距離は l である。G が最も下に来たときの位置を O とする。剛体を少し持ち上げて静かに手放すと重心 G は鉛直平面内で振動運動をする。時刻 t における重心の位置を $G(t)$ とし, 角 OPG を $\theta(t)$

としよう。空気抵抗は無視する。

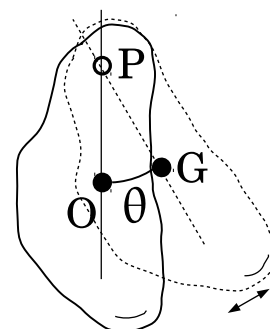


図 12.12 剛体振り子。

- (1) 時刻 t における剛体の運動エネルギー $T(t)$ は次のようになることを示せ:

$$T(t) = \frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (12.24)$$

- (2) 時刻 t におけるこの剛体のポテンシャルエネルギー $U(t)$ は次のようになることを示せ。

$$U(t) = M g l (1 - \cos \theta) \quad (12.25)$$

ただし G が点 O にあるとき $U = 0$ と定める。

- (3) 力学的エネルギー保存則から次式 (剛体振り子の運動をあらわす方程式) を得よ:

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -M g l \sin \theta \quad (12.26)$$

- (4) ここで「等価振り子の長さ」というものを

$$\bar{l} = \frac{I}{M l} \quad (12.27)$$

と定義し, $\bar{l}$ を使って上の方程式を書き換えると質点の振り子の方程式 (式 (10.35)) と同じ形

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{\bar{l}} \sin \theta \quad (12.28)$$

となることを示せ。

- (5) 角 θ が十分に 0 に近い範囲で変化するならば, 式 (12.28) は次のように近似できることを示せ:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{\bar{l}} \theta \quad (12.29)$$

- (6) 上の方程式について $\theta = \theta_0 \cos \omega t$ という式を仮定して代入し, 振動の角速度 ω を求め, 振動の周期 T

が次式のようになることを示せ：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{g}} \quad (12.30)$$

(7) 次式を導け：

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 I \quad (12.31)$$

12.7 慣性モーメントと角運動量

慣性モーメント I は剛体の回転運動の運動エネルギーを式 (12.6) のように表すために定義された。しかし慣性モーメントの効用はもうひとつある。それは式 (11.31) に伏線を張ったことである。すなわち、剛体の角運動量の大きさ L が $L = I\omega$ と表すことができるのだ。そのことを説明しよう。

いま、 n 個の質点からなる剛体の回転運動を考える。すなわち全ての質点が一斉に同一の回転軸のまわりを角速度 ω で回転しているとする。 k 番目 ($k = 1, 2, \dots, n$) の質点のことを「質点 k 」とよび、その質量を m_k 、回転軸からの距離を r_k とする。

質点 k の速さ v_k は $v_k = r_k\omega$ である。したがって質点 k の運動量の大きさ p_k は $p_k = mv_k = mr_k\omega$ である。したがって質点 k の角運動量の大きさ L_k は r_k と $mr_k\omega$ の積であり、 $L_k = mr_k^2\omega$ となる（回転軸から質点へのベクトルと、質点の速度ベクトルは互いに直交しているので、それらの外積の大きさはそれらの大きさの積になる）。ところで全ての質点の角運動量は回転軸と同じ向きを向いているから、全ての質点の角運動量は互いに同じ向きを向いている。したがって全質点の角運動量（つまりこの剛体の角運動量）の大きさ L は各質点の角運動量の大きさ L_k を単純に足せば求まる。すなわち

$$L = \sum_{k=1}^n L_k = \sum_{k=1}^n mr_k^2\omega = \left(\sum_{k=1}^n mr_k^2\right)\omega \quad (12.32)$$

となる。ここで慣性モーメントの定義（式 (12.5)）を思い出すと、この式は

$$L = I\omega \quad (12.33)$$

となる。つまり角運動量は慣性モーメントと角速度の積に等しい！*7。

*7 ここで君が注意深い人ならば「それはあくまで大きさが等しいだけで、ベクトルとして等しいことは証明されていないではないか？」と思うだろう。実は式 (12.33) はベクトルの方程式に拡張できるのだ。すなわちこういうことだ：上の議論をベクトルを用いてきちんと方向まで考えて修正すると、まず、角速度

これは運動量の定義：

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (12.39)$$

と似ている。すなわち左辺は運動量または「角」運動量で、右辺は速度または「角」速度に係数がかかっている。その係数が、片方は質量、もう片方は慣性モーメントである。つまり慣性モーメントは「回転運動版の質量」のような位置づけの量である。そのことは運動エネルギーに関する式 (12.7) でも話題に出たことを思い出して欲しい。

12.8 解答

答 158 (1) 略。(2) 式 (12.5) より、 I の単位は $m_k r_k^2$ の単位なので、 kg m^2

答 159 式 (12.5) で $n = 2$, $r_1 = r_2 = r$, $m_1 = m_2 = m$ とすればよい。 $I = m r^2 + m r^2 = 2m r^2$

答 160 式 (12.5) で $n = 3$, $r_k = r$, $m_k = m$ とすればよい。 $I = 3m r^2$

答 161 式 (12.5) で、 $r_k = r$, $m_k = m$ とすればよい。

は回転軸の方向を向いているベクトル量とみなすことができ、それを ω とおき、「角速度ベクトル」とよぶ。また、質点 k の速度は $\mathbf{v}_k = \omega \times \mathbf{r}_k$ となる（ $\mathbf{r}_k$ は質点 k の位置ベクトル ... 回転軸に垂直なベクトルではなく、原点からのベクトルであることに注意。すなわち $\mathbf{r}_k = r_k$ とは限らない）。そして質点 k の角運動量は $L_k = \mathbf{r}_k \times (m_k \omega \times \mathbf{r}_k)$ となる。ここで3つのベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ の外積に関する数学の公式に以下のようなものがある（「ベクトル三重積」とよばれる。「ライブ講義大学生のための応用数学入門」参照）：

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (12.34)$$

これを使うと

$$L_k = m_k \{(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_k)\omega - (\mathbf{r}_k \cdot \omega)\mathbf{r}_k\} \quad (12.35)$$

となる。これを全ての質点について足したものを $\mathbf{L}$ とすると

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^n m_k \{(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_k)\omega - (\mathbf{r}_k \cdot \omega)\mathbf{r}_k\} \quad (12.36)$$

である。これを行列を使って書き換えると以下のような式になる：

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} y_k^2 + z_k^2 & -x_k y_k & -z_k x_k \\ -x_k y_k & z_k^2 + x_k^2 & -y_k z_k \\ -y_k z_k & z_k x_k & x_k^2 + y_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (12.37)$$

この左辺のベクトルが角運動量 $\mathbf{L}$ であり、右辺の最後のベクトルが角速度ベクトル ω である。そして右辺の行列（ Σ を含めて）を「慣性テンソル」とよび、改めて I と置く。すなわち

$$\mathbf{L} = I\omega \quad (12.38)$$

となるのだ。

$I = nm r^2$ 答 162 前問で $nm = M$ とすれば与式を得る。

答 163 円環盤も円環の一種だ。この円環盤をどこか 1 箇所まで切ってまっすぐに伸ばしたら断面積は $b\Delta r$ 、長さは $2\pi r$ の鉄棒になる。その体積は $2\pi br\Delta r$ 。密度が ρ なので質量は $2\pi\rho br\Delta r$ 。これを M として式 (12.8) に代入すると与式を得る (ただしここでは慣性モーメントを I でなく ΔI と書いていることに注意)。

答 164

(1) 円盤を Δr の幅の n 個の円環盤に分割し、式 (12.9) で与えられる各円環盤の慣性モーメントを足し合わせると、円盤の慣性モーメント I になるはずだ。すなわち次式のように書ける:

$$I = \sum_{k=1}^n 2\pi\rho b r_k^3 \Delta r \quad (12.40)$$

ここで r_k は k 番目の円環盤の半径である。分割をどんどん細かくして Δr を十分に 0 に近づけ、円環の数をどんどん増やすならば、この式は次式ようになる:

$$I = \int_0^R 2\pi\rho b r^3 dr \quad (12.41)$$

ここで R は円盤の半径である。この積分を実行すると $I = \pi\rho b R^4/2$ 。ここで改めて R を r に置き換えると式 (12.10) を得る。

(2) この円盤の質量 M は $M = \pi\rho b r^2$ なので、式 (12.10) より $I = M r^2/2$ となり、式 (12.11) を得る。

(3) 同質量の円環の慣性モーメントは式 (12.8) より $M r^2$ である。この円盤の慣性モーメント (前小問で求めた) $M r^2/2$ はその半分である。

答 165 慣性モーメントの本来の定義、つまり式 (12.5) では r_k は原点からの距離ではなく、回転軸からの距離だった。連続的な剛体に関する慣性モーメントも事情は同じだ。したがって剛体の各部分について、 r として原点からの距離つまり $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ではなく、回転軸 (z 軸) からの距離つまり $\sqrt{x^2 + y^2}$ を考えねばならない。

答 166 回転軸を z 軸、それに直交して円盤の直径方向に x 軸、厚さ方向に y 軸をとる。円盤の中心を原点とする。円盤の厚さを b とする。密度を ρ とする。円盤上の点 (x, y, z) と z 軸との距離は $\sqrt{x^2 + y^2}$ だ。慣性モーメント I は、式 (12.14) より

$$I = \int_{-r}^r \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-\sqrt{r^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} \rho(x^2 + y^2) dx dy dz$$

である。ここで円盤が十分に薄いとすれば $x^2 + y^2 \doteq x^2$ であり、その近似のもとに、 y について先に積分すれば (このような積分は積分の順序を適宜、入れ替えて構わない)

$$I = b \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} \rho x^2 dx dz \quad (12.42)$$

となる。これを x について積分すれば

$$I = b \int_{-r}^r \left[\rho \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{r^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} dz = \frac{2b\rho}{3} \int_{-r}^r (r^2 - z^2)^{3/2} dz$$

となる。この被積分関数は z に関する偶関数だから

$$I = \frac{4b\rho}{3} \int_0^r (r^2 - z^2)^{3/2} dz \quad (12.43)$$

となる。ここで $z = r \sin \theta$ と置換すると (置換積分)、 $dz = r \cos \theta d\theta$ であり、積分区間は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ であり、被積分関数は $(r^2 - z^2)^{3/2} = (r^2 - r^2 \sin^2 \theta)^{3/2} = \{r^2(1 - \sin^2 \theta)\}^{3/2} = (r^2 \cos^2 \theta)^{3/2} = r^3 \cos^3 \theta$ 。したがって $I =$

$$\frac{4b\rho}{3} \int_0^{\pi/2} r^3 \cos^3 \theta r \cos \theta d\theta = \frac{4br^4\rho}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta$$

ところでオイラーの公式から

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}}{16} \\ &= \frac{e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}}{16} + \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{4} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{\cos 4\theta}{8} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{3}{8} \end{aligned} \quad (12.44)$$

したがって

$$\begin{aligned} I &= \frac{4br^4\rho}{3} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos 4\theta}{8} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{3}{8} \right) d\theta \\ &= \frac{4br^4\rho}{3} \left[\frac{\sin 4\theta}{32} + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{3\theta}{8} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{4br^4\rho}{3} \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi br^4\rho}{4} = \frac{M r^2}{4} \end{aligned} \quad (12.45)$$

ここで $M = \pi br^2\rho$ を使った。

答 167

(1) $U = Mgh$ 。

(2) 速さが 0 なので運動エネルギーは 0。したがって力学的エネルギー E_0 はポテンシャルエネルギー U だけである。したがって (1) より $E_0 = Mgh$ 。

(3) 速さは進んだ距離 ($R\omega\Delta t$) を時間 (Δt) で割ったも

のなので $R\omega\Delta t/\Delta t = R\omega$ 。

(4) 重心の運動エネルギーは $Mv^2/2$ であり、回転の運動エネルギーは (式 (12.6) より) $I\omega^2/2$ である。これらを足すと与式を得る。

(5) (1) と (4) より与式を得る。

(6) 前小問の式に (3) の結果を代入して v を消すと

$$Mgh = \frac{MR^2\omega^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad (12.46)$$

となる。両辺を2倍して M で割ると与式を得る。

(7) 略 (式 (12.19) を v の形に式変形すればよい)。

(8) 略 (式 (12.20) に $I = 0$ を代入するだけ)。

(9) 式 (12.8) より $I = MR^2$ 。これを式 (12.20) に代入して与式を得る。注: 式 (12.8) の r を勝手に R に置き換えて良いのか? と思う人はそれぞれの式で使われている記号の定義に戻って考えよう。

(10) 式 (12.11) を式 (12.20) に代入して $v = \sqrt{4gh/3}$

答 169 略 (自由に考え友人と議論せよ。それが大学の学び)。

答 170 略。(3) は $10^{12}/s \sim 10^{13}/s$ 程度の量になる。

答 171

(1) 剛体の振動運動は、ごく短い時間を切り出して考えれば軸を中心とする回転運動の一部とみなすことができる。その角速度 ω は単位時間あたりに変化する角なので、 θ を時刻 t で微分したものに等しい。したがって $\omega = d\theta/dt$ である。これを式 (12.6) に代入して与式を得る。

(2) 剛体の (重力による) ポテンシャルエネルギーは、基準点からの重心の高さと全質量、そして重力加速度をかけたものに等しい。題意より、定点 (軸の位置) P から原点 O までの距離は l である。 P から重心 G までの距離も l だが、剛体が角 θ だけ傾いているときは、 P と G の高さの差は $l \cos \theta$ となる。したがって原点 O と重心 G の高さの差は $l - l \cos \theta$ となる。したがってポテンシャルエネルギーは与式ようになる。

(3) 力学的エネルギー保存則より、 $T(t) + U(t)$ は時刻によらず定数である。したがって $T(t) + U(t)$ を t で微分したら恒等的に 0 になる。したがって、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{T(t) + U(t)\} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + Mgl(1 - \cos \theta) \right\} \\ &= I \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + Mgl \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = 0 \end{aligned}$$

この式から与式を得る。

(4) 略 (式 (12.27) を使って式 (12.26) から I を消去すると式 (12.28) を得る)。

(5) $\sin \theta = \theta$ と近似すれば与式を得る。

(6) 注: 以下の ω は (1) で出てきた ω とは別物である。 $\theta = \theta_0 \cos \omega t$ を式 (12.29) に代入すると

$$-\omega^2 \theta_0 \cos \omega t = -\frac{g}{l} \theta_0 \cos \omega t \quad (12.47)$$

となる。これが全ての t について成り立つから $\omega^2 = g/l$ 。振動の周期 T は、 $T = 2\pi/\omega$ より、与式を得る。

(7) 式 (12.30) を g の形に式変形すれば与式を得る。

第13章

熱力学入門

熱や温度に関する物理学を熱力学という。それらはニュートン力学と多くの接点を持つのでここで概略を学んでおこう。なお、熱力学は化学との繋がりが深い。

13.1 粒子の運動エネルギーと温度

物質や物体は膨大な数の原子や分子から構成される。それらの粒子どうしは引力や斥力を及ぼしあい、時には衝突しつつ共存する。その様子を知るには、原理的には全粒子のそれぞれについて運動方程式を解いて追跡すればよい。そのように個々の粒子の挙動に注目する観点を微視的（ミクロ）な観点という。

しかし現実的にはそれは大変だし、そこまでのくわしい様子を知る必要も少ない。むしろ興味があるのは、粒子集団が全体として平均的にどのような性質を持つかということだ。そのような観点を巨視的（マクロ）な観点という。

熱力学は物質や物体の巨視的な性質を検討する。そのときに最初に便利な指標が温度だ。温度とは何だろう？温度には様々な定義があるが、わかりやすいのは以下である^{*1}（必ず覚えよう）：

絶対温度の定義（エネルギー等分配則とも言う）

物体を構成する粒子について、ひとつの粒子・ひとつの自由度における平均的な運動エネルギー K が

$$K = \frac{1}{2} k_B T \quad (13.1)$$

と書けるとき、 T をその物体の絶対温度とよぶ。 k_B はボルツマン定数とよばれる定数で、

$$k_B = 1.38065... \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \quad (13.2)$$

式 (13.1)、式 (13.2) をもとに定義される温度の単位を K（ケルビン）という^{*2}。

^{*1} ここで温度を T と表すことに注意。これまでは T は運動エネルギーを表していたが慣習的には温度を表す方が多い。そこでこの章では運動エネルギーは T ではなく K で表す。

^{*2} 温度の単位を表す K の記号は他の単位の記号と同じように立

ここで自由度とは独立した「運動の仕方」の数である。たとえば単原子分子からなる気体（図 13.1）では、ひとつの分子（＝原子）は3つの各方向（ x 方向、 y 方向、 z 方向）に自由に直線運動ができ、各方向の運動は互いに独立である（ x 方向に大きな速度で飛ぶからといって y 方向にはゆっくり飛ばねばならない、というような制約は存在しない）。したがって自由度は3である。

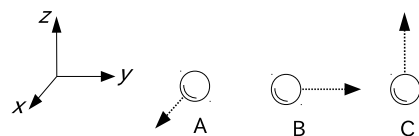


図 13.1 単原子分子気体の自由度。A: x 方向の直線運動, B: y 方向の直線運動, C: z 方向の直線運動。

式 (13.1) は、粒子の運動エネルギーが平均的には各自由度に等しく割り当てられることも主張している。たとえば、ある物質の中で多くの粒子が同じ特定の方向にだけ激しく運動して、その方向の自由度だけに大きな運動エネルギーを持つ、というような「偏った状態」にはならないということだ^{*3}。その事情を表して、式 (13.1) のことをエネルギー等分配則とよぶこともある。

式 (13.1) は「温度の定義」なので、とりあえずその由来や正当性に疑問を持つ必要はない。むしろ不思議なのは式 (13.1) のように定義される温度が、我々の感覚である熱さ・冷たさや温度計の指す値にきちんと対応していることだ。そのあたりは「化学」や秋学期の「物理学」などで学んでもらうとしよう。

式 (13.1) は粒子の平均的な運動エネルギーは物体の温度に比例することを主張している。その比例係数に

体（正体；ローマン体）である。それに対して式 (13.1) の左辺に出てくる運動エネルギーを表す変数 K は斜体で書いていることに注意。これらは全く別物だ。

^{*3} それにはちゃんとした理由があるのだが、難しいのでここでは述べない。興味ある人は「統計力学」という分野を勉強してみよう！

「ボルツマン定数」という怪しげな数とか「 $1/2$ 」とかが現れているが、これらは「ケルビン」という「温度の単位」を人類が採用してしまったことに対応するつじつま合わせ（単位換算）のための数に過ぎない。実際、運動エネルギーと温度が比例するのならいっそ（粒子の 1 自由度あたりの平均的な）運動エネルギーそのものを温度としてしまえばよかったのだが、今さらそれもめんどくさいので、人類はこれからも温度とエネルギーを別の次元の物理量として扱っていくのだろう。

- 問 172 絶対温度の定義を 5 回書いて記憶せよ。

我々の日常では温度は「摂氏」で表すことが多い。ある物体が摂氏温度で t のときの絶対温度を T K とすると $t = T - 273.15$ と定義されている^{*4}。歴史的には水が凍る温度を 0、沸騰する温度を 100 とするのが摂氏の由来だが、現在は絶対温度との換算式によって摂氏は定義されている。

- 問 173 以下は Twitter に出ていた小話である：

—
 教員「太陽表面の温度は****度と推定されている」
 学生「先生、それは摂氏ですかそれとも絶対温度ですか？」
 教員「（少し考えて）どちらでもよい」
 —

なぜ教員は「どちらでもよい」と言ったのか？

- 問 174 質量 m の気体分子の運動を考える。各分子が速度 (v_x, v_y, v_z) で空間を飛ぶとき、エネルギー等分配則によって、 v_x に関する運動エネルギーつまり $mv_x^2/2$ の平均は、 $k_B T/2$ となる。したがって、平均的には^{*5}

$$|v_x| = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \quad (13.3)$$

となる。 $|v_y|$, $|v_z|$ についても同様である。すると速度の大きさ（つまり速さ） v は

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (13.4)$$

なので、 v は平均的には

$$v = \sqrt{3 \frac{k_B T}{m}} \quad (13.5)$$

^{*4} この 273.15 に単位をつけていないことに注意。普通、物理量の記号は単位を内包して定義するが、ここでは t , T K というふうに単位を記号の外につけたので、 t , T が表す量は無次元である。したがって 273.15 も無次元量であり単位は不要。

^{*5} 厳密には v_x の二乗平均平方根（root-mean-square）。

となる。以下、 $T = 300$ K（摂氏 27 度）で考える：

- (1) 水素分子 H_2 の x 方向の平均的な速さを求めよ。
- (2) 水素分子 H_2 の平均的な速さを求めよ。
- (3) 窒素分子 N_2 の平均的な速さを求めよ。

ところで「化学」でグラハムの法則というのを習った人もいるだろう。それは、気体分子の速さ v がその質量 m の平方根に反比例するという法則だ。これは式 (13.5) で明らかだ。

13.2 理想気体の状態方程式（気体分子運動論）

これまで学んだことを使って気体の温度・圧力・体積の間の関係を理論的に導いてみよう。

今、簡単のため一辺の長さが L の立方体の箱を考える。図 13.2 のように立方体の中心を原点 O とし、 x , y , z 軸のそれぞれに立方体の面が直交するように座標軸を設定する。点 $(L/2, 0, 0)$ で x 軸と直交する面を面 A とよぶ。

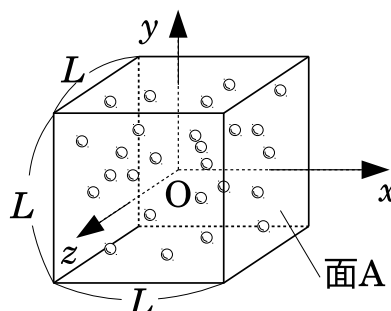


図 13.2 気体分子の運動を考える座標系と箱。

この箱の中に N 個の気体分子が入っているとします。ここで以下の仮定を置く：

理想気体の仮定

- 気体分子の大きさは十分に小さい。
- 気体分子同士に働く内力は無視できる。

この 2 つの仮定を満たす分子からなる気体を「理想気体」という^{*6}。今、立方体の中には理想気体が入っているとします。

^{*6} 理想気体は厳密な意味では現実には存在しない。現実の気体は多かれ少なかれ、理想気体とは違った性質を持つ。現実の気体のめんどくさい性質を忘れて単純化して理論的に扱いやすくしたのが理想気体である。つまり理想気体は一種の「モデル」である。とはいえ多くの場合で現実の気体を理想気体として扱っても概ね OK である。理想気体は優れたモデルなのだ。

箱の内側では気体分子が飛び交っており、絶えずその一部が面 A に内側から衝突し、跳ね返されている。この衝撃が面 A を外に押し出そうとする。したがってそれを打ち消すように外側から適当な圧力（ P とする）をかけないとこの箱は壊れてしまうだろう（図 13.3）。

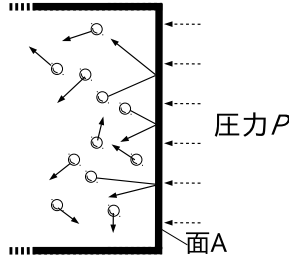


図 13.3 面 A の付近（ z 軸の正の方向から見たところ）。分子が面 A にひっきりなしにぶつかるので、面 A を外側から圧力 P で支えていないといけない。

その事情を詳しく見てみよう：今、簡単のためにどの気体分子も x 軸に沿った方向（ x 軸の正の方向か負の方向）に一定値 v_x という速さで動いているとしよう（ $0 < v_x$ とする）。つまり x 軸方向の速度は v_x か $-v_x$ であるとする（実際は気体分子の速度はもっといろんな可能性があり、 x 軸に沿った速度の二乗平均平方根が v_x に等しいだけだが、仮にそういうのを考慮して厳密に理論展開しても以下と同じ結論に至る）。したがってどの気体分子も時間 Δt の間に $v_x \Delta t$ だけ x 軸に沿って移動する（そのうち半分は面 A に向かう方向で、残りは面 A から離れる方向である。そのことは後で考慮する）。したがって時間 Δt の間に内側から面 A に衝突する気体分子は面 A から距離 $v_x \Delta t$ までの領域にいるはずだ。その領域の体積は

$$L^2 v_x \Delta t \quad (13.6)$$

である。箱の中の気体分子は均等に分布すると考えれば、上述の領域の中の分子数は領域の体積に比例するので

$$\frac{L^2 v_x \Delta t}{L^3} N \quad (13.7)$$

となる^{*7}。この個数のうち半分が x 軸の正方向（面 A に向かう方向）、半分が x 軸の負の方向（面 A から離れ

る方向）に進むので、面 A に衝突する個数は

$$\frac{1}{2} \frac{L^2 v_x \Delta t}{L^3} N = \frac{N v_x \Delta t}{2L} \quad (13.8)$$

となる。

さて気体分子 1 個が面 A にぶつかって跳ね返る状況を考えよう。気体分子が跳ね返るとき、面 A との間に摩擦が働かず、分子の運動エネルギーは変化しない（弾性衝突）とすると、面 A に平行な速度成分（ v_y と v_z ）は変化せず、面 A に垂直な成分（ v_x ）が大きさを变えずに符号だけ反転する。すると x 方向の運動量は衝突前は mv_x 、衝突後は $-mv_x$ になるので、結局 1 個の気体分子の衝突前後の運動量変化は次式になる：

$$-mv_x - (mv_x) = -2mv_x \quad (13.9)$$

実際は 1 個でなく式 (13.8) で表される個数が Δt の間に面 A にぶつかるので、それらの運動量変化の合計は次式になる：

$$\frac{N v_x \Delta t}{2L} \times (-2mv_x) = -\frac{N m v_x^2 \Delta t}{L} \quad (13.10)$$

この運動量変化は面 A に外側からかかる力がもたらす力積に等しいはずだ（運動量変化＝加えられた力積）。

面にかかる力は圧力×面積であり、面 A の面積は L^2 だ。したがって面 A に（外側から）かかる力は $-PL^2$ である（マイナスは力の向き、つまり x 軸の負の方向を表すためにつけた）。その力による力積は

$$-PL^2 \Delta t \quad (13.11)$$

となる。式 (13.10) と式 (13.11) が一致することが面 A が静止する条件である：

$$-PL^2 \Delta t = -\frac{N m v_x^2 \Delta t}{L} \quad (13.12)$$

これを整理すると

$$PL^3 = N m v_x^2 \quad (13.13)$$

となる。いま L^3 は箱の体積 V なので、式 (13.13) は

$$PV = N m v_x^2 \quad (13.14)$$

となる。さらに式 (13.3) より

$$v_x^2 = \frac{k_B T}{m} \quad (13.15)$$

なので、式 (13.14) は以下のようになる：

^{*7} 箱の体積は L^3 であり、その中に N 個の気体分子が均等に分布している。したがって箱の中の気体分子の数密度（単位体積当たりの分子数）は N/L^3 だ。これに、いま考えている領域の体積（式 (13.6)）をかければ、その領域内の気体分子数が得られるはずだ。それが式 (13.7) である。

理想気体の状態方程式

$$PV = Nk_B T \quad (13.16)$$

ここで分子数を「個」でなくて「モル」で数えよう。すなわち N 個が n モルに相当するとすれば $N = nN_A$ である (N_A はアボガドロ定数で約 $6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$)。したがって式 (13.16) は以下ようになる:

$$PV = nN_A k_B T \quad (13.17)$$

ここで物理学の慣習として以下の定数を導入する:

気体定数の定義

以下で定義される定数 R を気体定数 (gas constant) とよぶ:

$$R = N_A k_B \quad (13.18)$$

その値は $8.314472 \dots \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ である。

すると式 (13.17) は以下のように書ける*8:

理想気体の状態方程式 (モルで表す場合)

$$PV = nRT \quad (13.19)$$

- 問 175 理想気体とは何か?
 - 問 176 理想気体の状態方程式を導出せよ (上記の解説を整理して再現すればよい)。
 - 問 177
- (1) ボルツマン定数 k_B の値を有効数字 3 桁で述べよ。
 - (2) 気体定数 R の値を有効数字 3 桁で述べよ。
 - (3) ボルツマン定数と気体定数の関係を式で述べよ。

13.3 理想気体の内部エネルギーと温度

さて物質や物体を構成する全ての粒子のエネルギー (運動エネルギーとポテンシャルエネルギー) を合計したものをその物質や物体の「内部エネルギー」という (定義)。ここで理想気体を考えよう。理想気体では気体分子が相互に及ぼす力は無視できるので、気体分子同士

が及ぼし合う力によるポテンシャルエネルギーは無視してもかまわない。また、非常な低温でもない限り重力によるポテンシャルエネルギーは運動エネルギーよりはるかに小さい。したがって理想気体の内部エネルギーは大部分が構成粒子 (気体分子) の運動エネルギーの総和であると考えてよい。また、化学反応等が気体内で起きる状況はとりあえず今は考えない (後で考察する)。

エネルギー等分配則によれば、運動エネルギーは 1 粒子あたり・1 自由度あたり平均的に $k_B T/2$ だ。このことから、自由度 F を持つ気体分子が N 個からなる気体の内部エネルギーを $U_{\text{理想気体}}$ とすると*9,

$$U_{\text{理想気体}} = \frac{F}{2} N k_B T \quad (13.20)$$

となる。すなわち理想気体の内部エネルギーは温度に比例し圧力や体積とは直接には無関係である*10。

さて式 (13.20) において分子が n モルあるとすると、 $N = nN_A$ だから

$$U_{\text{理想気体}} = \frac{F}{2} n N_A k_B T \quad (13.21)$$

となる。式 (13.18) を使うと

$$U_{\text{理想気体}} = \frac{F}{2} n R T \quad (13.22)$$

となる。特に分子数を 1 モルとすると、

$$U_{\text{理想気体}} = \frac{F}{2} R T \quad (13.23)$$

となる。

では自由度 F はどう決まるのだろうか? 前述のように単原子分子気体 (He, Ne 等) は 3 方向の直線運動の自由度を持つので $F = 3$ である。ところが 2 原子分子 (H_2 , O_2 , N_2 等) は直線運動だけでなく、回転運動も行う*11。直線状の棒を回すのには独立した (つまり互いに直交した) 軸が 2 つある*12ので、これらの回転の自由度は 2 である。したがってこれらの分子の自由度 F は直線運動に 3, 回転運動に 2 で合計 5 となる (図 13.4)。

*8 高校物理では気体分子運動論と状態方程式から式 (13.1) を導くというストーリーだが、物理学の理論体系では話は逆であり、まず式 (13.1) が基本原理から導かれ、そしてそれを気体分子運動論に適用して状態方程式が導かれる (ここで見たように)。

*9 力学では U は多くの場合、ポテンシャルエネルギーを表す記号として慣習的に使われる。しかし熱力学では慣習的に U は内部エネルギーを表す。ここでは熱力学の慣習に従う。

*10 もちろん圧力と体積は温度と関係があるから、圧力や体積は温度を介して間接的な関係はある。

*11 回転運動にも運動エネルギーが与えられることは後の章で学ぶ。

*12 一般に物体を回転させる独立な回転軸は 3 つある。しかし直線状の分子の場合は直線の断面は大きさを持たない点とみなしてよい。したがって直線を軸にする回転は考えなくてよい。同様に 1 原子分子は点とみなしてよいので、いずれの方向を軸とする回転も考えなくてよい。

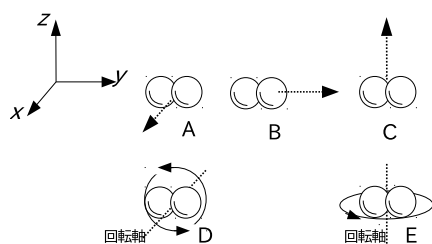


図 13.4 2 原子分子気体の自由度。A: x 方向の直線運動, B: y 方向の直線運動, C: z 方向の直線運動, D: x 軸まわりの回転運動, E: z 軸まわりの回転運動。

したがって

$$\text{単原子分子理想気体では, } U_{\text{理想気体}} = \frac{3}{2}nRT \quad (13.24)$$

$$2 \text{ 原子分子理想気体では, } U_{\text{理想気体}} = \frac{5}{2}nRT \quad (13.25)$$

となる^{*13}。

このように同じ温度, 同じモル数であっても, 分子が単原子分子か 2 原子分子かによって内部エネルギーは違うのである。分子が複雑な運動をする可能性があるほど (つまり自由度が大きいほど) 気体は大きな内部エネルギーを持つのである。^{*14}

ただしこれらの式は (たとえ理想気体に対しても) 厳密には成り立たない。特に低温になると, 回転の自由度が意味を持たなくなる (自由度が減る) とか, 高温になると振動の自由度が加わってくる (自由度が増える) などの不思議な現象が起きる。それらは量子力学を使わないと説明できない。

よくある質問 191 水 H_2O みたいな 3 原子分子はどうなるのですか? ... 水は V 字型の分子なので 3 つの軸の全てについて回転運動を考える必要があります。したがって回転の自由度が 3。直線運動の自由度が 3 なので合わせて自由度は $F = 6$ 。式 (13.23) より $U = (6/2)nRT = 3nRT$ になります。ただし二酸化炭素 CO_2 のような直線状の分子なら, 3 原子分子であっても回転の自由度は 2 で, 2 原子分子のように $F = 3 + 2 = 5$ で $U = (5/2)nRT$ です。

^{*13} 高校で化学や物理学を学んだ人は, この $3/2$ や $5/2$ は「定積モル比熱」と「定圧モル比熱」の話かと思うかもしれないが, そうではない。その話はこの後に出てくる。

^{*14} 理想気体では分子の大きさは無視できるはずなのに「2 原子」分子を考えるのは変ではないかと思う人もいるかもしれない。実は理想気体で「分子の大きさを無視する」としたのは, 分子の大きさによって容器 (分子が自由に飛び交うことのできる空間) の体積が実質的に目減りするようなことがないという意味だ。それに対して, 2 原子分子を考えるのは分子の回転運動が運動エネルギーを持つという性質を勘案するためであり, それは理想気体の仮定とは無関係である。

13.4 熱容量と比熱

ある物体の熱容量とは, その物体の温度を単位温度だけ上げるのに必要な熱のことである。すなわち, ある物体に熱 dQ を加えた時の温度の変化が dT のとき, dQ/dT を熱容量とよぶ (定義)。熱容量は温度によって変わることがあるので, この dQ や dT はできるだけ小さい値 (微量) であるべきである。

単位量の物質の熱容量を「比熱」という。すなわち, ある物体の物質量が X であり, その物質に熱 dQ を加えた時の温度の変化が dT のとき, $dQ/(X dT)$ のことを比熱とよぶ (定義)。特に, 物質量 X を質量で表すときに「比熱」とよび, 物質量 X をモルで表すときには「モル比熱」とよぶ。

熱容量は「物体」に関する量であり, 比熱は「物質」に関する量である。

● 問 178 熱容量, 比熱, モル比熱のそれぞれの SI 単位は J K^{-1} , $\text{J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$, $\text{J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ であることを確認せよ。

よくある質問 192 熱と熱量はどう違うのですか?... 同じ意味です。強いていえば後者はその大きさを定量的に考えるときに使われがちかもしれません。

13.5 理想気体の定積モル比熱

では理想気体の比熱について学ぼう。ここではモル比熱を考える。

気体に熱を加えたら, 普通, 気体はあたたまるだろう。しかし同時に気体は膨張もする。このとき問 60 で見たように気体は仕事をする。その仕事のぶんだけどこからエネルギーが必要である (エネルギー保存則!)。それは気体に加えられた熱かもしれないし, 気体がもともと持っていた内部エネルギーかもしれない。

とりあえずそういう面倒なことを考えるのは避けたいので, 温めても気体は膨張しない条件, すなわち気体をガッチリした容器に入れて体積が変わらないようにして温めることを考えよう。このように体積一定での変化を定積変化とか定積過程とよぶ。定積変化でのモル比熱を定積モル比熱とよび, C_v と書く (添字の v は volume の v 。volume が変わらないよという意味)。

体積が変わらないなら加えた熱は全部内部エネルギーに変わる。 n モルの理想気体の内部エネルギー U は式

(13.22) より

$$U_{\text{理想気体}} = \frac{F}{2} nRT \quad (13.26)$$

である。ここで熱 dQ を加えて温度が dT だけ上がったとすると、内部エネルギーは $U_{\text{理想気体}} + dQ$ 、温度は $T + dT$ になるから

$$U_{\text{理想気体}} + dQ = \frac{F}{2} nR(T + dT) \quad (13.27)$$

である。式 (13.27) から式 (13.26) を辺々引くと

$$dQ = \frac{F}{2} nR dT \quad (13.28)$$

となる。したがって定積モル比熱は

$$C_v = \frac{dQ}{n dT} = \frac{F}{2} R \quad (13.29)$$

となる。特に

$$\text{単原子分子理想気体では, } C_v = \frac{3}{2} R \quad (13.30)$$

$$2 \text{ 原子分子理想気体では, } C_v = \frac{5}{2} R \quad (13.31)$$

である。そして式 (13.29) と式 (13.22) を見比べれば

$$U_{\text{理想気体}} = n C_v T \quad (13.32)$$

であることがわかる。この式は明らかに定積変化という条件とは無関係に成り立つ。つまり理想気体の内部エネルギーは、一般的に、モル数と定積モル比熱と絶対温度の積である。

では「体積一定」という条件を外したら、理想気体のモル比熱はどうなるだろうか？ それを検討するには気体の内部エネルギーと熱と仕事について、ここでしっかり考え方を固めておかねばならない。それが次節の内容である。

13.6 熱力学第一法則はエネルギー保存則

ここでいったん理想気体の話から離れて一般的な話をする。

我々は既に「力学的エネルギー保存則」を学んだが、エネルギーは熱も含めて広い範囲で保存する（どこかに消えたりどこかから湧いて出たりしない）。熱力学的には以下の法則である：

$$\Delta U = Q + W \quad (13.33)$$

ただし U は系（今は一般的な話をしているのでそれは理想気体であってもなくても構わない）の内部エネ

ギー、 ΔU は内部エネルギーの変化、 Q は外から系に与えられた熱、 W は外から系になされた仕事である。これを熱力学第一法則という。要するに「熱と仕事を与えられたぶんだけエネルギーが増える」というわけだ。

● 問 179 熱力学第一法則 (式 (13.33)) を 5 回書いて記憶せよ。「ただし書き」もちゃんと書くこと！

ここで ΔU は微小量でなくても構わない。普通、 Δ なんちゃらという（有限な）微小量を考えることが多いが、熱力学で出てくる Δ は「微小」ではない、単なる「差」とか「変化」を表す。微小を意味するときは Δ でなく d を使うことが多い。微小量で式 (13.33) を表現すると

$$dU = dQ + dW \quad (13.34)$$

となる（ dQ は外から系に加えられた微小な熱、 dW は外から系になされた微小な仕事）。ところが式 (4.34) で学んだように、気体の体積の微小な変化 dV に伴って系が外界からされる仕事は

$$dW = -P dV \quad (13.35)$$

である。これを使うと上の式は

$$dU = dQ - P dV \quad (13.36)$$

と書ける。これを変形すると次式になる：

$$dU + P dV = dQ \quad (13.37)$$

これは微小量での式だが、もし圧力 P が一定ならば容易に積分できて、

$$\Delta U + P \Delta V = Q \quad (13.38)$$

となる。

これらの話は本章の後半、そして熱力学や化学の大変重要な基礎である。

13.7 理想気体の定圧モル比熱

では理想気体の話に戻って、もう少し理想気体の性質を調べていこう。前々節では「体積一定」という条件で理想気体のモル比熱を調べた。こんどはその条件を外して、かわりに「圧力一定」という条件で考えよう。そのような条件での変化を「定圧変化」とか「定圧過程」という。定圧過程でのモル比熱を「定圧モル比熱」とよび、 C_p と表す（添字の p は pressure の p 。pressure が変わらないよという意味）。

C_p を求めるには熱力学第一法則から出発する。ここでは式 (13.37) から出発しよう。この式の左右を入れ替え、式 (13.32) を使えば

$$dQ = nC_v dT + P dV \quad (13.39)$$

である。

ところで理想気体の状態方程式から $PV = nRT$ である。 P と n は一定であり、 R は定数なので、 $P dV = nR dT$ である。これを上の式に代入すれば

$$dQ = nC_v dT + nR dT = n(C_v + R) dT \quad (13.40)$$

となる。したがって $dQ/(n dT) = C_v + R$ となる。これが C_p なので、結局

$$C_p = C_v + R \quad (13.41)$$

である。つまり定圧モル比熱は定積モル比熱に気体定数を加えたものである。

- 問 180 以下を示せ:

$$\text{単原子分子理想気体では, } C_p = \frac{5}{2}R \quad (13.42)$$

$$\text{2 原子分子理想気体では, } C_p = \frac{7}{2}R \quad (13.43)$$

13.8 理想気体のゆっくりした断熱変化

理想気体がピストン付きのシリンダーに密閉されている状況 (図 4.6 のような状況) を考えよう。壁とピストンが断熱材でできていて、シリンダーの内側と外側の間で熱が移動しないとしよう。ここでピストンをゆっくり押し込んだり引き出したりして気体の体積を変化させると、温度や圧力はどう変わるだろうか? このような、外部とは熱のやりとりは無く仕事のやりとりはあり得るような状況での変化を断熱変化とか断熱過程という。

理想気体分子のモル数を n とする。温度、圧力、体積、内部エネルギーをそれぞれ T, P, V, U とし、それらの微小変化を dT, dP, dV, dU とする。気体定数を R 、定圧モル比熱を C_p 、定積モル比熱を C_v とする。変化前の状態を状態 1 とし、変化終了後の状態を状態 2 とする。それぞれの状態での量を、下付きの数字で表す。

- 問 181 理想気体のゆっくりした断熱変化を考える。
(1) 式 (13.36) の dQ はこの場合では 0 になること、そして $dU = -P dV$ となることを示せ。
(2) 式 (13.32) より、 $dU = n C_v dT$ となることを示せ。

- (3) 状態方程式 $P = nRT/V$ と (1), (2) より

$$\frac{dV}{V} = -\frac{C_v}{R} \frac{dT}{T} \quad (13.44)$$

となることを示せ。

- (4) この式の両辺を状態 1 から状態 2 まで積分することで (C_v/R は定数とみなしてよい)

$$V_1 T_1^{C_v/R} = V_2 T_2^{C_v/R} \quad (13.45)$$

となることを示せ。

- (5) ここで T_1, T_2 を状態方程式で消去し、最後に式 (13.41) を使うことで次式を示せ:

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \quad (13.46)$$

ここで $\gamma := C_p/C_v$ である。

つまり理想気体の (ゆっくりした) 断熱変化では PV^γ が一定なのだ。これは本章の後半への伏線である。

13.9 内部エネルギーとは?

ここまで「内部エネルギー」がたくさん出てきたが、そのほとんど (熱力学第一法則の話題を除く) が理想気体を仮定したものだった。それは系を構成する分子が十分小さく、分子同士に働く力を無視できるというケースだった。そういう場合は各分子の運動エネルギーの総和が内部エネルギーである、とみなせるのだった。

ではそうでない場合は内部エネルギーはどうなるだろう?

たとえば気体でなく固体の系なら? その場合、固体を作る分子同士は互いに力 (共有結合やイオン結合、分子間力など) を及ぼし合って、強く束縛しあっている。実はそのような状況は各粒子 (原子) はバネにつけられて振動する質点としてモデル化できるのだ。

バネにくっついて振動する質点は運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを持つことは既に学んだ。したがって、内部エネルギーとして運動エネルギーだけでなくポテンシャルエネルギーも考慮しなければならない。というのも、実は式 (13.1) は (このケースを含む) ある条件下ではポテンシャルエネルギーについても成り立つのだ。すなわちバネについた質点がたくさんあるときの振動の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは、ともに (平均的には) 絶対温度に比例することが (物理学者達の研究によって) わかっている。したがって固体の内部エネルギーは絶対温度に比例するとみなせる

(ただしこれは低温のときは破綻する。興味のある人はデュロン・ブティの法則で検索！)

では液体なら？ 固体のときと同様に、分子同士が力を及ぼし合っていることが無視できない。かといってバネについた質点としてモデル化することもできない(固体と違って液体の分子は自由に移動できる)。すると分子同士の距離に応じてポテンシャルエネルギーを考える必要がある。液体に何か(溶質)が溶け込んでいて、それらが電離してイオンになっていたりしたら、それら同士の間に働く電氣的な力(クーロン力)も考えねばならない。これ以上の詳細には立ち入らないが、状況は簡単ではないことがわかるだろう。

では理想気体以外の気体なら？ この場合も分子同士の及ぼし合う力が作るポテンシャルエネルギーなどを考えねばならない。しかし農学・環境科学を学ぶ諸君が気体を扱う多くのケースでは、理想気体を仮定できるだろう。

それよりももっと重要なのは系の中で化学反応が起きる場合だ。たとえば水素と酸素の 2:1 の混合気体が反応(燃焼)すると水(水蒸気)の気体になる(反応後は高温低圧のため水は凝結しないものとする)。このとき内部エネルギーはどうなるのだろうか？

反応前の水素・酸素混合気体も、反応後の水蒸気も、それぞれ理想気体として近似できるので、それぞれの内部エネルギーは式 (13.32) で表すことができそうである^{*15}。しかしそれらの差(反応後 - 反応前)を ΔU としてしまうと、それは式 (13.33) とは整合しない。というのも、もしこの反応を体積一定で外部と断熱された容器の中で行えば、式 (13.33) から $\Delta U = 0$ のはずだ。ところが実際は燃焼熱によって容器の温度 T は大きく上昇し(爆発的な反応だ!)、その結果、式 (13.32) で表される U は反応後の方が反応前よりも実際は大きい^{*16}。したがって $\Delta U = 0$ ではなくなり、矛盾する。

これを読んで、「ならば熱力学第一法則が間違っているのでは?」と思った人、つまり「化学反応が内部で起きるなら、外部から仕事や熱を加えられなくても内部エネルギーは変化するのでは?」と思った人もいるかもしれないが、そうではない。熱力学第一法則は正しいのだ。

内部エネルギーの変化は、あくまで外との熱や仕事のやりとりでしか生じない。したがって上の例ではやはり内部エネルギーの変化 ΔU は 0 なのだ。間違っていたのはこのような場合にも内部エネルギーを式 (13.32) で考えようとしたことなのだ。

そもそもこの「燃焼熱」はどこから来たのだろうか？ それは主に分子内の原子同士の結合(水素原子同士や酸素原子同士、そして水素原子と酸素原子同士の共有結合)におけるポテンシャルエネルギーである。水素同士と酸素同士の共有結合より、水素と酸素の共有結合の方がポテンシャルエネルギーが低いので、反応によってその差のぶんだけエネルギーが出てきて気体を温めるのである。つまり化学結合のポテンシャルエネルギーの形で分子内に蓄えられていたエネルギーが分子の運動エネルギーに変化したのだ。したがって分子の運動エネルギー(つまり熱)と化学結合のポテンシャルエネルギーの両方をあわせて内部エネルギーとみなせば、この反応の前後で内部エネルギーは変わっていないのだ。

このように、扱う対象が理想気体であっても化学反応の前後では式 (13.32) (気体分子の運動エネルギー) だけを考えていてはダメなのだ。

そもそも気体の中には、分子の運動エネルギーだけでなく分子内のエネルギーや、分子を構成する原子の原子核内のエネルギーなどもある。それらも全部考えないと真の意味で「内部エネルギー」とは言えない。しかしそれらは化学反応が起きない限り、あるいは原子核反応が起きない限り、表には出てこない。出てこないということは、とりあえず忘れていても構わない。理想気体の内部エネルギーを式 (13.32) で表すのは、そういう「他にもいろいろあるけどとりあえず忘れて分子の運動エネルギーだけ考えておこう」という立場での話である。

それは例えて言えば、君が友人に「いまいくらお金持ってる?」と聞いて彼が「5000 円くらいかな」と答えたとき、それは財布の中の現金だけであって、実は銀行に 10 万円くらいの普通預金と 30 万円くらいの定期預金があるのだが、それらは今、昼ごはんをどの店で食べようかと相談している状況では無関係なので考えていないというのと似ている。

このようにエネルギーは「実は他にもあるけど今は話題になってないので考えない」という扱いをすることが多い。たとえば野球のボールの運動を考えると、ボール(の重心)の速さに伴う運動エネルギーは考えるが、ボールの熱エネルギー(ボールを構成する分子や原子の

^{*15} 前述したように水蒸気は V 字型の 3 原子分子なので、その C_V は $3R$ 。

^{*16} 反応によって分子数が減ったり C_V の値が変わったりもするが、その影響を打ち消すくらい T の上昇によって式 (13.32) の U は上がる。

運動エネルギー)は考えない。またたとえば重力によるポテンシャルエネルギーは、質量 m 、重力加速度 g 、高さ h とすると mgh だが、この高さ h はその物体を動かすことのできる範囲で適当な基準点をとって決める。ところがそこに深い穴を掘ってその底を基準にすれば、 h の値は変わり、 mgh の値も変わるではないか!! しかしそれは「穴を掘ってまでポテンシャルエネルギーを取り出そうとは思わない」という人にとっては忘れてよい話である。

よくある質問 193 式 (13.38) がピンと来ません。「加えられた熱」 Q が「内部エネルギーの変化」 ΔU に等しいのはわかります。でも仕事 $P\Delta V$ というのがわかりません... では例を挙げましょう。純粋なエタノール(液体)と純水(液体)をまぜると、できた「エタノール水溶液」は暖かくなります(やったことがなければやってみてください!!)。この熱はどこから来るのでしょうか? エタノール分子は水分子と引き合いますから、それらどうしがくっつく(と水和すると)互いの引力のポテンシャルエネルギーが熱として放出されるのです。これが ΔU にあたります。ここでは U は小さくなるので、 ΔU はマイナスです。つまり系に熱を「加える」のではなく系から熱が「出る」のです。だから温かくなるのです。

しかし! それだけではないのです! エタノール水溶液の体積は元のエタノールの体積と水の体積を足したものよりもわずかに小さくなります。縮むのです! このとき体積が縮む分、周囲の大気は水溶液に対して仕事をします。それが $P\Delta V$ です。ここでは ΔV はマイナスですので、 $P\Delta V$ もマイナスです。つまりその仕事も外に熱として出るので。

したがって水溶液が温かくなるのは分子同士の引力によるポテンシャルエネルギーと、水溶液の体積が小さくなることに伴う外部(大気)による仕事の両方が寄与するのです。

このように、反応熱を考えるには単に分子同士の引力や斥力だけでなく、まわりの環境からの仕事も考慮する必要があります。それをうまく整理してくれるのが次節の「エンタルピー」です。

13.10 エンタルピーはエネルギーの一種

多くの理系大学では1年次の春学期あたりの化学で「エンタルピー」という概念を習う。エンタルピーは化学反応や相変化を予測したり制御するのに必要な概念であり、特に「反応熱」に関わっている。

ところが多くの1年生は「エンタルピーって結局何?」と悩む。おまけにそのあとに「エントロピー」という紛らわしい概念が出てきて混乱する。

そのような悩みは定義を覚えていないことから発する。くどいようだが、まず定義をきちんと覚えないと何も話が始まらない。

エンタルピーの定義

系の内部エネルギーを U 、圧力を P 、体積を V とすると

$$H := U + PV \quad (13.47)$$

をエンタルピーという(定義)。

- 問 182 エンタルピーの定義(式 (13.47))を5回書いて記憶せよ。

さて定義を覚えたらエンタルピーの意味を少しずつ考えていこう。まずこの H の変化を考えてみよう。すなわちある状態(内部エネルギー U 、圧力 P 、体積 V 、エンタルピー H)から変化した状態(内部エネルギー $U + \Delta U$ 、圧力 $P + \Delta P$ 、体積 $V + \Delta V$ 、エンタルピー $H + \Delta H$)を考え、そのときのエンタルピーの変化を考えよう。変化前は

$$H = U + PV \quad (13.48)$$

変化後は

$$H + \Delta H = (U + \Delta U) + (P + \Delta P)(V + \Delta V) \quad (13.49)$$

後者から前者を引くと

$$\Delta H = \Delta U + P\Delta V + V\Delta P + \Delta P\Delta V \quad (13.50)$$

となる。もしこの変化が圧力は不変(一定)の状態で行われたら、 $\Delta P = 0$ なので上の式は

$$\Delta H = \Delta U + P\Delta V \quad (13.51)$$

となる。この右辺は式 (13.38) の左辺と同じだ。したがって

$$\Delta H = Q \quad (13.52)$$

となる。つまり定圧変化では、系に加えられた熱はエンタルピーの変化(増加分)に等しい。これがエンタルピーの「意味」だ。

よくある質問 194 これがエンタルピーの意味だと言われてもピンと来ません。なんで定圧に限定するのですか? それで何が嬉しいのですか? 「系に加えられた熱」がわかって何が嬉しいのですか? ... まず世の中の現象の多く、特に地上で起きる現象の多くは圧力一定のもとで起きます。たとえば君が料理を作るとき、圧力釜などを使わない限り、煮る・焼く・蒸す・混ぜる・凍らす・解凍するなどは、一定の圧力(大気圧)のもとで起きます。したがって定圧を仮定しても理論の適用範囲

はそんなには限定されません。むしろ定圧を仮定することで状況は単純になり、記述や解析は楽になります。「系に加えられた熱」は、言葉を変えれば「その変化を起こすのに外から加えねばならない必要な熱」とも言えます。また、これがマイナスの場合は「系から外に出る熱」(要するに反応熱)です。化学反応を制御したり熱源として利用するとき、これらは大事ではないですか!

ここで注意して欲しいことがある。エンタルピーは化学反応の理解や予測によく使われる。その場合、エンタルピーの定義の中の内部エネルギー U は分子の運動エネルギーだけでなく、分子内の化学結合のポテンシャルエネルギーも含めて考えるのだ。実際、前節の水素・酸素の燃焼の例(そこでは化学結合のポテンシャルエネルギーが重要だった)もそこで出てくる「燃焼熱」は化学では「エンタルピーの変化」として考えるのだ。

13.11 エントロピーってなんだろう?

次に学ぶのは「エントロピー」である。エントロピーはたくさんの分子や原子からなる集団が全体としてどのように自発的にふるまうかを説明するときに必要な概念である。

エントロピーはエンタルピーに名前が似ているので初学者は混同しやすいが、両者は全く異なる量である。名前が似ているのは偶然に過ぎない。そもそも名前が似ているからといって実体どうしも似ているとか互いに関係があるとはかぎらない。たとえば福井県の小浜市と米国元大統領のオバマ氏は名前が似ているが実体は全く違う。エントロピーとエンタルピーもそういうものだと思っておけばよい。

まずエントロピーのその定義を述べよう。系には各状態において「エントロピー」という量があり、状態 1 のときのエントロピーを S_1 、状態 2 のときのエントロピーを S_2 とし、エントロピーの差、すなわち $S_2 - S_1$ を ΔS とすれば、 ΔS は次式を満たすと約束する:

$$\Delta S = \int_{\text{状態 1}}^{\text{状態 2}} \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} \quad (13.53)$$

ここで積分は系が状態 1 から状態 2 まで可逆的に変化したときに関するものであり、 Q_{rev} は外から系に可逆的に与えられる熱、 T は絶対温度である。これがエントロ

ピーの定義である。「可逆的」の意味は次節で述べる。

もし状態 1 と状態 2 が互いに非常に近い状態であるとき、すなわち変化の量が微小であるとき、 ΔS は微小量 dS と書くことができ、また、微小変化の間で温度 T はほとんど変わらないと考えてよいので、上の式は

$$dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} \quad (13.54)$$

と書いてもよい。

このようにエントロピーはそれ自体ではなくその「変化」が先に定義される。

と言われても「わかりにくい!!」というのが正直なところだろう。そう、エントロピーは初学者にはなかなかわかりにくいのだ。諸君はまず式 (13.53)、式 (13.54) をしっかり頭に叩き込もう。そしてそれをもとにいろいろな話について行けば、次第にエントロピーが何なのかわかってくるだろう。

- 問 183 上のエントロピーの定義(式 (13.53))を 5 回書いて記憶せよ。

13.12 可逆過程と準静的過程

以後、少しずつエントロピーの「意味」を理解していこう。

まずエントロピーの定義で可逆的という言葉が出てきた。これはとても大切なキーワードである。

ある系の状態が変化したとき、(その気になれば)変化後の状態から変化前の状態に戻すことができ、しかも外部に何の影響も残さないようにそれができる場合、そのような変化を可逆的な変化あるいは可逆過程という(定義)。

例 13.1 物体を重力に逆らってゆっくり持ち上げるといふ操作を考えよう。持ち上げるときにエネルギー(=仕事=重さ×持ち上げた高さ)が必要だが、それを電池でまかなったとしよう。持ち上がった後に物体を元の高さまで戻すとき、物体にヒモをつけてそれで発電機を回して電池に充電すれば、持ち上げるときに使ったエネルギーを埋めもどし、結果的に何の影響も残らない。したがって「ものを重力に逆らって持ち上げる」のは可逆過程である(これは重力が「保存力」であることに関係する)。

例 13.2 ある速さで地面を滑っていた物体が地面との摩擦によって止まるという動作を考えよう。このとき物

体が持っていた運動エネルギーは摩擦によって熱エネルギーに変えられてしまう。この変えられた熱エネルギーをもういちど集めて物体の運動エネルギーに変えて物体を滑らせるというのはどう考えても無理である。したがって運動する物体が摩擦力によって止まるというのは可逆過程ではない（これは摩擦力が「非保存力」であることに関係する）。

熱力学では理想気体の状態変化がよく例に使われるので以後はそういう話に絞ろう。

例 13.3 理想気体の（ゆっくりした）断熱変化（P.157で述べた）は可逆変化だろうか？ピストンをゆっくり押し込んでいくと気体の体積は減り、圧力は高まり、温度も上がっていく。ある時点でそれをやめて元の状態になるまでピストンを徐々に戻すと、もとの温度・圧力・体積に戻る。ピストンを押し込むときに外力（ピストンを押す手か何か）は気体に対して仕事をしたが、ピストンが戻るときに同じ大きさの仕事を気体は外力をしたので仕事の差し引きも 0 である。仕事は例 13.1 のように電池から得たり（発電機を使って）戻したりできるので、外部に何も影響を残さないことが可能である。したがって理想気体をゆっくりと断熱変化させるのは可逆過程である。（例おわり）

では温度が変わらずに理想気体が膨張したり収縮する変化（等温変化）はどうだろうか？

例 13.4 理想気体を温度を一定に保ったまま体積を膨張または圧縮させることを考える。今回も気体をピストン付きの容器に入れるのだが、こんどはピストンの壁は熱をよく通す素材でできており、壁を介して気体から外に熱が出ていったり外から気体に熱が流れ込んだりする状況を考える。この容器を一樣な温度を持つ大きな環境（熱容量が無限に大きなもの、たとえば大きなお風呂）に浸しながらピストンを動かそう。もしピストンを速く動かすと気体の膨張や収縮が急激に起きて気体の温度が大きく変わってしまうだろう。それを避けるためにピストンはゆっくり動かすことにしよう。すると気体がごくわずかも温まったらその熱が周囲に逃げるし、ごくわずかも冷えたらそれを埋め合わせる熱が周囲から流れ込む。そうすれば気体の温度と周囲の温度の差が限りなく 0 に近い状態を維持できる。

気体がゆっくり膨張するとき気体は環境に対して仕事をするが、それに必要な仕事と同じだけの熱が環境から

気体に流れ込む。逆に気体をゆっくり圧縮するときは、環境は気体に仕事をするが、その仕事と同じだけの熱が気体から環境に流れ出す。このように、ゆっくりやれば等温変化は元に戻すことができ、外部（環境）に何も影響を残さない（膨張するときに外部から得た熱は圧縮するときに外部に戻している）。したがって理想気体のゆっくりした等温変化は可逆過程である。（例おわり）

ここで挙げた 2 つの例はいずれも気体を「ゆっくり」変化した。具体的には気体が熱平衡状態を保ちながら変化したということである。このように系が熱平衡を保ちながら（保てるくらいゆっくりと）変化するような過程を準静的過程という。

準静的過程は可逆過程とほぼ同義である。立場や定義によっては準静的過程と可逆過程を区別することもあるが、諸君はとりあえず両者はほぼ同じ意味だと思ってよからう。

ではこれらの準静的過程でエントロピーはどう変わるだろうか？準静的過程は可逆過程なのでそのエントロピー変化は式 (13.53) で求められる。

まず準静的断熱変化はどうだろう？そもそも「断熱」なので、理想気体であるなしにかかわらず外と系の間で熱の出入りは無い。つまり式 (13.53) の dQ_{rev} は 0 である。したがってこの積分も 0 であり、したがってエントロピーの変化も 0 である。要するに理想気体であろうがなかろうが準静的断熱変化ではエントロピーは変化しない。

準静的等温変化はどうだろう（等温であれば、温度は気体内で一様のはずだから熱平衡が実現しているはずであり、したがって必然的に準静的なので「準静的」という語は無くてもよいのだが、ここではつけておく）？まず熱力学第一法則から熱の出入りを見積もろう。式 (13.37) より次式がなりたつ：

$$dU + P dV = dQ \quad (13.55)$$

理想気体の内部エネルギー U は温度だけに依存し、圧力 P や体積 V には無関係なので、準静的等温変化の前後では U は変わらないため、 $dU = 0$ 。したがって $P dV = dQ$ 。準静的等温変化は可逆的なので dQ は dQ_{rev} であり、式 (13.53) より次式がなりたつ：

$$\Delta S = \int_{\text{状態 1}}^{\text{状態 2}} \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{P dV}{T} \quad (13.56)$$

ここで V_1 と V_2 はそれぞれ状態 1（最初の状態）、状態 2（膨張または圧縮が終わったときの状態）のときの体積

を意味する。理想気体の状態方程式から $P = nRT/V$ であるので (n はモル数)

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nR dV}{V} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (13.57)$$

となる。これが理想気体の準静的等温変化のエントロピー変化である。

● 問 184 温度 300 K で 2.0 mol の理想気体を考える。この気体を体積 50 L から体積 100 L まで準静的等温過程で膨張させる。このときのエントロピーの変化はどのくらいか? 単位もちゃんと付けて有効数字 2 桁で答えよ。

13.13 不可逆過程

可逆的でない変化を不可逆変化とか不可逆過程という。理想気体の不可逆過程には次のような例がある:

例 13.5 体積 V_2 の容器があり、その内部が壁で仕切られて体積 V_1 の小部屋がある。その小部屋の中にモル数 n 、温度 T の理想気体が入っており、小部屋の外の容器内は真空である (それを状態 1 とよぶ)。容器は形や体積を変えず、外との熱の交換も無いとする。小部屋を仕切る壁には扉がある。突然扉が開くと小部屋の中の気体が容器全体に広がる (それを状態 2 とよぶ)。この状態 1 から状態 2 への変化は可逆変化だろうか? 小部屋から容器全体に気体が広がったときは気体は何も仕事をしていない。ところが容器全体に広がった気体を小部屋に押し戻すには気体を圧縮する仕事が必要である。つまりこの変化を元に戻すのに外部からエネルギーを得る必要がある (したがって外部には影響が残らざるを得ない)。したがってこの変化は不可逆変化である。(例おわり)

この場合、エントロピー変化 ΔS はどうなるだろう? 容器と外部との熱のやりとりは 0 なので式 (13.53) で $dQ_{\text{rev}} = 0$ 、だから $\Delta S = 0$? いやそれは違う。この変化は不可逆的なので、外との熱のやりとり (それは 0 である) を dQ_{rev} とはみなせない。したがって式 (13.53) を直接使うことはできないのだ。

ではどうするか? 状態 1 と状態 2 を可逆過程でつなぐストーリーを仮想的に考えるのである。今の例では気体は何にも邪魔されずに勝手に広がっていったのだから、気体分子は何も仕事をしないしされない。したがって気体分子の運動エネルギーは変化しない。したがって状態 2 と状態 1 で温度も変化しない (式 (13.22) で U が変

わらないなら T も変わらない)。ということは状態 1 から状態 2 への変化は、その気になれば準静的等温変化でも実現できただろう。実際、容器の壁の一部を熱が伝わりやすい素材にとりかえて小部屋と外界との熱のやりとりを可能にし、また「突然扉を開く」かわりに扉の前にビニール袋か何かをつけて徐々にそれを広げることで例 13.4 のような準静的等温変化を実現できる (なんかわざとらしい設定だが、変化がおわったときに壁を再び断熱にしてビニール袋を取り去れば、少なくとも容器とその内部に起きる結果は「扉が突然開く」場合と同じである)。準静的等温変化は可逆過程なのでそれに伴うエントロピー変化は式 (13.53) で定義も計算もできる。その結果は式 (13.57) で与えられ、それは

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nR dV}{V} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (13.58)$$

である。これが例 13.5 におけるエントロピーの変化である。このように不可逆過程におけるエントロピーの変化は同じ結果をもたらす可逆過程を仮想的に考えたときのエントロピー変化で定義するのである。

13.14 熱力学第二法則: 孤立系でエントロピーは増大する

ではいよいよエントロピーの意味を探っていこう。

例 13.4 では系のエントロピーは式 (13.57) の分だけ変化する。もし $V_2 > V_1$ なら $\Delta S > 0$ なのでエントロピーは増える。もし $V_2 < V_1$ なら $\Delta S < 0$ なのでエントロピーは減る。このようにエントロピーは状態の変化に応じて増えることも減ることもある。

ところがちょっと見方を変えてみると話は変わる。気体が準静的等温変化で膨張するときは、気体だけに着目すれば確かにエントロピーは増える。それは外部から気体に熱が (可逆的に) 流れ込んだからである。そのとき「外部」すなわち気体が入ったピストンを取り囲む世界のエントロピーは熱が流れ出すために減る。その変化は、ちょうど気体のエントロピーが増えたぶんを打ち消すだけの負の値である。このように外部まで考えに入るとき可逆過程ではエントロピーの総和は変化しない。

では例 13.5 のような不可逆過程ではどうだろう? 常識的に考えれば外から介入しない限り、必ず $V_2 > V_1$ 、つまり小さな部屋から大きな容器へ気体は広がっていく。 $V_2 < V_1$ という状況、すなわち大きな容器から小さ

な部屋に気体が勝手に集まってくるような変化は起きない。したがって式 (13.58) は必ず 0 より大きな値である。つまり容器内のエントロピーは必ず増大する。ところがこれらのドラマは全て容器内だけで起きるので、容器外は何も変わらない。そのため容器外のエントロピーの変化は 0 である。すると容器の外部まで考えに入れてもエントロピーの総和は増える。このように外部まで考えに入れるとき、不可逆過程ではエントロピーの総和は増大する。

よくある質問 195 扉をあけるのは外部からの仕事があるということではないのですか? ... そのように思う気持ちはわかりますが、扉をあけるには小さなドアノブを回すだけでよいので、その仕事は無視できます。

そして驚くべきことに、これは例 13.5 だけでなく広く一般化できることが経験的に知られているのだ。それが以下に述べる熱力学第二法則である^{*17}:

熱力学第二法則

孤立系では、変化が不可逆的であるときエントロピーの総和は増え、エントロピーの総和が増えるとき変化は不可逆的である。

- 問 185 熱力学第二法則を 3 回書いて記憶せよ。

ここで「孤立系」とは、仕事や熱のやり取りなどの現象がその中だけで完結している系のことである。例 13.4 では気体の入ったピストンとそれを包む一定温度のお風呂をあわせたものであり、例 13.5 では容器の内部のことである。

よくある質問 196 例 13.5 ではエントロピーを計算したときに、容器の外部との熱のやり取りを考えたじゃないですか! それでも「容器の内部」は孤立系なのですか? ... エントロピーを求めたときのストーリーはエントロピーを求めるために考えた「仮想的な可逆変化」です。例 13.5 で実際に起きたのはそれではなく不可逆変化です。

不可逆的な変化というのは「放っいたらそうなる」ような自発的な変化である。熱力学第二法則から「孤立系はエントロピーが増大するように自発的に変化する」とも言える。エントロピーはこのように自発的な変化の

有り様を教えてくれる量である。それがエントロピーの「意味」(のひとつ)である。

よくある質問 197 例 13.5 では確かに熱力学第二法則が成り立ちますが、ひとつの例について成り立つからといってそれが普遍的に成り立つとは限らないじゃないんですか? ... もっともな指摘です。実は熱力学第二法則は一種の仮説です。しかしこれに矛盾するような事例はひとつも見つかっていません。つまりこれは運動の法則と同じように「基本法則」であり、「それが普遍的に正しいと信じれば全てがうまくつじつまが合う」というもののなのです。その正しさは論理的にではなく、経験的に受け入れられているのです。

13.15 ヒートポンプ

エントロピーの概念と密接な関係にあるのがヒートポンプという機械である。これは農学・環境科学で大変に重要なものなのでここで解説しておく。ヒートポンプは温度の違う 2 つの世界(熱源)の間で、宇宙のエントロピーをほとんど変えずに熱を移動させる機械である。その例がエアコンである。エアコンは、屋外と屋内という 2 つの世界の間で熱を運ぶ。特に、エアコンは低温の世界から高温の世界に熱を運ぶのである。

よくある質問 198 そんなバカな!! 熱は高温から低温に流れるものです。低温から高温に移動するわけじゃないじゃないですか! ... それは早とちりですよ。夏にエアコンから出てくる空気は熱が奪われているから冷たいのです。その熱はどこに行ったのか? 外気に放出されたのです。室内(低温)から室外(高温)へ熱が運ばれたのです。冬にエアコンから出てくる空気は、室外(低温)から室内(高温)に熱が運ばれてるから暖かいのです。

もちろん熱が低温熱源から高温熱源に勝手に移動することは無い。機械がエネルギー(多くの場合は電気による仕事)を使って熱を無理やり運ぶのだ。そのエネルギー(仕事)を W とし、温度 T_H の高温熱源へ届ける熱(それは投入されたエネルギーと低温熱源から汲み上げた熱からなる)を Q_H とすると、

$$\frac{Q_H}{W} \leq \frac{T_H}{T_H - T_L} \quad (13.59)$$

という式が成り立つのだ。左辺は投入したエネルギー(仕事)の何倍の熱を運べるか、すなわちヒートポンプの効率(エネルギー効率)を表す。この値が大きいほど良いヒートポンプである。究極の理想的なヒートポンプは

^{*17} 実は「孤立系」という条件は「断熱変化では」という条件に緩めることができる。つまり外界との仕事のやり取りを許容しても以下の法則は成り立つ。それを「エントロピー原理」という。

その効率は右辺に等しい（その究極のヒートポンプが次節のカルノー・サイクルである）。

式 (13.59) は熱力学で証明できるのだが、それは後回しにして、この意味を考えよう。たとえば室外気温 $T_H = 305 \text{ K}$ (摂氏 32 度)、室内気温 $T_L = 301 \text{ K}$ (摂氏 28 度) のとき、究極理想的なエアコンの冷房の効率は

$$\frac{305 \text{ K}}{305 \text{ K} - 301 \text{ K}} = 76.3 \quad (13.60)$$

となる。なんと、電気エネルギーの 70 倍以上の熱を運べるのだ。ところが摂氏 28 度は暑すぎるということで、摂氏 23 度 (296 K) まで下げると、

$$\frac{305 \text{ K}}{305 \text{ K} - 296 \text{ K}} = 33.9 \quad (13.61)$$

となる。効率が約半分になってしまう。そして涼しい屋内から暑い屋外へ熱伝導で逃げる熱は内外の温度差に比例するから、余計に多くの熱を運ばねばならないのでさらに多くの電気エネルギーが必要になるのだ。エアコンの効率は、内外の温度差が小さければ小さいほど良いのだ。

冬の暖房も夏の冷房とほぼ同じ理屈である。違うのは部屋の内と外をひっくりかえすだけだ。室外気温 $T_L = 273 \text{ K}$ (摂氏 0 度)、室内気温 $T_H = 293 \text{ K}$ (摂氏 20 度) のとき、究極理想的なエアコンの暖房の効率は

$$\frac{293 \text{ K}}{293 \text{ K} - 273 \text{ K}} = 14.7 \quad (13.62)$$

となり、電気エネルギーの 14 倍以上の熱を室内に運び込むことができる。

実際の現実のエアコンはここまでの効率は無く、冷暖房の平均で数倍～10 倍程度のようなだ。

ここで諸君に考えて欲しいのは、電気ストーブである。電気ストーブは電熱線に電流を流し、そこに発生するジュール熱で室内を温める。このとき、使った電気エネルギーがそのまま室内に投入される熱になる。つまり効率は 1 倍である。上記のエアコンの数倍～10 倍とはあまりに違うではないか!!!

これがヒートポンプの凄さである。室内温度を制御する空調機器として、ヒートポンプは極めて優れた省エネルギー機器なのである。

よくある質問 199 信じられません。エネルギー保存則に反していると思います。... 私もこれを学んだ当初はそう思いました。しかしエネルギー保存則には反していないのです。ヒートポンプが運ぶ熱の大部分は、ヒートポンプに投入される仕事から変わったものではなく、低温熱源から汲み上げた熱な

のです。

たとえば農業用温室では冬の暖房に重油を燃やして熱を得ることが多いが、それをヒートポンプに替えると劇的にエネルギーを節約でき、温室効果気体排出削減に貢献するのである。実際、日本政府（農林水産省）は地球温暖化対策のひとつにヒートポンプの導入を挙げている。

● 問 186 非常に寒いとき（外気温が極端に低いとき）はエアコン（暖房）の効きが悪くなる（効率が悪くなる）という。その理由を考察せよ。

● 問 187 空調機器としてのヒートポンプの弱点を考察せよ。

● 問 188 ヒートポンプで調理（煮炊きや揚げ物、焼き物）に必要な熱を得ようというアイデアは筋が悪い。そのことを説明せよ。

● 問 189 冷蔵庫もヒートポンプの一種である。冷蔵庫と壁の間になるべく隙間をあけるほうがよいと言われる。その理由を説明せよ。

このように、ヒートポンプは省エネや地球温暖化対策の切り札のひとつであり、その基礎である式 (13.59) は大変に重要な式である。ではその証明をしよう。

温度の違う 2 つの熱源を考え、低温と高温の温度をそれぞれ T_L , T_H とする (L, H は low, high の頭文字)。そして、ある機械を考える。この機械は外部のエネルギー源からエネルギー（仕事） W を得て稼働し、低温熱源から熱 Q_L を吸収して高温熱源に熱 Q_H を放出し、初期状態に戻る。その内部がどのような構造になっているかは問わない。

さて、低温熱源、高温熱源、機械、外部エネルギー源からなる系を考える。これは孤立系である。したがって熱力学第二法則より系全体のエントロピーの変化は 0 以下である（このことが後で決定的な役割をする）。

低温熱源のエントロピー変化は $-Q_L/T_L$ であり、高温熱源のエントロピー変化は Q_H/T_H である。外部エネルギー源は仕事をするだけ（たとえば位置エネルギー）と考えて熱の出入りは無いのでエントロピー変化は 0。機械には熱の出入りはあるが結局初期状態に戻る（つまりスイッチを入れた時と切るときで状態は同じになる）

ので、そのエントロピー変化は初期状態から初期状態への準静的変化、つまり「何もしない」という過程のエントロピー変化に等しい、すなわち 0。となると、系全体のエントロピー変化は $-Q_L/T_L + Q_H/T_H$ となる。それが 0 以上だというのだ。すなわち、

$$-\frac{Q_L}{T_L} + \frac{Q_H}{T_H} \geq 0 \quad (13.63)$$

となる。ここから

$$\frac{T_L}{T_H} \geq \frac{Q_L}{Q_H} \quad (13.64)$$

となる。一方、機械に関して熱力学第一法則を考えると（初期状態に戻るので内部エネルギー変化は 0 だから）

$$0 = Q_L - Q_H + W \quad (13.65)$$

となる。ここから

$$\frac{W}{Q_H} = 1 - \frac{Q_L}{Q_H} \geq 1 - \frac{T_L}{T_H} \quad (13.66)$$

したがって、

$$\frac{Q_H}{W} \leq \frac{1}{1 - \frac{T_L}{T_H}} \quad (13.67)$$

右辺を整理すると、

$$\frac{Q_H}{W} \leq \frac{T_H}{T_H - T_L} \quad (13.68)$$

となり、式 (13.59) が成り立つことがわかった。

13.16 カルノー・サイクル

この式 (13.68)（式 (13.59) の再掲）の $\leq$ が等号になること（究極の理想のエアコン）はあるのだろうか？ それは全ての変化が準静的な場合である。それを具体的に（思考実験ではあるが）実現する機械がカルノー・サイクルである。それは理想気体の入った 1 本のピストン（圧力 P 、体積 V 、物質質量 n 、温度 T ）と、それを低温熱源、高温熱源、断熱容器の間を移動させる仕組み（といっても摩擦なしの水平移動であり仕事をしないと）から構成される。

この機械はピストンを以下のように 4 つの状態に順に準静的に変化させるのだ：

まずピストンを低温熱源に入れてその温度になじませる。それが完了した状態を A とする。これが初期状態だ。

次にピストンを断熱容器に移し、その中でピストンを押し込み、温度が T_H になるまで断熱圧縮させる。それ

が完了した状態を B とする（過程 1）。

次にピストンを熱源 H に移し、温度を T_H に維持しつつピストンをさらに押し込む。それが完了した状態を C とする（過程 2）。

次にピストンを断熱容器に移し、ピストンを引っ張り、温度が T_L になるまで断熱膨張させる。それが完了した状態を D とする（過程 3）。

次にピストンを低温熱源に移し、温度を T_L に維持しつつピストンをさらに引っ張り、体積が V_1 になるまで等温膨張させる。この完了時におけるピストンの状態は（E とよびたいところだが）初期状態 A に戻っている（過程 4）。

最終的に初期状態に戻るので「サイクル」なのだ。

各状態におけるピストン内の物理量は下付き文字で表す。たとえば状態 A のときのピストン内の体積を V_A と表す。そして各過程でピストン内の気体に外部からなされた仕事と外部からピストンに流入する熱をそれぞれ W, Q に過程の番号を下付きにして表す。たとえば Q_2 は過程 2 で外部からピストンに流入する熱を表す。

まず各過程でのピストンへの熱と仕事の出入りを求めよう。仕事の求め方がわからない人はまず式 (4.38) を復習すること。

過程 1 は断熱変化なので $Q_1 = 0$ である。また、式 (13.69) のように PV^γ が一定である。すなわち、

$$PV^\gamma = P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma = C \quad (13.69)$$

とおける（ C は定数で、constant の頭文字から名付けた）。仕事は以下のように求められる

$$\begin{aligned} W_1 &= - \int_{V_A}^{V_B} P dV = - \int_{V_A}^{V_B} \frac{C}{V^\gamma} dV \\ &= - \left[\frac{C}{1-\gamma} V^{1-\gamma} \right]_{V_A}^{V_B} = - \frac{C V_B^{1-\gamma} - C V_A^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\ &= - \frac{(P_B V_B^\gamma) V_B^{1-\gamma} - (P_A V_A^\gamma) V_A^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\ &= - \frac{P_B V_B - P_A V_A}{1-\gamma} \end{aligned} \quad (13.70)$$

過程 2 は等温変化なので内部エネルギーは変化せず、外部にする仕事と流入する熱の和は 0 である。したがって $Q_2 = -W_2$ である。また、仕事は以下のように求められる（式 (4.38) と同じ）：

$$\begin{aligned} W_2 &= - \int_{V_B}^{V_C} P dV = - \int_{V_B}^{V_C} \frac{nRT_H dV}{V} \\ &= -nRT_H \ln \frac{V_C}{V_B} = nRT_H \ln \frac{V_B}{V_C} \end{aligned} \quad (13.71)$$

過程3は過程1と同様に考えれば、 $Q_3 = 0$ であり、

$$W_3 = -\frac{P_D V_D - P_C V_C}{1 - \gamma} \quad (13.72)$$

である。

過程4は過程2と同様に考えれば、 $Q_4 = -W_4$ であり、

$$W_4 = nRT_L \ln \frac{V_D}{V_A} \quad (13.73)$$

である。

さて、この1サイクルの間に、外から加えられた正味の仕事を W とすると $W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$ である。その中で先に $W_1 + W_3$ を計算する：

$$\begin{aligned} W_1 + W_3 &= \frac{-P_B V_B + P_A V_A - P_D V_D + P_C V_C}{1 - \gamma} \\ &= -\frac{(P_C V_C - P_B V_B) + (P_A V_A - P_D V_D)}{1 - \gamma} \end{aligned} \quad (13.74)$$

である。ここで理想気体の状態方程式から

$$P_A V_A = P_D V_D = nRT_L \quad (13.75)$$

$$P_B V_B = P_C V_C = nRT_H \quad (13.76)$$

であり、したがって

$$\begin{aligned} P_C V_C - P_B V_B &= 0 \\ P_A V_A - P_D V_D &= 0 \end{aligned} \quad (13.77)$$

だから、 $W_1 + W_3 = 0$ となる。したがって、 $W = W_2 + W_4$ である。

一方、この1サイクルで高温熱源に移動した熱を Q_H とすると、 $Q_H = -Q_2 = W_2$ である。したがって、

$$\frac{Q_H}{W} = \frac{W_2}{W_2 + W_4} \quad (13.78)$$

となる。ここに W_2 と W_4 の式を代入すると、

$$\frac{Q_H}{W} = \frac{T_H \ln \frac{V_B}{V_C}}{T_H \ln \frac{V_B}{V_C} + T_L \ln \frac{V_D}{V_A}} \quad (13.79)$$

である。ここで、過程2と過程4がそれぞれ断熱変化であること、そして各断熱変化では(式(13.69)と $PV = nRT$ から) $TV^{\gamma-1}$ が一定であることから、

$$T_L V_A^{\gamma-1} = T_H V_B^{\gamma-1} \quad (13.80)$$

$$T_H V_C^{\gamma-1} = T_L V_D^{\gamma-1} \quad (13.81)$$

が成り立つ。両式を辺々掛けて $T_L T_H$ を約分すると

$$V_A^{\gamma-1} V_C^{\gamma-1} = V_B^{\gamma-1} V_D^{\gamma-1} \quad (13.82)$$

となる。両辺を $1/(\gamma-1)$ 乗して整理すると、 $V_A V_C =$

$V_B V_D$ となり、したがって $V_B/V_C = V_A/V_D$ となり、これを使うと式(13.79)の分母分子の $\ln$ が約分され(分母の $\ln(V_D/V_A)$ は $-\ln(V_A/V_D)$ と書き換える)、

$$\frac{Q_H}{W} = \frac{T_H}{T_H - T_L} \quad (13.83)$$

となり、カルノー・サイクルでは式(13.59)の等号が成り立つことがわかった。

13.17 ギブスの自由エネルギーは反応の方向を決める

熱力学第二法則はどんな現象にも成り立つのだから、当然化学反応にも成り立つ。ということはこの法則を使えば「何と何をまぜて、温度このくらい、圧力このくらいにすると自発的に何が起きるか?」が予想できるし、それを利用して化学反応を制御できるはずだ。スバラシイ!!

しかし実際の化学反応では、目の前のフラスコの中のできごとを追跡できても、フラスコの中と外との間での熱や仕事のやりとりまで追跡するのはしんどい。したがってエントロピーの変化を直接的に時々刻々と追跡するのは無理である。そういうときに便利なのは、次に示すギブスの自由エネルギーという量である(単に「ギブスエネルギー」ともいう)。

ギブスの自由エネルギーの定義

$$G := U + PV - TS \quad (13.84)$$

ここで U は内部エネルギー、 P は圧力、 V は体積、 T は絶対温度、 S はエントロピー

● 問 190 ギブスの自由エネルギーの定義を3回書いて記憶せよ。

これが何を意味するかを理解するために、ある系を考えよう。この系は孤立系ではないとする(外と熱や仕事のやりとりがありえる)。この系のギブスの自由エネルギーの変化を考えてみる。すなわち式(13.50)を導いた時と同様に、ある状態(内部エネルギー U 、圧力 P 、体積 V 、温度 T 、ギブスの自由エネルギー G)から変化した状態(内部エネルギー $U + \Delta U$ 、圧力 $P + \Delta P$ 、体積 $V + \Delta V$ 、温度 $T + \Delta T$ 、ギブスの自由エネルギー $G + \Delta G$)を考え、そのときのギブスの自由エネルギーの変化を考える。変化前は

$$G = U + PV - TS \quad (13.85)$$

変化後は

$$G + \Delta G = (U + \Delta U) + (P + \Delta P)(V + \Delta V) - (T + \Delta T)(S + \Delta S) \quad (13.86)$$

後者から前者を引くと

$$\Delta G = \Delta U + P\Delta V + V\Delta P + \Delta P\Delta V - T\Delta S - S\Delta T - \Delta T\Delta S \quad (13.87)$$

となる。もしこの変化が圧力が一定（不変）なおかつ温度も一定（不変）の状態で行われたら、 $\Delta P = 0$ かつ $\Delta T = 0$ なので、上の式は

$$\Delta G = \Delta U + P\Delta V - T\Delta S \quad (13.88)$$

となる。この右辺の第 1 項と第 2 項をあわせたものは式 (13.38) の左辺と同じだ。したがって

$$\Delta G = Q - T\Delta S \quad (13.89)$$

となる。ここで変化が小さい状況を考える。するとこの式は

$$dG = dQ - TdS \quad (13.90)$$

となる。 dQ は外部から系に流れ込む微小な熱である。

このとき外部は dQ という熱を失うが、その過程が可逆過程であるとしよう（系の内部での変化は不可逆かもしれないが、系を取り囲む外部の変化は可逆過程で行われるものとみなす）。すると系の外部のエントロピーの変化は $-dQ/T$ である。一方、系の内部のエントロピーの変化は dS である。よって系の内部と系の外部をあわせた系について、エントロピーの変化の総和（あるいは総和の変化と言っても同じこと）は

$$dS - \frac{dQ}{T} \quad (13.91)$$

である。そして「系の内部と系の外部をあわせた系」とは要するに全世界（全宇宙）であるので、ひとつの孤立系とみなすことができる。そこで熱力学第二法則より、これは 0 以上のはずである。したがって

$$dS - \frac{dQ}{T} \geq 0 \quad (13.92)$$

この両辺に T をかける。 T は絶対温度（よって 0 以上）なので、これを掛けることで不等号の向きは変わらない：

$$TdS - dQ \geq 0 \quad (13.93)$$

$$\text{したがって } dQ - TdS \leq 0 \quad (13.94)$$

である。これをもとに式 (13.90) は

$$dG \leq 0 \quad (13.95)$$

となる。式 (13.92) に戻って考えれば、この等号が成り立つのは系の中での変化が可逆過程のときだけだ。系の内部での変化が不可逆過程のとき、つまり自発的な変化では等号は成り立たず、不等号になる、すなわち系のギブスの自由エネルギーの変化は負、つまり必ず減っていくのだ。といっても際限なく減っていくわけではなく、ある状態に達したら $dG = 0$ になってしまい、 G はそれ以上は減らない。このとき系は平衡状態にあるという。このことは大切なので大きく書いておこう：

— 系の自発的な変化とギブスの自由エネルギー —

圧力と温度が一定の系ではギブスの自由エネルギーが減るように自発的な変化が進行する。平衡状態に達したとき、ギブスの自由エネルギーは一定値（最小値）をとる。

以下の 2 つの演習問題では理想気体分子のモル数を n とする。温度、圧力、体積、エントロピーをそれぞれ T, P, V, S とする。気体定数を R 、定圧モル比熱を C_p 、定積モル比熱を C_v とする。変化前の状態を状態 1 とし、変化終了後の状態を状態 2 とする。それぞれの状態での量を下付きの数字で表す。

演習問題 19 状態 1 から状態 2 まで定圧変化（圧力一定の下で変化）するときのエントロピーの変化を求めよう（定圧なので $P_1 = P_2$ である）。定圧過程は可逆過程かどうかまだ不明なので状態 1 から状態 2 を別の可逆過程でつなごう。すなわち状態 1 からまず等温過程で状態 3 という状態に持っていく。次に状態 3 から準静的断熱過程で状態 2 に持っていく。このような 2 段階の可逆過程を考えるのである。

- (1) $P_1 V_1 = P_3 V_3$ であることを示せ。
- (2) $P_3 V_3^\gamma = P_2 V_2^\gamma$ であることを示せ。
- (3) 次式が成り立つことを示せ：

$$V_3 = \left(\frac{V_1}{V_2^\gamma} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (13.96)$$

- (4) 次式が成り立つことを示せ：

$$S_3 - S_1 = n(C_v + R) \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (13.97)$$

- (5) $S_2 - S_3 = 0$ が成り立つことを示せ。
- (6) 次式が成り立つことを示せ（これが定圧過程のエン

トロピー変化) :

$$S_2 - S_1 = n C_p \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (13.98)$$

- (7) 状態 1 から状態 2 へ, 直接, 定圧過程で変化するとき, 気体に流入する熱を Q とするとき, 次式が成り立つことを示せ:

$$dQ = n C_p dT \quad (13.99)$$

- (8) 状態 1 から状態 2 へ, 直接, 定圧過程で変化するとき, 以下の量を計算せよ:

$$\int_{\text{状態 1}}^{\text{状態 2}} \frac{dQ}{T} \quad (13.100)$$

- (9) 式 (13.100) の結果を式 (13.98) と比較せよ。

演習問題 20 状態 1 から状態 2 まで定積変化 (体積一定の下で変化) するときのエントロピーの変化を求めよう (定積なので $V_1 = V_2$ である)。定積過程は可逆過程かどうかまだ不明なので, 状態 1 から状態 2 を別の可逆過程でつなごう。すなわち状態 1 からまず準静的等温過程で状態 3 という状態に持っていく。次に状態 3 から準静的断熱過程で状態 2 に持っていく。このような 2 段階の可逆過程を考えるのである。

- (1) $P_1 V_1 = P_3 V_3$ であることを示せ。
 (2) $P_3 V_3^\gamma = P_2 V_2^\gamma$ であることを示せ。
 (3) 次式が成り立つことを示せ:

$$V_3 = V_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (13.101)$$

- (4) 次式が成り立つことを示せ:

$$S_3 - S_1 = n C_v \ln \frac{P_2}{P_1} \quad (13.102)$$

- (5) $S_2 - S_3 = 0$ が成り立つことを示せ。
 (6) 次式が成り立つことを示せ (これが定積過程のエントロピー変化) :

$$S_2 - S_1 = n C_v \ln \frac{P_2}{P_1} \quad (13.103)$$

- (7) 状態 1 から状態 2 へ, 直接, 定積過程で変化するとき, 気体に流入する熱を Q とするとき, 次式が成り立つことを示せ:

$$dQ = n C_v dT \quad (13.104)$$

- (8) 状態 1 から状態 2 へ, 直接, 定積過程で変化すると

きの, 以下の量を計算せよ:

$$\int_{\text{状態 1}}^{\text{状態 2}} \frac{dQ}{T} \quad (13.105)$$

- (9) 式 (13.105) の結果を式 (13.103) と比較せよ。

演習問題 19, 20 でわかったように, 理想気体の定圧変化や定積変化におけるエントロピー変化は, それらをあたかも可逆過程とみなして計算したエントロピー変化に等しい。このことから推測されるように, 実は理想気体の定圧変化と定積変化は可逆過程とみなせるのだ。

演習問題 21 理想気体について次式が成り立つことを証明せよ:

$$C_p = C_v + R \quad (13.106)$$

ここで C_p , C_v , R はそれぞれ定圧モル比熱, 定積モル比熱, 気体定数である。ヒント: 熱力学第一法則を定圧変化に関して立式する。内部エネルギーの変化は C_v と温度変化の積。与えられる熱量は C_p と温度変化の積。

13.18 (発展) ヘルムホルツの自由エネルギー

(発展的話題なので興味のある人だけ読めばよい。)

熱力学にはヘルムホルツの自由エネルギーという量 (単に「ヘルムホルツエネルギー」ともいう) もよく出てくるので説明しておこう。定義はこちら:

—— ヘルムホルツの自由エネルギーの定義 (1) ——

$$F := U - TS \quad (13.107)$$

ここで F はヘルムホルツの自由エネルギー, U は内部エネルギー, T は絶対温度, S はエントロピー

これはエンタルピーとギブスの自由エネルギーに似ているので, 違いをしっかりと認識しよう。すなわち

$$H := U + PV \dots \text{エンタルピー} \quad (13.108)$$

$$F := U - TS \dots \text{ヘルムホルツ} \quad (13.109)$$

$$G := U + PV - TS \dots \text{ギブス} \quad (13.110)$$

である。

本章でここまで説明してきたのは, 熱力学としてはやや古くてオーソドックスな理論体系である。熱力学の理論は別のスタイルでも体系化できる。結果的には同じ自

然法則に到達するのだが、何を出発点（基本原理）とするかによって物理学の理論体系は変わるのだ。中でもヘルムホルツの自由エネルギーをエントロピーよりも前に定義することで熱力学を構築できる。その場合はヘルムホルツの自由エネルギーは以下のように定義される：

—— ヘルムホルツの自由エネルギーの定義 (2) ——

系が等温変化で状態 1 から状態 2 に変わるとき、外界になす仕事が最大であるような等温変化を考え、そのときの仕事を $W_{\max}$ と置くと、状態 1, 2 のそれぞれのヘルムホルツの自由エネルギー F_1, F_2 は、 $F_1 - F_2 = W_{\max}$ を満たす。

これにいくつかの付帯的な条件をつけると、それは式 (13.107) と等価になる。その詳細はここでは示さない。

13.19 (発展) ボルツマン分布は熱平衡でのエネルギー分布

(発展的話題なので興味のある人だけ読めばよい。)

式 (13.1) で、運動エネルギーと温度の間に密接な関係があることがわかった。ではポテンシャルエネルギーと温度の間にはどのような関係があるのだろうか？

それを調べるために単純な例を考えよう。いま、ある気体が地表付近に置かれた固い断熱容器に密閉されていると考えよう。気体を構成する分子は 1 種類で、各分子の質量を m とする。容器は十分に固いので容器内部には外部の大気の圧力は影響しない。

この容器の内部の気体が温度 T で平衡状態にあるとしよう。気体の各分子は地表面からの高さ h に応じて mgh というポテンシャルエネルギーを持つことは承知の通りである（容器の底面が地面に一致するとしよう）。さて容器内の圧力を P とすると、 P は容器内の高さによって変わる。なぜかというとは高さ 0 から高さ h までの間に存在する気体には高さ h 以上にある気体の重力がかかっているからだ。したがって下のあたりは上からの荷重を受けて、より高密度になっているはずだ。いま、高さ h における容器内の気体の圧力と密度をそれぞれ $P(h), \rho(h)$ とおく。容器の高さを H 、容器の断面積を A とおく。

高さ h と高さ $h + dh$ の間にある気体層には上から $AP(h + dh)$ という力で下向きに押され、下から $AP(h)$ という力で上向きに押される。それに、その気体層自身に $\rho A dh g$ という大きさの下向きの重力がかかる。これ

らの力がつりあってその気体層は静止するのだから、

$$-AP(h + dh) + AP(h) - \rho A dh g = 0 \quad (13.111)$$

となる（ここで上向きを正とした）。これを整理すると

$$\frac{P(h + dh) - P(h)}{dh} = -\rho g \quad (13.112)$$

となる。 dh を微小量とすると左辺は dP/dh に置き換えられる。すなわち

$$\frac{dP}{dh} = -\rho g \quad (13.113)$$

となる。一方、気体の状態方程式から^{*18}、

$$P = \frac{\rho k_B T}{m} \quad (13.114)$$

だから、

$$\rho = \frac{mP}{k_B T} \quad (13.115)$$

となる。これを式 (13.113) に代入すると

$$\frac{dP}{dh} = -\frac{mg}{k_B T} P \quad (13.116)$$

となる。この微分方程式は変数分離法で簡単に解けて、解は

$$P = P(0) \exp\left(-\frac{mgh}{k_B T}\right) \quad (13.117)$$

となる。式 (13.115) に代入して

$$\rho(h) = \frac{mP(0)}{k_B T} \exp\left(-\frac{mgh}{k_B T}\right) \quad (13.118)$$

となる。ここで $\exp$ の中に注目しよう。 $\exp$ の中の mgh とは結局、各分子のポテンシャルエネルギー E である^{*19}。つまりポテンシャルエネルギー E を持つ分子の数は

$$\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) \quad (13.119)$$

に比例する。

実はこれはこの特定の例についてだけでなく、広く

^{*18} 理想気体の状態方程式は $PV = Nk_B T$ 。ここで V は体積、 N は分子数。両辺を V で割ると $P = (N/V)k_B T$ 。右辺の分子と分母に分子の質量 m をかけると $P = (mN/mV)k_B T$ 。 mN は気体の質量だから、 mN/V は気体の密度、すなわち ρ と書ける。したがって $P = (\rho/m)k_B T$ となり、式 (13.114) を得る。

^{*19} 力学ではポテンシャルエネルギーを U と表すことが多いが、この章では既に U は内部エネルギーを表す記号として使われてしまっている。そこでここではポテンシャルエネルギーを E と表すことにする。

一般に成り立つ法則である。すなわち温度 T の平衡状態にある系では、エネルギー E を持つ粒子の数は式 (13.119) に比例する^{*20}：このような粒子数分布をボルツマン分布とよぶ。

13.20 (発展) アレニウス型関数

(発展的話題なので興味のある人だけ読めばよい。)

前節で学んだボルツマン分布には

$$\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) \quad (13.120)$$

という形の関数(式 (13.119)) が現れた。この形の関数をアレニウス型関数とよぶ(E はエネルギー、 T は絶対温度、 k_B はボルツマン定数)。この式は化学や生物学で温度が関与する現象に頻出する。そのことを説明しよう。

その前に式 (13.120) を少し変形しておく。 $\exp$ の中の分母と分子にアボガドロ定数 N_A をかけて

$$\exp\left(-\frac{N_A E}{N_A k_B T}\right) \quad (13.121)$$

とできる。したがって式 (13.18) より

$$\exp\left(-\frac{E'}{RT}\right) \quad (13.122)$$

とできる(ここで $N_A E$ を E' と書いた)。アレニウス型関数はこの形式でも頻出する。

さて、大学 1 年生で化学を学んだ人は「化学反応速度」の話でアレニウス型関数が出てきたことを覚えているだろうか。そこでは式 (13.120) や式 (13.122) の E は活性化エネルギーに相当する。式 (13.120) は $k_B T$ が E よりもずっと小さいとほとんど 0 であり、 $k_B T$ が大きくなるに従い、大きくなっていく。ここで $k_B T$ はおおざっぱに言えば分子の熱エネルギーの平均値なので、要するに分子の熱エネルギーが活性化エネルギーを超えたら反応が起きやすくなる、という状況をあらわしている。生化学反応も含め、様々な反応が高温下でよく進むのはこのためである(ただし触媒となる酵素の構造が壊れてしまうくらい的高温になると、かえって反応は進まなくなる)。

^{*20} ただし、量子力学的な効果の顕著な現象ではこれは破綻する。そういう意味ではこれは(特に温度が高い場合に成り立つような)一種の近似である。

13.21 (発展) 飽和水蒸気圧曲線

(発展的話題なので興味のある人だけ読めばよい。)

水蒸気量(湿度)の把握と管理は、農業や食品加工、気象管理、環境問題などで大切であり、ここで述べるのはその基礎理論である。

まずエントロピーとギブスの自由エネルギーを復習しよう：

ある系の 2 つの状態(状態 1 と状態 2)を考え、それぞれのエントロピーを S_1, S_2 とすると、式 (13.53) より

$$S_2 - S_1 = \int_{\text{状態 1}}^{\text{状態 2}} \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} \quad (13.123)$$

である。ここで T は系の絶対温度、 dQ_{rev} は系に外界から可逆的に与えられた微小な熱量である。

また、圧力 P 、温度 T で平衡状態にある系のギブスの自由エネルギー G は、式 (13.124) より

$$G = U + PV - TS \quad (13.124)$$

と定義された。ここで U, V, S はそれぞれ、内部エネルギー、体積、エントロピーである

さて、状態が可逆的にわずかに変化したときは式 (13.124) は

$$G + dG = U + dU + (P + dP)(V + dV) - (T + dT)(S + dS) \quad (13.125)$$

と変わる。ここで dG, dU, dP, dV, dT, dS はそれぞれギブスの自由エネルギー、内部エネルギー、圧力、体積、温度、エントロピーの、微小変化である。

● 問 191

(1) 式 (13.124)、式 (13.125) を用いて次式を示せ：

$$dG = dU + VdP + PdV + dPdV - TdS - SdT - dTdS \quad (13.126)$$

(2) 2 次の微小量(微小量どうしの積)は十分に小さいとみなして無視することで前小問から次式を導け：

$$dG = dU + VdP + PdV - TdS - SdT \quad (13.127)$$

(3) 前小問と熱力学第一法則を用いて次式を導け

$$dG = VdP - SdT \quad (13.128)$$

注：式 (13.128) は松永「入門 化学熱力学」の P61 の式

(6.10) と同じである。

これで準備が整った。これから液体の水(液相)と気体の水(気相)が圧力 P , 温度 T , の平衡状態で存在する系を考える。平衡状態とは液相から蒸発して離脱し, 気相(水蒸気)に加わる水分子の数と, 気相から離脱し凝結して液相に加わる水分子の数とが等しい状態である。つまりこのとき水蒸気は飽和している。したがって P は飽和水蒸気圧でもある。

ここで化学ポテンシャルというものを定義する。それは, 1 分子あたりもしくは 1 モルあたりのギブスの自由エネルギーのことである(ここでは後者を採用する)。平衡状態では液相の化学ポテンシャルと気相の化学ポテンシャルは互いに等しくなくてはならない。なぜなら, もし液相の化学ポテンシャルの方が大きければ液相から気相にわずかに分子が移動することで, 系全体のギブスの自由エネルギーはわずかに下がる。これは系が平衡状態にあることに反する(平衡状態ではギブスの自由エネルギーは極小値をとるはずなので, 気相・液相間で分子の移動があってもギブスの自由エネルギーは不変のはずだ)。もし気相の化学ポテンシャルの方が大きいときも同様の考察から不合理である。

すなわち, 液相(液体の水)の化学ポテンシャルを $\mu_{\text{液}}$, 気相(水蒸気)の化学ポテンシャルを $\mu_{\text{気}}$ とすると,

$$\mu_{\text{液}} = \mu_{\text{気}} \quad (13.129)$$

が成り立っているはずだ。

この状態から, 可逆的にわずかに温度と圧力を変化させてみる。その結果, 圧力が $P + dP$ になり, 温度が $T + dT$ になったとする。このとき水蒸気の飽和状態(つまり平衡状態)は維持されているとする。 $\mu_{\text{液}}$ の変化を $d\mu_{\text{液}}$, $\mu_{\text{気}}$ の変化を $d\mu_{\text{気}}$ とすると, 式 (13.128) より

$$d\mu_{\text{液}} = V_{\text{液}}dP - S_{\text{液}}dT \quad (13.130)$$

$$d\mu_{\text{気}} = V_{\text{気}}dP - S_{\text{気}}dT \quad (13.131)$$

となる。ここで $V_{\text{液}}$, $S_{\text{液}}$ はそれぞれ液相の水 1 モルあたりの体積とエントロピーであり, $V_{\text{気}}$, $S_{\text{気}}$ はそれぞれ気相の水(水蒸気) 1 モルあたりの体積とエントロピーである。

変化の後も化学ポテンシャルは液相と気相で等しいはずなので

$$\mu_{\text{液}} + d\mu_{\text{液}} = \mu_{\text{気}} + d\mu_{\text{気}} \quad (13.132)$$

が成り立っているはずだ。式 (13.132), 式 (13.129) を

辺々ひくと

$$d\mu_{\text{液}} = d\mu_{\text{気}} \quad (13.133)$$

となる。この両辺に式 (13.130), 式 (13.131) を入れると次式ようになる:

$$V_{\text{液}}dP - S_{\text{液}}dT = V_{\text{気}}dP - S_{\text{気}}dT \quad (13.134)$$

● 問 192 (1) 式 (13.134) から次式を導け:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{S_{\text{気}} - S_{\text{液}}}{V_{\text{気}} - V_{\text{液}}} \quad (13.135)$$

(2) 液体が蒸発して気体になるときに吸収する, 1 モルあたりの熱量を潜熱といい, L と表す。次式を示せ。ヒント: 式 (13.123) を使う。温度一定の状態では水が液相(状態 1)から気相(状態 2)に変化すると考える。 T が一定なので $1/T$ は積分の前に出せる。 dQ_{rev} の積分は, 与えられた熱量つまり L に等しい。

$$S_{\text{気}} - S_{\text{液}} = \frac{L}{T} \quad (13.136)$$

(3) 1 モルあたりの体積で比べると液体の水は気体の水(水蒸気)よりもはるかに小さいとみなし, 式 (13.136) と式 (13.135) から次式を導け:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{TV_{\text{気}}} \quad (13.137)$$

(4) 水蒸気を理想気体とみなし, 状態方程式 $PV_{\text{気}} = RT$ を使って ($V_{\text{気}}$ は 1 モルあたりの体積だったことに注意!) 次式を示せ:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{PL}{RT^2} \quad (13.138)$$

この式(または式 (13.135))を クラペイロン・クラウジウスの式 という。

(5) R , L を定数として微分方程式 (13.138) を解き, 次式を導け (C は任意の定数):

$$P = C \exp\left(-\frac{L}{RT}\right) \quad (13.139)$$

式 (13.139) はアレニウス型関数になっている(式 (13.122) で E' を L に置き換えればよい)ではないか!

● 問 193 ある特定の温度 T_0 で飽和水蒸気圧が P_0 であるとする。すなわち

$$P_0 = C \exp\left(-\frac{L}{RT_0}\right) \quad (13.140)$$

であるとする。式 (13.139) を式 (13.140) で辺々割るこ

とで次式を導け:

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{L}{RT} + \frac{L}{RT_0}\right) \quad (13.141)$$

式 (13.141) が飽和水蒸気圧を与える理論式である。ここで $L = 45000 \text{ J/mol}$, $T_0 = 273 \text{ K}$ (摂氏零度), $P_0 = 6.1 \text{ hPa}$ としてよい。図 13.5 に式 (13.141) のグラフを示す。温度が上がるにつれて急激に飽和水蒸気圧が高くなるのがわかる。

よく「湿度何パーセント」という数値は相対湿度というものであり、それは実際にその空気が含む水蒸気の分圧をこの飽和水蒸気圧で割ったものである。

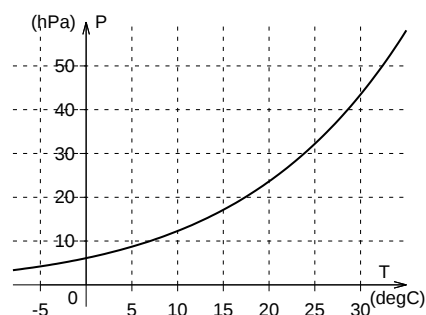


図 13.5 飽和水蒸気圧曲線

● 問 194 式 (13.141) や図 13.5 を用いて以下の問に答えよ (有効数字は3桁でよい):

- (1) 20 °C における飽和水蒸気圧を求めよ (ヒント: 20 は絶対温度では 293 K)。
- (2) 100 °C における飽和水蒸気圧を求めよ。
- (3) 冬に洗濯物が乾きにくい理由を述べよ。
- (4) 冬に喉が乾燥しやすい理由を述べよ。

大気圧 (標準気圧) のもとでは摂氏 100 度で水は沸騰する。したがって摂氏 100 度では飽和水蒸気は大気圧 (1013 hPa) に等しくなるはずである。しかし前問 (2) でみたように式 (13.141) ではそうならない。式 (13.141) は精度があまり良くないのだ。その理由は、蒸発の潜熱 L もすこしだけ温度に依存するということにある。クライベイロン・クラウジウスの式を解くときに L を一定と仮定したのがまずかったのだ。そこで農業気象学などの分野では飽和水蒸気圧をあらわす式として式 (13.141) よりももっと精度の良い経験式 (ティーテンスの式という) を使うのが普通である。

13.22 解答

答 174 (1) H_2 の分子量は 2。したがって H_2 の 1 分子の質量 m は $(2 \times 10^{-3}/N_A) \text{ kg}$ である。ここで N_A はアボガドロ定数。式 (13.3) に代入して $|v_x| = 1.1 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$ 。(2) 式 (13.5) より、平均的な v は平均的な $|v_x|$ の $\sqrt{3}$ 倍。したがって $v = 1.9 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$ 。(3) 式 (13.5) より、平均的な v は分子量の平方根に反比例する。 N_2 の分子量 (28) は H_2 の分子量 (2) の 14 倍。したがって N_2 の平均的な v は H_2 の平均的な v の $1/\sqrt{14} = 0.27$ 倍。したがって $v = 5.2 \times 10^2 \text{ m s}^{-1}$ 。
 答 177 (1) $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ 。(2) $R = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ 。(3) $R = N_A k_B$ 。ここで N_A はアボガドロ定数。

答 191 略解: 式 (13.125) をまず展開し、そこから式 (13.124) を辺々ひくと (1) の式を得る。そのあと $dPdV$ と $dTdS$ を無視すれば (2) の式を得る。

(3) 熱力学第一法則は $dU = dW + dQ$ である (dW , dQ はそれぞれ外から系に加えられた仕事と熱)。 $dW = -PdV$ であり、また、可逆変化ならば $dQ = TdS$ と書ける。したがって $dU = -PdV + TdS$ である。これを式 (13.127) に代入して与式を得る。

答 192 略。

答 193 略 (超簡単)。

答 194 略解: (1) 23.6 hPa (2) 1240 hPa (3) 冬は気温が低いために飽和水蒸気圧が低い。したがって洗濯物から水が蒸発すると、まわりの空気の水蒸気圧はすぐに飽和に近づいてしまう。その結果、洗濯物から蒸発する水蒸気量とまわりの空気から洗濯物に凝結する水蒸気量がほとんど同じになってしまう。そのため乾きにくい。(4) 呼吸で入ってくる外気は摂氏 0 度程度の低温であり、飽和水蒸気圧は低い。そのためたとえ水蒸気で飽和していても水蒸気をほとんど含まない。それが体温で暖められると温度が上がり、飽和水蒸気圧が高くなり、相対湿度は低くなる。その空気と平衡状態になろうとして喉の表面から水分が大量に蒸発する。

第14章

（発展）量子力学

これまで学んだニュートン力学は、生物資源学類の研究・教育で出てくる物理学的な話題にかなり役立つのだが、それでもまだ力不足というか全く歯が立たないことがある。というのも、ニュートン力学は分子や原子などの小ささでは効力を失う。そのようなスケールを支配するのは量子力学という全く別な理論だ。

量子力学が重要となる（農学・環境科学的に）重要な現象はもうひとつある。それは光が関与する現象である。光は光合成を介して全ての生物資源にエネルギーを与える。また、光は生物の体に損傷を与えもする。それらの仕組みを理解し有効活用するには量子力学が必要になることが多い。

一方で量子力学は量子暗号通信や量子計算機などの21世紀の技術革新の基盤である。

そういうわけで、農学・環境科学系を含む全ての大学生に量子力学を多少は教育・訓練する必要がある。

ところが量子力学はニュートン力学に比べて段違いに難しいのだ。直感では理解できない抽象的で不思議な話が多いのと^{*1}、きちんと理解するにはどうしても高度な数学が必要だからだ。ある物理学者は「神は非常に高度な数学者であり、宇宙を作る時に極めて高級な数学を使ったのだ」と言ったほどだ。我々は神ほど高度な数学者ではないのでどうしようもないが、それでも「化学」「化学結合論」等の授業で量子力学が出てくるので、そのほんの入り口をここで学ぼう。

ここでは大学1年生の春学期がほぼ終わる段階で理解できる（わかった気になれる）範囲で量子力学の片鱗を解説する。以下の話では「なぜそうなるのか」は説明できない。自然はともかくそのように振る舞うのだ。

14.1 量子は奇妙な概念

まず、量子力学では物体や現象を「量子」という概念で把える。電子や原子や光はいずれも「量子」として振る舞う。量子は1個2個と数えられるような離散的な存在であり、そのありかたは状態ベクトルという数学的

概念で表現される。「ベクトル」というからには平面ベクトルや空間ベクトルのような「大きさと向きを持つもの」(矢印)を想像しがちだが、状態ベクトルはそういうものとは全く違う、抽象的な概念だ。その「状態ベクトル」を、位置 (x, y, z) と時刻 t の関数として表現したものを波動関数という。

よくある質問 200 「ベクトル」が「関数」になるってどういうことですか? ... 「関数もベクトルの一種だ」という話を数学(線型代数学)で聞いたことはありませんか? あれです。ここでいうベクトルは和とスカラー倍ができるもの、つまり線型結合ができるものという、抽象的に拡張されたベクトルです。

そして波動関数は、「シュレーディンガー方程式」という微分方程式の解であることがわかっている。

よくある間違い 11 波動関数とシュレーディンガー方程式を混同する ... 波動関数とシュレーディンガー方程式は互いに関係ありますが別物です。波動関数はシュレーディンガー方程式の解であるような関数のことです。このような混同をする人は「関数」と「方程式」の違いがわかっていないかもしれません。

シュレーディンガー方程式がどういうものかは後述するとして、とりあえず重要なことを述べる: ある量子がある特定のエネルギーを持つ状態にあるとき、その量子のシュレーディンガー方程式は「行列の固有値と固有ベクトルを求める問題」(数学の教科書を参照せよ)に帰着する。その「固有値」がエネルギーに、「固有ベクトル」が状態ベクトル(それを位置で表現するならば波動関数とも言える)に対応する。そこでそのような状態とエネルギーをそれぞれ固有状態と固有エネルギーとよぶ。

よくある質問 201 ちょっと待って下さい! なぜ唐突に行列とか固有値とか固有ベクトルが出てくるのですか? ... そう考えるといろいろ辻褄が合うからです(笑)

よくある質問 202 電子や原子の話ですね。そこに出てく

^{*1} 量子力学は物理現象の捉え方がニュートン力学とはまるきり違う。ニュートン力学では「速度」や「力」が大事な概念だが、量子力学ではそれらにこだわらない。というか量子力学のスケールではそれらにこだわっても仕方ないようなふうに物体や現象が存在し、振る舞うのである。量子力学では速度のかわりに運動量、力のかわりにポテンシャルエネルギーがそれぞれ重要な役割を担う。

る行列って何なのですか? ... 量子の状態に働きかける操作は行列で表すことができるのです。

よくある質問 203 働きかけるとか操作とかって何ですか? なぜ行列になるのですか? ... まあ今はそのくらいにしておいてとりあえず飲み込んで先に進んで下さい。

このとき状態ベクトルは時刻 t とともに振動するような関数で表されることが数学的に示される。その振動の振動数を ν , 角速度を ω とすると, 量子の固有エネルギー E は

$$E = h\nu = \frac{h}{2\pi}\omega \quad (14.1)$$

となることが示される。ここで h は以前も出てきたが プランク定数とよばれる定数で

$$h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J s} \quad (14.2)$$

である。これは量子の性質を説明するときになぜかいつも出てくる不思議な定数である^{*2}。

よくある質問 204 ここで出てきたエネルギーって運動エネルギーですか? ポテンシャルエネルギーですか? ... 両方をあわせた力学的エネルギーのようなものです。

$h/(2\pi)$ は量子力学で頻繁に現れるので, 物理学者達は 2π をいちいち書くのが面倒になり, それを $\hbar$ と書き表すことにした(これを「エイチバー」と読む)。すなわち

$$\hbar := \frac{h}{2\pi} \quad (\text{定義}) \quad (14.3)$$

である。すると式 (14.1) は次式のように書ける:

$$E = \hbar\omega \quad (14.4)$$

よくある質問 205 なんか天下りの話ばかりでしんどいです。... 量子力学を最初に学ぶときはそういうものです。これが大変にうまくできた話であることがいずれわかります。我慢です(笑)

さて数学的な理由から, 波動関数は空間の中を振動しながら広がる性質, つまり波のような性質を持つ。だから量子は「粒子の性質と波の性質の両方を持つ」と言われる。波^{*3}の波長 λ は粒子の運動量 p と以下の式で結

びつくことが実験事実から確信されている:

$$|p| = \frac{h}{\lambda} \quad (14.5)$$

特に光はそもそも電場と磁場の振動が空間を伝わる波なので, そのようなイメージと整合する。実際, 光の状態ベクトル(波動関数)の振動の角速度 ω は電場や磁場の振動の角速度 ω そのものである。光は周期 $2\pi/\omega$ の間に波長 λ だけ進むので, 「光の速さ」を c とすると $(2\pi/\omega)c = \lambda$ という式が成り立つ。この式を使って式 (14.1) の ω を消去すると, 光の量子(それを光量子とか光子という)のエネルギーは次式のようになる:

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad (14.6)$$

この式はいろんな本によく出てくるが, 注意すべきは式 (14.6) は光子にしか成り立たないということだ。一方, 式 (14.1) や式 (14.4), 式 (14.5) は光子も含めてあらゆる量子に成り立つ(電子や陽子などにも), 量子力学の出発点となったとても大切な式である。

よくある質問 206 ということは電子にも角速度 ω や波長 λ があるのですか? ... はいそうです。電子などの物質も光と同じような波っぽい性質があり, それを物質波といいます。それを利用するのが電子顕微鏡です。電子顕微鏡は光のかわりに電子の波を使うのです。

よくある質問 207 量子って素粒子のことですか? ... 素粒子は量子ですが, 素粒子でない量子もあります。原子や原子核, 陽子, 中性子などは素粒子ではありませんが量子として振る舞う(と考えることで辻褄が合うことが多い)のです。量子は特定のカテゴリの粒子ではなく物体や現象の見方・捉え方(モデル)なのです。

14.2 光の放出・吸収と量子力学

我々の身の回りは光に満ち溢れているが, その光はどのように発生するのだろうか? たとえば太陽, 白熱電球, 蛍光灯, レーザー, 発光ダイオードなどはどのような仕組みで光るのだろうか? 素朴な問だがこれに答えるには量子力学が必要だ。

量子力学によれば, 物体を構成する分子や原子には前述したように固有エネルギーというものがある。その元をたどれば, 分子・原子・電子等の持つ運動エネルギーやポテンシャルエネルギーだ。そして固有エネルギーは低いものから高いものまで離散的に(階段状に)存在す

^{*2} プランクというのは量子力学の建設に多大な貢献をした偉い物理学者。

^{*3} 厳密にはサインやコサイン(三角関数)であらわされる波, つまり正弦波

る。それらをエネルギー準位とよぶ。

個々の分子や原子が異なるエネルギー準位の間で移り変わることがある。これを遷移とよぶ。

原子や分子が高いエネルギー準位から低い準位に遷移するとき、その差のぶんのエネルギーを何らかの形で放出する（でなければエネルギー保存則が成り立たない）。その「何らかの形」のひとつが光なのだ。遷移に伴うエネルギーの差が E のとき式 (14.6) を満たすような波長 λ を持つ光子が放出される^{*4}。

また、光が物質に当たったとき、その波長 λ に（式 (14.6) によって）対応するようなエネルギー差を持つ準位があれば（そして他のもろもろの条件が揃えば）、原子や分子はその光（光子）を吸収して高いエネルギー準位に遷移しう。

このように物質が光を放出したり吸収したりする現象には原子や分子の遷移が大きく関わっている。

そういった中で、特に興味深くて重要なのは太陽や白熱電球の光る仕組みである。それらは「熱エネルギーが光に転化する」という仕組みで光る。P.143 で述べたように、物体を構成する粒子はその絶対温度に応じたエネルギーを平均的に持つ。「平均的」ということは、それよりも高めのエネルギー準位にいたり、低めのエネルギー準位にいたりする粒子が存在する。準位が高い粒子が遷移すると光が放出されて低い準位に移る。そして周囲の粒子と衝突したり光を吸収したりして再び高い準位に戻る。このようなことが無数に発生することでその物体から光が出続けるのだ。この現象を熱放射とよぶ。

実は、太陽や白熱電球だけでなくほとんど全ての物体はそれぞれの温度に応じて熱放射している。君の体も熱放射で光っているのだ!! ただしその光は人の肉眼では見えない赤外線だ。だから赤外線を検知できるセンサーで人体を調べれば君の体表面の温度がわかるのだ。赤外線体温計はそれを利用している。また、夜行性の動物を観察するのに赤外線カメラというものをよく使うが、それも同じ事だ。動物は体温が高いため、周囲よりも多くの赤外線を出す。それを検出するのだ。

量子統計力学という大学3年生レベルの物理学を使えば、熱放射は以下の関数で表されることが証明できる。

これをプランクの法則という：

$$B_{\lambda}(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} \quad (14.7)$$

ここで λ は光の波長、 c は光速、 k_B はボルツマン定数である。 $B_{\lambda}(T)$ は、絶対温度 T において、波長 λ を中心とする単位波長あたり、熱放射で物体から単位面積あたり単位時間あたりに出ていく光のエネルギーを表す関数である。実際の物体から出てくる熱放射のエネルギーはこの式で表されるよりも小さい。この式のとおりの熱放射を出す物体を黒体（こくたい）とよぶ。その意味で、この式で表される熱放射のことを黒体放射という^{*5}。

14.3 シュレーディンガー方程式をわかったつもりになるう

本書の最後にシュレーディンガー方程式を説明しよう。それはこういうゴツい方程式だ：

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + V\psi = E\psi \quad (14.8)$$

ここで x, y, z は位置。 m は量子の質量。 V はポテンシャルエネルギー（別名位置エネルギー。第8章、第10章で出てきたやつ）。 $\hbar$ はプランク定数。 ψ は波動関数といって、 x, y, z という3つの変数（位置）の関数である。

多くの理系大学で1年生はまず化学（物理学ではない!）の授業でこれを目にして心折れるものである（私もそうだった）。この方程式はニュートンの運動方程式 $F = ma$ とはレベルが全く違う。諸君はこれまで科学の様々な概念をイメージや論理の積み重ねで理解してきただろうが、シュレーディンガー方程式はそれは通用しないと思う。シュレーディンガー方程式を「理解」するには長い道のりが必要である。

本節はその長い道のりを大胆にスキップして、とりあえず諸君に「わかったつもり」になってもらい、心折れずにすむことを目的とする。なお私は物理学の専門家ではないので以下に書いたことの中には（特に歴史認識について）物理学者から見たら的是なずれなこともあるかもしれない。あらかじめご容赦願う。

^{*4} このような量子力学的な効果とは別の仕組みで発生する光もある。その一つが「シンクロトロン放射」である。それを利用して短波長の強い光を人工的に作ることができ（放射光施設）、生体分子の動態解明などに使われる。

^{*5} 式 (14.7) の分母の $\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)$ という項に注意しよう。これ

は式 (14.6) を使うと $\exp\left(\frac{E}{k_B T}\right)$ となる。これは P.162 の式 (13.120) で出てきたアレニウス型関数（の逆数）である。ここにはボルツマン分布を量子力学に拡張した考え方が入っているのだ。

よくある質問 208 これは何を表す方程式なの? ... 量子の運動を表す方程式です。 $F = ma$ の量子力学版です。

よくある質問 209 波動関数って何ですか? 何を表すのですか? ... 量子の性質や状態に関する情報を持っていると思われる数学的な概念です。波動関数が何を表すかは、シュレーディンガー方程式を考えたシュレーディンガーさんさえも最初はわからなかったそうです。

よくある質問 210 何を表すかわからない関数に関する方程式をシュレーディンガーは考えたのですか? ... そうです。

よくある質問 211 さっぱりわかりません。シュレーディンガーは何をしたかったのですか? ... シュレーディンガーは波動関数そのものに興味があったのではなく、量子のもろもろの現象とうまく辻褃の合う方程式を探していたのです。そのとき、よくわからないけれど、何らかの関数を考えればうまくいきそうだと気づいたのです。それが波動関数。

よくある質問 212 さっぱりわかりません。それで波動関数がわかったとしても、そもそもそれが何を表すかがわからなかったら無意味じゃないですか? ... そこが面白いと言うか変なところで、波動関数を時刻で微分したらエネルギーがわかり、位置で微分したら運動量がわかるというような仕掛けになっているのです(この後で述べます)。波動関数そのものはブラックボックスで、それに何か数学的な操作をしたら意味のある情報を取り出せるというわけです。そういうふうになればいろんなことが辻褃が合うということにシュレーディンガーは気づいたのです。この時点で既にぶっ飛んでますね。

よくある質問 213 波動関数の絶対値の 2 乗が量子の位置に関する確率密度関数を表すってどこかで聞きましたが? ... シュレーディンガー方程式が発見された後でわかったことで、ボルンという学者が提唱しました。確率解釈と言います。

よくある質問 214 波動関数とシュレーディンガー方程式は同じものですか? ... 違います。シュレーディンガー方程式は一種の「微分方程式」です。それを「解く」ことで「関数」が解として求まります。それが波動関数です。

よくある質問 215 なぜ方程式を考えるのですか? 波動関数が大事なら、最初から波動関数を考えればよいのでは? ... 波動関数はそれぞれの量子が置かれた状況によって違います。状況に応じた波動関数を求めないと意味がありません。シュレーディンガーはその求め方を微分方程式という形で見つけたのです。

よくある質問 216 どうやったらこんな複雑な方程式を導出

できるのですか? ... まず明言しておきたいのですが、シュレーディンガー方程式を「導出」するには量子力学の根本原理から出発する必要があります。それはとても抽象的で数学的であり、皆さんの勉強のレベルでは理解できません。その片鱗を述べると「量子の状態は、複素ヒルベルト空間のベクトルとして表現でき、物理量はエルミート作用素の固有値として確定する」というようなものです。さっぱりわかりませんよね。実はシュレーディンガー自身はそういう正攻法でこの方程式を導出したのではなく、それまで知られていた物理学の体系の中で $F = ma$ を思いっきり数学的に変換して波っぽく扱えるようにした理論(ハミルトン・ヤコビ方程式というもの)を踏み台にして、そこから飛躍する形でこの方程式を「えいやっ」と提案しました。

その後、シュレーディンガー方程式はいろんな学者によっていろんな見方で検討され、「これはうまく実験事実に合いそうだ」とされて受け入れられ、シュレーディンガーはその発見者としてノーベル賞をもらいました。

だから数学や物理学の天才でもない大学 1 年生の皆さんが、この方程式を何らかの直感的・常識的な概念から出発して「導出」するなどということは、どだい無理なのです。

よくある質問 217 ではどうすればよいのですか? 黙って受け入れ、闇雲に覚えるということですか? ... 残念ながらそれに近いです。物理や数学はちゃんと積み上げて理解することが大事で丸暗記は駄目って言われますよね。私もそう思います。でも量子力学については別です。これはホントに手に負えないのです。「理解して覚える」でなく、「覚えてから理解する」の方が早いです。

よくある質問 218 でもシュレーディンガー方程式の導出を他の授業やテキストで見かけますが。... 大学 1 年生にいきなりあの複雑な式を見せるのはあんまりなので、せめて既存の知識になんとかして関連付けてあげようという「親心」です。そう、導出というより「関連付け」です。ではそれをここでもやってみせましょう。

まず実験事実に基づく前提として文句言わずに受け入れねばならないことを述べる。量子が正弦波として振る舞うとき、そのエネルギー E は $h\nu$ であり(式(14.4))、運動量の大きさは $|p| = h/\lambda$ である(式(14.5))、ということである。ここで、正弦波とはひとつの三角関数(サインやコサインのこと。タンジェントは除外)で表現できる波のことである。具体的にはどのような関数で表されるのだろうか? 最も簡単な三角関数は $\cos x$ である($\sin x$ でもよいのだがここでは $\cos x$ を考える)。その波長(周期)は 2π である。波長を λ にするために、 x 方向に $\lambda/(2\pi)$ 倍引き伸ばそう。すると $\cos(2\pi x/\lambda)$ になる(関数 $y = f(x)$ を x 方向に a 倍引き伸ばすと $y = f(x/a)$ になる、と数学の教科書に書いてあるだろ

う)。この関数を全体的に定数倍してもよいということにして、波動関数として

$$\psi(x) = A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (14.9)$$

というものを考える（この A が「定数倍」の定数）。本来、波動関数は y, z にも依存するが、そのことは後で考える。

さてこれを x で微分すると（以後、 $\psi(x)$ の (x) は適宜省略）以下ようになる：

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{2\pi}{\lambda} A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (14.10)$$

偏微分記号を使ったのは、後で y や z に関する微分（偏微分）も考えるからである。ではもう一回 x で微分してみよう。するとこうなる：

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (14.11)$$

ここで右辺の A 以下はもとの関数 ψ と同じなので

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} \psi \quad (14.12)$$

と書き換えることができる。

ここで先程大事だと言った式 (14.5) を使って右辺を書き換える（ λ を消去する）と、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{(2\pi)^2 |\mathbf{p}|^2}{h^2} \psi \quad (14.13)$$

となる。これを $|\mathbf{p}|^2 =$ の形に変形すると（なぜそういうことをするかはすぐ後でわかる）次式になる：

$$|\mathbf{p}|^2 = -\frac{h^2}{(2\pi)^2 \psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{h^2}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (14.14)$$

（ここで式 (14.3) を使った。）

ところでニュートン力学では、粒子の運動量 $\mathbf{p}$ は質量 m と速度 $\mathbf{v}$ を使って $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ と定義された。また、粒子の運動エネルギー T は $T = m|\mathbf{v}|^2/2$ だった。これらから $|\mathbf{v}|^2$ を消去すれば $T = |\mathbf{p}|^2/(2m)$ となる。ここに上の式の $|\mathbf{p}|^2$ を入れると、

$$T = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} = -\frac{h^2}{2m\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (14.15)$$

となる。これを力学的エネルギー保存則

$$T + V = E \quad (14.16)$$

（ V はポテンシャルエネルギー、 E は力学的エネルギーつまり全エネルギー）

に代入してみよう。するとこうなる：

$$-\frac{h^2}{2m\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V = E \quad (14.17)$$

この両辺に ψ を掛けると

$$-\frac{h^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi = E\psi \quad (14.18)$$

となる。なんと!! これは式 (14.8) に似ているではないか!! 実際これは式 (14.8) の「1 次元バージョン」の方程式である。ここで関数 $\psi(x)$ を (x, y, z) の 3 つの変数をとる関数 $\psi(x, y, z)$ に形式的に拡張してみよう。とはいっても、実質的には x にだけしか依存しないという場合、つまり

$$\psi(x, y, z) = A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (14.19)$$

という関数 ψ を考えよう。すると

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (14.20)$$

はいずれも 0 である（定数の微分は 0 だから）。したがって式 (14.18) を 3 次元に拡張した

$$-\frac{h^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + V\psi = E\psi \quad (14.21)$$

を式 (14.19) は満たすのである。これは式 (14.8) と全く同じ方程式だ。

ここまででわかったように、式 (14.21) は量子力学の大切な原理の一つである式 (14.5) と、物理学全般の大切な原理であるエネルギー保存則すなわち式 (14.16) に目配りをしながら、文字通り「波っぽい」関数である波動関数を解に持つことに成功しているのである。

よくある質問 219 なんかにこじつけばくいてまいち納得できません。... そりゃそうですよ。こじつけですから。言ったでしょ？ シュレーディンガー方程式をちゃんと理解するのは簡単ではないって。大学 1 年生のレベルでは「分かったつもり」が精一杯です。

さて、物理学では

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (14.22)$$

を $\Delta\psi$ と書いて（ Δ はラプラシアンとよぶ）、

$$-\frac{h^2}{2m} \Delta\psi + V\psi = E\psi \quad (14.23)$$

と書くことも多い。さらに、

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi \quad (14.24)$$

を $H\psi$ と書いて (この H はハミルトニアンとよぶ)、

$$H\psi = E\psi \quad (14.25)$$

と書くことも多い。これら式 (14.21), 式 (14.23), 式 (14.25) はいずれも同じ方程式であり, 「定常状態のシュレーディンガー方程式」とよぶ。

よくある質問 220 式 (14.25) が成り立つなら結局 $H = E$ ですか? ... 違います。 $H\psi$ はあくまで式 (14.24) を意味しますから, ψ を「約分」したりはできません。

よくある質問 221 式 (14.9) という簡単な関数をわざわざ変にいじくり回して面倒くさい複雑な方程式をこしらえるのはなぜですか? ... 物理学者は方程式を探すのが仕事なのです。物理法則は方程式で記述されるはずだ! という思い込みにも似た信念を物理学者は持っているのです。関数は 1 つの特定の現象を表すにすぎないけれど, その関数の背後にその関数を単なる 1 例として解に持つような方程式があって, そいつにもっと普遍的・一般的な法則が隠されているはずだ! と信じているのです。要するに方程式を見つけることが彼らにとって「現象を理解する」ということなのです。学生は, 先生や教科書から方程式が与えられ, それを解いて答を出すのが学問だと思っていますが, 物理学者は, 答 (現象) をもとにその背後にある方程式 (基本法則) を遡って探すのが学問だと思っているのです。よく知られている現象たちを関数で表し, それらを矛盾なく解に持つ方程式を探す。それが見つかったらその方程式を別の条件で解いたり数学的に変形し, 未知の現象を予測する。それを実験や観測で確かめる。それが物理学の基本法則の発見のプロセスなのです。

みんながよく知っている $F = ma$ もそうです。ペスト禍で大学が閉鎖され, 実家に帰ってヒマになったニュートンが惑星の運動 (ケプラーの法則) を解として持つような方程式を探っているうちに $F = ma$ にたどり着いたのです。そして $F = ma$ を解けばたくさんの現象を矛盾なく説明できるということは皆さんは本書で学んだでしょう。

ところが 19 世紀の終わり頃に, $F = ma$ では説明できない現象がたくさん見つかったのです。特に原子内の電子。原子が吸収・放出する光の波長を説明するには $F = ma$ では駄目だとわかってきました。それが量子力学の幕開けであり, 新たな方程式探しの幕開けだったのです。そのゴールがシュレーディンガー方程式だったのです。

よくある質問 222 定常状態ってどういうことですか? ... 波動関数の位置依存性と時刻依存性を分離して (別々の関数の積として) 表現できるということです。その場合, 量子の位置に関する確率密度関数は時刻によって変わらなくなります。エネルギーが確定する状態とも言えます。このあたりは「ライブ

講義応用数学」の第 11 章を読んで下さい。

よくある質問 223 量子力学の大事な原理のもうひとつである式 (14.1), つまり $E = \hbar\omega$ はどうなったのですか? 上の話では結局出てきませんでした。... 定常状態のシュレーディンガー方程式 (式 (14.21), 式 (14.23), 式 (14.25)) の右辺の E が $\hbar\omega$ に等しくなるはず。それは波動関数を時刻 t に依存させることで実現します。以下で説明しましょう:

ではシュレーディンガー方程式に時刻を含ませてみよう。まず量子の波動関数を空間を 3 次元にして時間も含むようにするには, 式 (14.19) を拡張して以下のように表現するのが具合がよいということがわかっている:

$$\psi(x, y, z, t) = Ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \quad (14.26)$$

ここで (k_x, k_y, k_z) を波数とよび, $\mathbf{k}$ と表す。波数と波長 λ には $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ という関係があり, 運動量 $\mathbf{p}$ とは

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad (14.27)$$

という関係がある (実は式 (14.5) はここから出てくる)。また, i は虚数単位である。つまり波動関数が複素数になるのだ!!

式 (14.26) を解に持つように式 (14.21) を拡張するには, 右辺の $E\psi$ を $i\hbar\partial\psi/\partial t$ に取り替えて

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (14.28)$$

とすればよい。実際, 式 (14.28) に式 (14.26) を代入してみると ($i^2 = -1$ に注意), 左辺は

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\psi + V\psi &= \frac{\hbar^2}{2m}|\mathbf{k}|^2\psi + V\psi \\ &= \frac{|\hbar\mathbf{k}|^2}{2m}\psi + V\psi = \left(\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + V\right)\psi \end{aligned} \quad (14.29)$$

となり (式 (14.27) を使った), 右辺は

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hbar\omega\psi \quad (14.30)$$

となる。これらをイコールと置いて ψ を約分すれば

$$\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + V = \hbar\omega \quad (14.31)$$

となる。左辺は力学的エネルギー, 右辺は量子のエネルギー (式 (14.1)) となり, これらが等しいということである。辻褄が合ってめでたしである。

式 (14.28) を式 (14.25) に寄せて簡略的に書けば,

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (14.32)$$

となる。実はシュレーディンガー方程式といえば式 (14.28) や式 (14.32) が「本物」である。

よくある質問 224 なぜ複素数になるのですか? ... 式 (14.1) ($E = \hbar\omega$) をシュレーディンガー方程式に組み込むには、波動関数が角速度 ω を含むように、つまり ωt の三角関数になるようにしたいのです。ところが $\cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$ の形で t を波動関数に組み込むと、 ω を引っ張り出すために t で微分したら、 $\omega \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$ となって、サインに比例します。一方、運動エネルギーは運動量の 2 乗に比例し、それは $|\mathbf{k}|^2$ に比例するので、 $\mathbf{k}$ を 2 回引っ張り出すために波動関数を位置で 2 階微分する必要があります。コサインの 2 階微分はコサインに比例します。片方はサイン、もう片方はコサインに比例してしまい、イコールにならないのです。これを三角関数の複素数版であるオイラーの公式が解決するので、式 (14.26) のような指数関数なら t で 1 回微分しても位置で 2 回微分してももとの関数に比例するので、係数を調整すればイコールになるのです。その調整のところにエネルギー保存則を押し込んでいさえれば辻褃が合うのです。

よくある質問 225 なんだかわかったようなわからないような...。こうすると形式が整うとか辻褃が合うとか、そんなテキストなこじつけでよいのですか? ... 言ったでしょ? こじつけだって。ここではシュレーディンガー方程式を「わかったつもり」になってもらうためにこじつけ満載で説明しました。1 年生の間はとりあえずそれで我慢してください。それで量子力学を使った化学とかの話が進みますから。

よくある質問 226 わかったつもりじゃ駄目だ! って、先生、言ってたじゃないですか... 困りましたね。量子力学を 1 年生の授業で持ち出すのは正直、無茶だと私は思うのですが、大学のカリキュラムはどこでもそうになっているから仕方がないのです。少しでも量子力学を 1 年生にわかってもらうために「ライブ講義 大学生のための応用数学」の第 11 章を書きました。がんばってそこまで読んでみてください。それと次の本もお薦めです:

松浦壮「量子とはなんだろう」講談社ブルーバックス

本気でシュレーディンガー方程式を理解するには数学と物理をがっつり勉強して、量子力学をじっくり勉強する必要があります。なかなか険しい道ですが、驚きと興奮に満ちた知的冒険が待っています。

14.4 前期量子論とボーア模型

さて、シュレーディンガー方程式を使うと原子の性質や構造を大変にうまく説明できるのだが、その考え方は非常に抽象的であり、数学的にも高度である。量子力学はそのレベルに到達する前に、もっと素朴で体系性を欠いた黎明期とも言える時期があった。その頃の量子力学を前期量子論という*6。

前期量子論は式 (14.7) で述べた「熱放射」の研究が契機となって始まった。そしてその著しい成果はボーア模型というものである。これはニールス・ボーアという物理学者が考案した原子の構造を説明する理論である。実際はいろいろ無理・不合理なことがあるので非現実的でダメな理論であり、シュレーディンガー方程式にとって代わられてしまった。しかし歴史的・教育的に今も大事にされるので (シュレーディンガー方程式よりもずっと簡単だからだろう)、ここで説明しておこう。

ボーアは、原子の中では原子核を中心として電子が等速円運動をしていると考えた。実際はこれは間違っているのだが、ここではボーアの考え方をたどるためにとにかくそう考えよう。正の電荷を持つ原子核と負の電荷を持つ電子とが静電気力で互いに引き合う。その引力が向心力となり電子は等速円運動すると考えるのである。

今、陽子 1 個が原子核であるような水素原子を考える。すると原子核の電荷は q_e 、電子の電荷は $-q_e$ である (q_e は電荷素量)。原子核と電子の距離を r (それは電子の円運動の半径でもある) とすると、電子が原子核に引っ張られる力 (静電気力) の大きさは kq_e^2/r^2 である。一方、電子の質量を m 、速さを v とすると、電子の等速円運動の向心力は mv^2/r である。したがって

$$\frac{kq_e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (14.33)$$

が成り立つ。ところが r や v はどのくらいの値なのかよくわからない。

ここで量子力学の考え方をつまみ食いの的に使う。電子が円周上を波のように広がって回っていると考えるのだ。波は円周をぐるっとひと回りして元の位置に戻って来たときにそこでつながっていなければならないから、円周の長さは波の波長 λ の整数倍でなくてはならない、と考える。すなわち、 n を 1 以上の整数として

$$2\pi r = n\lambda \quad (14.34)$$

*6 量子力学と量子論は同義語である。したがって前期量子論を前期量子力学と言ってもよいのだが、慣習的には前期量子論ということが多い。

と考えるのだ! (なんか納得できないと思っても構わず進めるのだ!) ところで式 (14.5) より, $\lambda = h/|p|$ である。ニュートン力学では運動量 p の大きさは mv である。したがって $\lambda = h/(mv)$ となる。これを式 (14.34) に代入すると, $2\pi r = nh/(mv)$, すなわち

$$n\hbar = rmv \quad (14.35)$$

が成り立つ (式 (14.3) を使った)*⁷。式 (14.33) と式 (14.35) を連立させて r を消去すると, v が次式のように決まる:

$$v = \frac{kq_e^2}{n\hbar} \quad (14.37)$$

以上が準備である。ここで電子の力学的エネルギー E を求めよう。それは運動エネルギー $mv^2/2$ とポテンシャルエネルギー $-kq_e^2/r$ の和なので,

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{kq_e^2}{r} \quad (14.38)$$

である。ところが式 (14.33) より, $kq_e^2/r = mv^2$ だから

$$E = \frac{mv^2}{2} - mv^2 = -\frac{mv^2}{2} \quad (14.39)$$

となる。この右辺の v に式 (14.37) を入れると

$$E_n = -\frac{(kq_e)^2}{2(n\hbar)^2} \quad (14.40)$$

となる。ここで右辺を見るとエネルギーは整数 n に依存することが明らかなので, E を改めて E_n と書いた。式 (14.40) は実際の水素原子の中の電子のとりえるエネルギー (エネルギー準位) に一致するのである。

さて, 前期量子論は式 (14.4) や式 (14.27) や式 (14.36), すなわち

$$E = \hbar\omega \quad (14.41)$$

$$p = \hbar k \quad (14.42)$$

$$L = n\hbar \quad (14.43)$$

という式で粒子 (量子) のエネルギー, 運動量, 角運動量といった量をプランク定数を介して波の性質 (角速度, 波数, 波の個数) に結びつけることで波の性質を取り込

んで物理学を拡張することを試みた。それはボーアモデルなどの一定の成果を収めたのだが, 場当たりので体系的に欠いており, 多くの矛盾や限界にぶつかった。それを解決するためには人類はニュートン力学を捨て, 前期量子論を捨て, 大きく発想を変えて自然観・世界観を刷新し, 線型代数という数学に全面的に依存する理論を作る必要があった。それがシュレーディンガー方程式に代表される新しい (といっても 20 世紀前半に作られた) 量子力学であり, それが現代の量子計算機や量子暗号などの最新技術の基礎になっている*⁸。

*⁷ 式 (14.35) は以下のように「導出」することもできる: 円運動の角運動量 (の円に垂直な成分) を L とすると, 式 (11.35) を思い出せば

$$L = n\hbar \quad (14.36)$$

である (n は何らかの整数)。ニュートン力学では $L = rmv$ である。これを式 (14.36) に代入すれば式 (14.35) を得る。

*⁸ 量子力学の普通の教育は, まず前期量子論から入り, そこからシュレーディンガー方程式へ至る発想を説明していく。しかし本書はそのアプローチはとらなかった。なぜならば, シュレーディンガー方程式とその背後にある新しい量子力学の発想の本質は, ニュートン力学や前期量子論とはほとんど関係ない (と私は思う) からである。それを結びつけて語るのはこじつけのようなものであり, かえって初学者は混乱するのではないかと思う。ものの見方を刷新し, 全く新しい別物を学ぶつもりで向き合うほうが, 量子力学は頭に入りやすいと私は思う。

索引

C	19
eV	53
h	166
$\hbar$	166
k_B	143
kgf	18
N	13
圧力	27, 30
アレニウス型関数	162
安息角	37
位相	78
位置エネルギー	49
位置ベクトル	60
一般性	8
一般相対論	3
運動エネルギー	95
運動の三法則	2, 64
運動方程式	2, 64
運動量	67
運動量保存則	105
エネルギー	44
エネルギー準位	167
エネルギー等分配則	143
エネルギー保存則	2
エレクトロン・ボルト	53
円運動	81
演繹	1
遠心力	92
エントロピー増大の法則	2
応力	30
オッカムの剃刀	8
温度	143
カーリング	68, 96
概算	10
外積	20, 125
解析力学	2
外力	105
化学ポテンシャル	163
可逆過程	152
可逆的	152
角運動量	125
角運動量保存則	127
角振動数	78
角速度	78
確率解釈	168
仮想仕事の原理	42
加速度	60
荷電粒子	19
カルノー・サイクル	157

慣性系	66, 87
慣性抵抗	69
慣性能率	134
慣性の法則	2, 64
慣性モーメント	134
慣性力	90
気圧	27
起電力	52
帰納	1
ギブスの自由エネルギー	158
基本法則	1, 8
巨視的	143
キログラム重	18
空気抵抗	69
クーロン	19
クーロンの法則	20
クーロンの摩擦法則	36
クーロン力	20
グラハムの法則	144
クラベイロン・クラウジウスの式	163
系	10
原点	60
原理	8
検量線	18
向心力	82
校正	18
光速	2
光速不変の原理	2
拘束力	36
剛体	133
公理	8
合力	14
黒体	167
黒体放射	167
古典力学	2
固有エネルギー	165
固有状態	165
コリオリ力	92
最大摩擦力	36
作用・反作用の法則	15, 64
作用反作用の法則	2
ジオイド	119
仕事	41
仕事の原理	42
仕事率	51
自然状態	31
自然長	31
磁束密度	20
質点	9
質点系	9
質量	9
磁場	20
周期	78

- 重心 107
 終端速度 70
 自由度 143
 自由落下 67
 重量キログラム 18
 重力 16
 重力加速度 16
 シュレーディンガー方程式 167
 準静的過程 153
 状態ベクトル 165
- 水圧 27
 垂直応力 30
 垂直抗力 34
 水理学 38
- 正弦波 168
 静止 63
 静止摩擦係数 36
 静止摩擦力 36
 絶対エントロピーの法則 2
 遷移 167
 前期量子論 171
 線型近似 32
 線積分 116
 せん断応力 30
- 相対論 2
 測地学 16
 測地系 120
 速度 60
 素電荷 19
 素粒子物理学 3
- 第一原理 8
 単振動 79
 弾性衝突 108
 弾性体 32
 弾性力 32
 断熱過程 149
 断熱変化 149
- 力のつりあい 15
 力のモーメント 127
 地球楕円体 119
 中心力 128
 張力 25
 調和振動 79
- 定義 8
 定積モル比熱 147
 ディラック定数 131
 定理 8
 てこの原理 43
 デュロン・プティの法則 150
 電圧 52
 電位 52
 電位差 52
 電荷 19
 電荷素量 19
 電気素量 19
 電磁気学 2
 テンソル 31, 34
 電場 20
 電流 53
 電力 53
- 等加速度運動 63
 等価振り子の長さ 139
 統計力学 2
 等時性 10, 119
 等速円運動 81
 等速直線運動 63
 等速度運動 63
- 動摩擦係数 36
 動摩擦力 36
 特殊相対論 3
 朝永振一郎 3
 トルク 127
 トルクレンチ 127
 トレーサビリティ 18
- 内力 105
- ニュートン 13
 ニュートン力学 2
- 熱輻射 2
 熱放射 2, 167
 熱容量 147
 熱力学 2
 熱力学第一法則 148
 熱力学第二法則 155
 熱力学の三法則 2
 粘性抵抗 69
 粘着力 37
- 波数 170
 パスカルの原理 28
 波動関数 165, 167
 バネ定数 32
 ハミルトニアン 170
 速さ 61
 バンジージャンプ 100
 反発係数 109
 万有引力 15
 万有引力の法則 3
 万有引力定数 15
 万有引力の法則 3
- 非慣性系 87
 微視的 143
 ひずみ 34
 非弾性衝突 108
 比熱 147
 微分方程式 66
- フックの法則 32
 物質波 166
 フライホイール 137
 プランク定数 112, 166
 プランクの法則 167
 振り子 118, 139
 浮力 29
 粉流体 37
- ベクトル 22
 ベクトル解析 21
 ヘルムホルツの自由エネルギー 160
 変位 32
- 法則 7
 ボーア模型 52, 171
 保存則 100
 保存力 51
 ポテンシャルエネルギー 48
 ボルツマン定数 143
 ボルツマン分布 162
- マクスウェル方程式 2, 21
 摩擦力 36
- モーメントのつりあい 43, 129
 モデル 9
 モデル化 9
- ヤング率 33
- ラブラシアン 169

力学	2	量子力学	3, 165
力学的エネルギー	98		
力学的エネルギー保存則	97	連続体	31
力積	106		
流体	31	ローレンツ力	20
量子	112		