物理学教材

（ニュートン力学 $+\alpha$）

筑波大学生物資源学類 2022 年度 春学期

はじめに

この教材は, 物理学を専門としない大学生, 特に農学・生物学・環境系の分野を学ぶ人のための物理学（力学）の教材である。筑波大学生物資源学類で, 10 年近くにわたって授業で使い, 少しずつ更新してきたものである。本書の基本方針を以下に示す:

基本方針

(1) 筑波大学生物資源学類 1 年生の授業「物理学」(春学期）で使う。
(2) 物理学の考え方や基本法則を丁寧に学ぶが, 同時に, 農学や環境科学で「使える」物理学を学ぶ。
(3) 基礎知識として, 高校数学 III までの微積分・ベクトルと, 中学理科（1 分野）の物理（特に, 力, 運動, エネルギーの内容）を必須とする。
(4) 高校「物理基礎」「物理学」の知識は無くても（忘れていても）かまわない。
(5) 数学の副教材として, 「ライブ講義 大学 1 年生のための数学入門」を使う。特にその第 2 章（単位）を自習しておくこと。本書の中に出てくる「数学の教科書」はこの本を意味する。
(6) 本書前半は主に高校数 III までの数学を使うが, 後半では大学の数学（微分方程式・偏微分・全微分・外積など）も使う。これらは上記の数学の教科書で自主的に学んでおくこと（生物資源学類では「基礎数学」の授業が並行してこれらを扱う）。
(7) 意欲的な読者のために高レベルの数学に言及する場面もあるが, それについては「ライブ講義 大学生のための応用数学入門」を参考に。
(8) 本書の内容は, （基本法則や慣習的に理解されていること以外は）全てオリジナルである。ただし, Richard Feynman ”Lectures on Physics” Addison-Wesley から影響を受けている（岩波書店から「ファインマン物理学」という題で和訳が出ている)。ちなみに, この本の著者が書いた自伝「ご冗談でしょうファインマンさん」は一読を薦める。
(9) ベクトルは, 細字や「文字に上矢印」ではなく, 太字で書こう。「ライブ講義 大学 1 年生のための数学入門」P153 参照
(10) 数値を求める問題では, （無次元量でない限り）数値に単位をつけよう。数値の有効数字は, 特に指定があったり, 問題設定で 3 桁以上の有効数字が使われているのでなければ, 2 桁でよい。
(11) 各章末に問題の解答を載せた。ただし一部の問題については解答を省略した（「解答略」とすら載っていないものもある)。そのような問題は, テキストをしっかり読めば自然に解答が見つかるはず。
(12) 脚注（ページ下部の欄外のコメント）は, 理解を助ける補足的な説明や, より高度な学びへの橋渡しになることを書いている。本文が理解できてさえいれば, とりあえず読み飛ばしても構わない。
(13) 誤植訂正情報は以下のウェブサイトに掲載する：http://pen.envr.tsukuba.ac.jp/lec/physics/

必読書

本書に取り組む前に（あるいは取り組みながら）, 以下の 2 冊を必ず読んで欲しい。

- 関口知彦・鈴木みそ「マンガ 物理に強くなる ... 力学は野球よりやさしい」(講談社ブルーバックス)。これは中学理科〜高校物理基礎の内容だが, 物理学の根本的な考え方がよくわかる名著である。物理に苦手意識を持つ人はもちろん, 物理は得意だと思っている人も, 必ず気づきがあるだろう。
- 西林克彦「わかったつもり 読解力がつかない本当の原因」(光文社)。これは読解力（国語力）の本だが,「わかった」と思うことの多くが実際は「わかったつもり」という皮層的な思考停止にすぎないと気づくだろう。そのことを認識した上でこの教科書を読むと, 読みや理解が深くなり, 効率的・本質的な学びに近づくだろう。

よくある質問

よくある質問 1　物理って必要ですか? あまり役立ちそうな気がしないのですが... 物理は「役に立つ科学のナンバーワン」です。程度の差こそあれ, 理系の学問は全て物理学のお世話に

なっています。物理は空気と同じように, 気にしなければ気づきませんが, 常に我々のまわりにある大切な存在です。

よくある質問 2　私の志望分野では物理学は不要だと先輩から聞いたのですが ... そういうことは, 物理を理解していない人ほど言いがちです（笑）。

よくある質問 3　物理って, 公式覚えて数値を入れるだけでは? ... 違います（笑）。物理は基本法則と数学で組み立てられた, 論理的な理論体系であり, それを通して自然現象の成り立ち・仕組みを我々は根本から理解するのです。

よくある質問 4　でも, ボールとかバネとか, ものの動きを考えるだけでしょ? ... 「ものの動き」は物理学の対象のごく一部ですが, 「ものの動き」がわかるだけでも凄いですよ。地震も津波も台風も「ものの動き」です。化学反応も分子や原子という「ものの動き」です。魚が泳ぐのも鳥が飛ぶのも「ものの動き」です。ボールの軌跡やバネの振動は, そういう森羅万象の「ものの動き」を説明する, 最初の例にすぎません。

よくある質問 5　高校でやった物理は面白くなかったのですが... 私もです（笑）。ただ, それは心が物理学に対して開いていなかったからではないでしょうか?

よくある質問 6　数学を使わないで物理を勉強できないのですか? ... 数学抜きの物理学は, むしろしんどいですよ。数学を学びながら物理を学ぶことで, 楽に楽しく, 本質的に物理を理解できるし, そのおかげで数学も理解しやすくなりますよ。

よくある質問 7　本書を読む他に, 何か良い勉強法はありますか? ... 物理の実験を自分でやったり, 実験の映像をテレビやネットで見てみよう。物理学は机上の空論ではなく, 実際の自然現象を説明する理論だから, 実験を通して理解することが必要。テレビ番組では, 「NHK 高校講座 物理」, 「ピタゴラスイッチ」(特にピタゴラ装置), 「大科学実験」がおすすめ（これらはネットでも見られる）。YouTube 等にも良い動画がたくさんある（「物理エンジン」で検索!)。楽しんで見よう!

よくある質問 8　物理, どうすれば好きになれますか? ... 物理の考え方に慣れましょう。そうすれば, 物理の威力や面白さに気づき, いろんなことが芋づる式にわかるようになって, 楽しくなります。

よくある質問 9　物理の考え方ってどういうものですか? ... それを知るには本書や前述した 2 冊の本を読むのです。直感やイメージや雰囲気に頼りすぎず, 物理学の用語を正確に定義し, それを使って基本法則を丁寧に理解し駆使して, シンプルに物事を考え, 説明することです。

よくある質問 10　高校で物理を勉強していないので不安です。大学の物理の授業で良い成績はとれるでしょうか? ... とりあえず本書は高校物理の履修歴は前提としません。むしろ重要なのは高校数学 III です。それと, テストや成績はいったん忘れて, それよりも「自分が本当に理解しているか」に関心を向け（メタ認知）, 「わかったつもり」にならないように, テキストを丁寧に読み, 鉛筆を持って全ての説明や証明, 問題を自分で計算・導出してみましょう。そして, 理論が実際の現象にうまく対応することが納得できるまで, 考え続けましょう。

よくある質問 11　でも, 成績が悪かったり単位を落とすと就職や進学で困ります... 就職や進学などの将来のことを考えるならなおさらです。テストにこだわった勉強は解答・解法の丸暗記のような「その場しのぎ」が多くなるので長期的には学力・実力は伸び悩みますよ。仮にそれで良い成績がとれたとしてもそれは虚栄です。自己の将来を虚栄で切り開こうとする姿勢はいずれ見抜かれますし, 貴重な時間を虚栄の構築に費やしてしまったことを自分でもいずれ後悔するでしょう。遠回りのように思えても, 理解重視で学べば理解できて楽しくなり, 実力もついて, 結果的に良い点や成績が得られるものです。

よくある質問 12　このテキストは高校物理の復習ですか? ... 高校物理と同じ話も現れますが, 高校物理では説明できなかった部分を説明していきます。そのために数学をたくさん使います。「高校物理やったから楽勝!」と思わずに, 丁寧に学んで下さい。

よくある質問 13　高校物理既習ですが, 有利ではないのですか? ... 高校物理既習者は似た題材や問題に慣れ親しんでいるのは有利です。しかし似ているとはいえこれは大学の物理です。高校物理と似ているからといって「わかったつもり」で雑にこなしてしまい, 結局わからなくなってしまいがちなのが心配。人間は成功体験や先入観があると新しいことを学びづらくなりますからね。高校物理を忘れて謙虚にやり直せば, 「高校物理のアレは実はこういうことだったのか!」という驚きや感動が君を大いに成長させてくれるでしょうし, それは高校物理未習者には味わえない体験です。

よくある質問 14　簡単な公式は覚えておいた方が良いのでしょうか。 ... 「公式」よりも, まず「基本法則」と「定義」をしっかり覚えましょう。「公式」は, 基本法則と定義から論理的に導出されます。

2022 年 3 月 18 日 奈佐原 顕郎

目次

第1章

物理学とは

自然現象にはいろいろあるが，物理学という学問は，どんな自然現象でも突き詰めれば少数の普遍的な法則で演繹的に説明できるはずだと考え，そのような法則，すなわち「基本法則」[*1]を発見すること，そして，そのような基本法則に基づいて自然現象を解明することを目指す。

よくある質問 15　演繹って何ですか？ どう読むのですか？ ... 「えんえき」と読みます。あらかじめ認められたルールを元に，論理的に論ずることです。その反対が帰納です。実例をたくさん集めて観察し，それらに共通する性質をルールとして認めようという考え方が帰納です。

もう少し具体的に説明しよう。物理学は，ものごとを「モデル化[*2]」し，「基本法則」と「数学」で論じる。手始めに，その流儀で次の問を論じてみせよう：

最初の問

手に持ったボールを手放すと，ボールは地面に落ちるのはなぜか？

ありがちな答は「重力があるから」というものだ。しかしこれは物理学としては不十分だ。まず重力が何に対してどのように働いてるか述べていない。そして，重力がどのようにボールの落下につながるのか説明していない。説明が欠落しすぎているのだ。その欠落を「そこは説明しないでも常識的にわかるだろう」とか「直感的にわかるだろう」というのは，物理学ではないのだ。

よくある質問 16　なんか，当たり前の常識に対して，屁理屈とかイチャモンをつけてる感じで不毛に思えますが ... 学問はそういうものです。当たり前のことでも理論体系を元に「説明」しようとするのです。

物理学はこの問を次のように論じるのだ（今はこの詳細はわからなくてよい。雰囲気だけ感じ取れば十分である）：

まず，ボールと地球をそれぞれ質点（質量を持つ点状の物体。後述する）とみなす（**モデル化**）。質点同士には，互いに引き合う力 (重力) が働く，という**基本法則**がある（万有引力の法則）ので，ボールと地球の間には互いに引き合う力が働く。すなわち，ボールは地球に向かう力を受ける。次に，質点に力がかかると，質点にはその力に比例した加速度が生じる，という**基本法則**がある（運動の第二法則）。それを元に，「ボールが地球から受ける力」からボールの加速度を求め，それに**数学**（微積分学）を適用すると，ボールの位置は時刻の関数として表現され，それは時刻が増えるほど，地球に近づいていくという性質をもつことが**数学的**に示される。これが，「ボールを手放したら地面に落ちる」ことの物理学的な説明である！

よくある質問 17　めっちゃ面倒くさくないですか？ もったいぶって，簡単なことをわざわざ難しく言い換えてるだけでは？ ... 違います。この論法を使えば，火星でもボールが落ちることを，そのスピードがどのくらいかも含めて予測・説明できるし，宇宙の彼方にある小惑星に「はやぶさ」のような探査機を飛ばして着陸し，地球に帰還させることもできるのです。そのような，「行ったことのない世界」の出来事まで，予測・説明できるのです。

よくある質問 18　上の説明だと，むしろ地球がボールに向かって落ちていくのでもよいということになってしまいますよね？ それでもよいのですか？ ... はい！ 実際に起きているのはそういうことなのです。ボールが地球に向けて動くのと同時に，地球もボールに向けて動くのです。

よくある質問 19　そんなわけないでしょう。常識的にありえないです。 ... だから常識に頼るのはダメなのです。ほんのごく僅かですが，実際に地球もボールに向けて動くのです。少なくとも物理学はそう結論しますし，物理学をきちんと学んだ人

[*1] 「基本原理」「第一原理」などとも言う。
[*2] 現象を扱いやすいように単純化して捉え直すこと。後の節で詳しく述べる。

は, この結論を疑わないはずです。

よくある質問 20　**常識に反するような理屈をどう信じろというのですか**? ... 常識が常に正しいのならば, 学問は不要です。学問は常識からいったん離れて, 確実な根拠を積み上げることで真実に迫るのです。その結果が常識に反するならば, それは学問と常識のどちらか（または両方）が間違っているのです。ところが物理学は基本法則と数学で積み上げていますので, 現象を正しくモデル化すれば, 間違う余地は大変に小さいのです。

よくある質問 21　**地球を点状の物体とみなす**, **というのが怪しいと思います**! ... そうそう。そういうふうに考えるのが, 物理学の思考パターンです。何か変だな? と思ったら, 議論の細部を点検して, どこがおかしいかを考え, それを検証するのです。ちなみに, 上の問では, 地球を点状の物体とみなすのは間違いではありません。その根拠は, 物理学の基本法則と数学で示すことができます。ただしそれはちょっとめんどくさいので, とりあえず今はそれはスルーして先に進みましょう。

よくある質問 22　**「法則」と「基本法則」は同じですか**? **違いますか**? ... 基本法則は法則の一種です。法則とは, ある条件下で必ず成り立つこと。その中でも, 他の法則から導くことができない法則を基本法則といいます。基本法則でない法則は, 基本法則からどうにかして（多くの場合は数学で）導出できる法則です。

1.1　物理学の中の分野

物理学の基礎は, おおまかに言って, 以下のような分野にわけられる：

- 力学
- 熱力学
- 電磁気学
- 相対論
- 量子力学

この中で, 本書で学ぶのは主に力学である[*3]。力学は日常的な時空間スケールでの物体の運動を扱う。力学を使うと, 津波の伝播, 地震波の伝播, 地球の周囲をまわる月の運動, サッカー選手のフリーキック, フィギュアスケーターのジャンプとスピン, レインボーブリッジの強度や構造, 交通事故の衝撃等が解析できる。運動の三法則と呼ばれる法則（慣性の法則・運動方程式・作用反作用の法則）が基本法則である。

熱力学は, 熱や温度が関与する現象を扱う。生物資源学類 1 年次では, 「化学」や秋学期の「物理学」で学ぶ[*4]。熱力学の三法則という法則（エネルギー保存則・エントロピー増大の法則・絶対エントロピーの法則）が基本法則だ。気体の状態方程式（温度・圧力・体積の関係）, 比熱, 化学反応の向き, 相転移（融解・蒸発等）, 電池の活性などは熱力学で解析できる。

熱力学は, 後述する量子力学と組み合わさって威力を発揮する。たとえば太陽が明るく光り, 光としてエネルギーを四方八方に放射するのは, 「物体はその温度に応じた波長と強さの光を放つ」という現象の実例であり, そのような現象を「熱放射」という。これは熱放射は地球温暖化に大きく関わる現象でもある。熱放射は熱力学と量子力学を組み合わせて説明できる。

電磁気学は, 電気や磁気が関与する現象を扱う。生物資源学類 1 年次では, 秋学期の「物理学」で学ぶ。マクスウェル方程式というのがその基本法則だ。中学校以来なじみ深い「オームの法則」は, 電磁気学と熱力学との境界に位置する法則である。身近な電気製品はもちろん電磁気学の対象だ。分子や原子の間で働く力の大部分は電磁気力なので, 物質の構造や性質を理解するためにも電磁気学は必要だ。空間の電磁気的な性質が波として伝わる現象が「電磁波」すなわち「光」だ。光を電磁気学的に解析する中で, 次に述べる相対論が生まれた。

相対論は, 大きな速さで運動する物体の運動に関する物理学である。電磁気学から導かれ, 実験的にも確かめられたこととして, 光速不変の原理, すなわち, **光は誰から見ても一定の速さで飛ぶ**, という事実がある。

これは実に驚くべきことであり, 「速さ」に関する我々の直感や日常経験に反するのだ。というのも, たとえば, 時速 100 km/h で走る自動車 A を, 時速 80 km/h で走る自動車 B が追いかけている場合, 自動車 B から見たら自動車 A は時速 20 km/h で遠ざかっていく。これは小学校で習うことだ。

ところが光の場合は違うのだ。真空中での光の速さ（光速）は, c =299792458 m/s という, 絶対に変わらない定数なのだ（従って c は物理学では極めて重要な定数であり, 様々な理論に顔を出す）。たとえば, 速さ c で宇

[*3] 古典力学とかニュートン力学ともいう。また, 力学を数学的に洗練した解析力学という分野もあるが, それは本書の対象外である。

[*4] 同じ対象を統計学の手法を使って解析する統計力学というのもあるが, 熱力学との区別は明瞭ではない。そこで, 両者を一緒にして「熱力学」とか「熱・統計力学」と呼ぶこともある。

宙を飛んでいく光を, 速さ $0.8c$ で追いかける宇宙船の中から見たら, 光は速さ $0.2c$ で遠ざかっていくのではないか?と我々には思えるが, 実はそうではなく, やはり速さ c で遠ざかっていくように見えるはずなのだ。

なぜそんな奇妙なことが起きるかというと, **どのような物体も**, **光より速く動くことはできない**のだ。そして, **高速で飛ぶ物体（宇宙船）にとっては**, **時間はゆっくり進む**のだ。そう考えると辻褄が合うのだ。また, その辻褄合わせの結果, もうひとつ, 著しい法則が見つかった。それは, 質量 m は, 次式で表されるエネルギー E を持っている, ということだ (c は光速):

$$E = mc^2 \tag{1.1}$$

これによると, 高校の化学で学ぶ「質量保存の法則」は, 厳密には成り立たない。物質の質量は, 物質の持つエネルギーによって増えたり減ったりするのだ。といっても, 普通の化学反応ではその変化は小さすぎて無視できる。しかし, 核分裂や核融合などの高エネルギー反応では, まさに原子の質量が減って, その結果として式 (1.1) に対応するエネルギーが解放される。それが核兵器や原子力発電などの原理である。

これらをまとめる理論を特殊相対論と呼ぶ。ニュートン力学は, 高速の現象では特殊相対論によって修正される。また, 特殊相対論を包含し, さらに万有引力（重力）を説明するものを一般相対論と呼ぶ。天文学には相対論が必要である。

相対論は本書ではこれ以上扱うことができないし, 大学 1 年生で改めて学ぶ授業もほとんど無いだろう。そのため, ここで少し詳しく述べた。特に, 上記の「光速不変の原理」と, 式 (1.1) は, 現代の市民の教養・常識として大切なものである。なぜなら, 現代物理学とそれを応用した科学技術は, これらが関係するものが多く, 大きなイノベーションの可能性を秘めると同時に, 巨大な予算や施設を必要とするものが多いからである。

量子力学は「量子論」とも言う。主に原子や分子といった極微のスケールの現象を説明する。生物資源学類 1 年次では, 秋学期の「化学」で少し出てくるだろう。「シュレーディンガー方程式」というのがよく出てくるが, 必ずしもそれは基本法則ではない。量子力学の基本法則は高度に抽象的・数学的で, 微積分・線形代数学（ベクトルや行列の理論）・複素数・確率などの考え方が複合的に活躍する。筑波大学の前身だった東京文理科大学で, 朝永振一郎教授がノーベル物理学賞をとったが, それは量子力学の一分野（量子電磁力学）を開いた功績によるものである。

量子力学は, 量子計算機や量子暗号通信など, 大きなイノベーションの可能性を秘めた, 先端技術の基礎である。従って, その基本的な概念を理解しておくことは（簡単ではないが）, 現代の市民の重要な教養である（本書第 14 章で触れる）。

量子力学や相対論を突き詰め, 原子よりもずっと小さい様々な粒子を発見し, それによって物質や力に関する様々な基本法則を統一的に理解しようとする物理学が素粒子物理学である。湯川秀樹, 南部陽一郎, 益川敏英, 小林誠, 小柴昌俊, 梶田隆章といった日本人物理学者がノーベル物理学賞を受賞したのはこの分野である。

● **問** 1　力学・熱力学・電磁気学の, それぞれの基本法則の名前を述べよ（内容はまだ理解しなくてよい)。

よくある質問 23　**さっきの「最初の問」で出てきた万有引力の法則はどの分野の基本法則ですか**? ... これは力学の基本法則と一緒にニュートンが発見したのですが, その後, 相対論から導出されることがわかりました。従って現在の物理学ではこれはもはや基本法則ではありません。しかし, これを相対論から導出するには高度な数学が必要であり, 本書の程度を大きく超えるので, 本書ではニュートン当時に戻って, これを力学の分野の基本法則とみなそうと思います。このように, 物理学は, 教育レベルや状況に応じて便宜的に「これは本当は基本法則ではないけれど, とりあえずこの場では基本法則とみなしましょう」という立場をとることがよくあります。そうしないで本当の基本法則に毎回戻っていたら, 話が際限なく長くなってしまうのです。

1.2　物理学は科学の基盤

これらの物理学は, 様々な科学の基盤になっている。

たとえば化学物質の構造や化学反応の仕組みは, 分子や原子の集合に物理学を当てはめることで理解できる。従って, 化学の理論は物理学に広く深く立脚している[*5]。その物理学的な理論を元に, 生体内の化学物質の様子を予測・説明できる。現代の薬学（創薬）はそのような手法に発展している。

[*5] 新入生は入学してまずここに驚くのだ。「化学の講義なのにほとんど物理学じゃん!!」「自分の好きで得意だった化学と違う!!」となるのだ。ついでに言えば, 「物理学の講義なのにほとんど数学じゃん!!」「統計学の講義なのにほとんど数学じゃん!!」というのも新入生にありがちな驚きである。

生物学はそのような化学の成果を使って, 生体内の化学反応を明らかにしている。それだけでなく, 生物学は物理学を直接必要とすることもある。たとえば鳥や魚の体の構造は, 彼らの運動能力や環境適応能力（暑さ・寒さ・乾燥等への対応）を最適化するように進化しているが, それを説明するのに力学や熱力学などの物理学は欠かせない。植物の光合成の様子を調べるのに, 植物が出す蛍光（クロロフィル蛍光）を使うが, それを説明するには量子力学が必要だ。生体内には様々な電気信号が発生し, それが刺激や情報を伝達する。それを外的に計測したり制御するには電磁気学が必要だ。

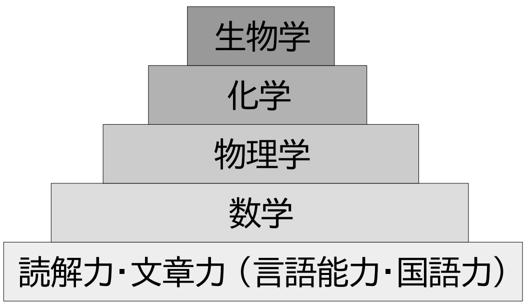

図 1.1　科学の階層構造。下の学問は上の学問を支える。

このように考えれば, ほとんどの科学は物理学に支えられていることがわかるだろう。その様子を図 1.1 に示す。物理学は数学に支えられ, 化学や生物学を支え, それらを応用する多くの科学を支えているのである。

それだけではない。これらの科学は, さらに様々な応用科学を支えており, 物理学はその根幹にあるのだ。

たとえば気象学は, 大気や海洋における空気や水の動きと, それに伴うエネルギーの動きを, 物理学, とくに主にニュートン力学と熱力学を使って予測する。それが天気予報の根幹である。

土木工学・建築工学は, 橋やダムやトンネルや建物を安全に設計し建造する。どのような部材をどのように組み立てればどのくらい強く安定するかは, 全て物理学（力学）に基づく計算で確認されている。川の水を安全に流したり, 津波や高潮から町を守るための堤防の設計は, 水の力学に基づいて行われる。

航空工学・船舶工学は, 飛行機や船を安全かつ効率よく流体（空気や水）の中で動かすために, 物理学を使って研究開発や設計を行う。

電子工学・材料工学は, 量子力学を使って, 物質内の電子や光などを高度に精密にコントロールすることで, 小さくて高性能な電子機器を作る。たとえば「半導体」はコンピュータの頭脳である集積回路（CPU）や記憶装置（DRAM）の元である。太陽電池は光を電気に変換できる。「発光ダイオード」は電気を高い効率で光に変換できる。「レーザー」は高品質で強力な光を生み出すことができる。中村修二・赤崎勇・天野浩の 3 人の日本人学者が 2004 年にノーベル物理学賞を受賞したのは, この発光ダイオードやレーザーに関する研究である。

原子力工学は, 原子核や中性子, 放射線などの物理学に立脚することで, 原子力エネルギーを安全に制御する。

地理学・地質学では, 火山噴火や地震の発生・伝播を, 岩石の物理学的な性質に基づいて研究する。地球の形や位置を GPS (Global Positioning System; 人工衛星からの電波によって, 地上の位置を高精度で計測するシステム）で測定する（カーナビでも使われている)。そこでは人工衛星の運動と, そこからやってくる電波の制御・解析に相対論が使われている。

医学では X 線や MRI （核磁気共鳴画像法）によって病気や怪我を診断するが, その原理は物理学, 特に量子力学である。超音波による胎児の診断は音波の物理学を精密に使うことで, 今や胎児の顔がくっきり見えるまで進化している。筑波大学病院の重粒子線治療は, 人体の他の部分に副作用を及ぼさずに腫瘍だけを攻撃できる技術だが, そこでは素粒子物理学が活躍している。

1.3　スポーツ・芸術・エンターテイメント等のための物理学

意識している人は少ないが, スポーツは物理学のカタマリである。テニスで速いサーブを打つには? サッカーでボールのスピードを上げるために芝に水を撒くのはなぜ? 相撲で小さな力士が大きな相手に押し負けられないようにするには? などなど, 多くの工夫やスキルは, 物理学の観点で裏付けできるし説明できる。だからスポーツ用品メーカーの開発部門はまるで物理学の研究室だ。アスリートも物理学がわかると, 他人のフォームやスキルの中の良いところに気付きやすくなるし, 自分の癖に気付いたり人からのアドバイスを理解したりもスムーズになるだろう。

芸術, 特に音楽も物理学に大いに関係ある。そもそも楽器は音波という物理現象を制御する装置である。良い音色を出す楽器の構造は? 気温や湿度で楽器のチューニングが狂うのはなぜ? 良い音でレコーディングするには

どんな工夫が必要? 野外ライブでは電源をどのように確保・配給すればいい? ノイズをカットするにはどういうことに気をつけて配線すべき? 音階が狂うのはなぜ? なども物理学で説明できる。だから音楽をやる人は, 物理学を学んで損は無い。

文学やエンターテイメント, 歴史, 経済, 文化などですら物理学と無関係ではない。夏目漱石の小説には物理学の話題が多く登場する。映画やゲームで使われるコンピュータ・グラフィクスは, 物理学の法則を用いて物体や光の動き・様子をコンピュータの中で計算して表現する。歴史や経済を理解するには, 社会を変革してきた技術イノベーションとその影響力を理解する必要があり, それには物理学の知識が欠かせない。火山噴火や氷河期といった地球科学的現象が気温や日照や利水に影響を与え, それが食糧難や社会不安につながることはよくあるが, その状況を理解・再現するには物理学的な手法が必要である。

そういうわけで, 物理学は実に多くのものごとの基盤なのだ。大学の多くの学部で物理学が重要な科目となっているのは, それが理由である。「私は○○に興味があるから物理学は関係ない」という考え方はとてもズレている。それは, サッカー選手や野球選手になりたいのに筋トレや走り込みは無用だと発言するのと同じくらい「わかってない」のだ。

● **問** 2　フランスの科学者パスツールは, 1848 年, 分子の光学異性体を発見した。そのとき彼は, 光の「偏光」という物理学現象を利用した。そのときの様子について調べ, 100〜400 字程度で述べよ。

よくある質問 24　**量子力学にとても興味があります。**... 量子力学は確かにすごい学問です。しかしそれを学ぶには, まずこの授業で扱うような力学から出発して, それなりに物理学と数学の「足腰」を鍛える必要があります。頑張って下さい。とりあえず今の皆さんにも読めるようなオススメの量子力学解説文を挙げておきます: 朝永振一郎著「鏡の中の物理学」(講談社) の中に掲載されている「光子の裁判」「素粒子は粒子であるか」

1.4　だまされないための物理学

ところで, 世の中には, オカルト的な科学がたくさんある。物理学は, そのようなものへの耐性を君に与えてくれる。

例 1.1　「マイナスイオン」というのが健康に良い, という話が社会に広まり, 「マイナスイオンを出す装置」なるものが開発・販売されている。そういうのを聞いて, 懐疑的に思うのが物理学だ。物理学には「電荷の保存則」という強い法則があり, それを否定する実験結果は見つかっていない。もし「マイナスイオン」を発生するなら, それを打ち消すプラスの電荷がどこかにあるはずで, それはどこに行っているのだ?

例 1.2　テレポーテーションやテレパシーという超能力に対しても, 物理学は懐疑的である。物理学では, 「いかなる物体も情報も, 光よりも速く移動することは無い」という強い法則 (相対性理論) がある。それを否定する事実を多くの物理学者が血眼になって探したが, いまだにひとつも見つかっていない。もし物体が瞬間的に遠くに移動したら, その法則が崩れてしまう。

例 1.3　水を凍らせる際に, 水にやさしい言葉をかけるときれいな氷の結晶ができる, という話がある。これも物理学は懐疑的である。物理学（熱力学）では, 物体の結晶成長に関する精密な理論ができており, 結晶のできる様子は温度や圧力, 湿度（過飽和度）, 不純物の存在などによって決まることがわかっている。

例 1.4　2003 年頃, あるカルト宗教が「スカラー電磁波」なるものから身をまもるために, あらゆるものに白い布を巻き付けるという行動に出たことがテレビで報道されたが, 物理を学んだ人は, 電磁波はベクトルの波であり, 「スカラー電磁波」などそもそも存在しないと知っている。（例おわり）

オカルト科学は, いかにも科学的な裏付けがありそうな言葉で, 科学が苦手な人をだます。彼らが物理っぽい言葉を特によく使うのは, 多くの人が物理が苦手だからだろう。我々は物理を理解して, オカルト科学にだまされにくくなろう。

● **問** 3　上に例示したオカルト的な科学の中から 1 つについてさらに深く調べ, 君はそれをどう思っていたか, 合計 200 字〜400 字程度で述べよ。特に思い入れがあるなら, 上記以外の例についてでも OK。

1.5　ものづくりや研究のための物理学

さて, 石だろうが紙だろうが生き物だろうが食べ物だろうが, 物を相手にする仕事には, 測ったり作ったりと

いうことが不可欠になる。測るということは, 対象の特徴を, 数値的な量に置き換えて表現することだ。その過程は物理学である。例えば溶液中の化学物質の濃度を測るには, 特定の波長の光がその溶液をどれだけ透過するかを調べるが, その原理は物理学である。

原理を知らなくても, 説明書（マニュアル）のとおりにやれば, とりあえず計測機械を使うことはできる。しかし, マニュアルを読みこなすには, 原理がわかっていないと大変だ。マニュアルは人が書いたものなので, ミスもあり得る。あるいは「こんなことはマニュアルに書くまでもないだろう」ということもあるだろう。

実験したり物を作ったりするには, 計測だけでなく「制御」も重要になる。例えば生き物を育てるときに, 温度や光, 湿度などの環境を一定に保つことは, しばしば必要になる。その原理も, 物理学である。物理学をきちんとわかっていれば, 高価な恒温槽などを買わなくても手近な材料や機械を組み合わせて, 適切な制御系を組むことができる。

このように, 計測も制御も, 多少なりとも機械が必要になる。機械は君の気持ちには無関係に, あくまでも物理学の法則に従って働くのだ。君が機械を手足のように自在に使いたいならば, 機械の気持ち, つまりは物理学を理解しなければならない。そのためには, 物理学実験を学ぶ必要がある。特に, 多くの機械は電気で動くから, 電気の知識は重要である。

1.6　危機管理のための物理学

さて, 社会にも人生にも危機（ピンチ）はある。生命を脅かすピンチの多くは物理的な現象である。交通事故, 飛行機の墜落, 船の沈没などはニュートン力学（とその応用である流体力学）である。特にこれから運転免許をとる諸君は, 車の構造や交通法規の背景に, たくさんの物理学があることを意識しよう。意味や仕組みがわかってこそ, ルールも守る気になるものだし, 結果的に安全な「カーライフ」を送ることにつながる。

自然災害 (津波や台風, 地震, 落雷, 火山噴火など）も, 多くは物理学 (地球物理学) で扱われる。落下や感電, 窒息なども物理現象である。これらを事前に予防したり, 対策したりするには, やはり物理学の考え方が重要だ。

家庭用電気製品は, 事故が起きないように, メーカーが慎重に設計・検証して作られるので, めったに事故は起きない。しかし, それでも老朽化すると故障するし, 事故が起こる。それを防ぐのは, 個人の判断であり, 管理である。それには機械の動作原理の理解, つまり物理学が必要である。

家電製品以外の機械, つまり研究・業務目的の機械は, 「プロ仕様」なので, 家電製品のような徹底した安全対策や検証はされていないのが普通である。専門的な中小企業が作ることが多いし品数が出ないので, そのような「素人向けの安全対策」までは手がまわらないのだ。従って, そのような機械を扱うときには, 慎重さと判断力, 熟練が必要で, それが, 多くの資格が必要な理由である。そういう資格試験の問題の多くは物理学である。

1.7　生物資源学類と物理学

生物資源学類の扱うテーマにも物理学は深く関わっている。たとえば前述のように, 生物の機能や構造を理解するには物理学は必須だ。昆虫が固い殻（外骨格）を持っていることには, 物理学的な理由がある。植物は光合成で獲得した炭素を, 根・幹・葉・生殖器官に最適に分配しているが, その戦略は, 物理学的な事情（根から水を効率的に吸い上げる・風などの外力で倒れたり折れたりしない・多くの光を葉に受ける・種子を風に乗せて遠くに飛ばすなど）で決まる。

農業の効率化に灌漑施設や農業施設, 農業機械は不可欠だが, それらを低コストで効率よく働かせるには, 物理的に最適な設計と配置が必要だ。乾燥地農業で塩類集積が問題になるが, あれを予測・制御するには土壌水分と塩類の移動を物理学でモデル化する必要がある。

食品の保存や加工, 微生物の培養, 作物や家畜の育成管理には温度・湿度環境の制御が必要で, それには物理学が必要である。家畜を逃がさない為, そして野生動物を侵入させない為に, 牧場や農場のまわりに電気柵を張り巡らすが, それを安全に扱うには電気の知識（結局は物理学）が必要だ。地域で伝統的に行われている農法や漁法（霞ヶ浦の帆引き船など）には, 物理学的に理にかなった工夫が随所にある。そういうのを理解しないと, 伝統の継承や発展は難しい。

地球環境を保全するには, 人工衛星で地球を観測する必要があるが, そこでは衛星の軌道制御や観測装置の設計などで, 膨大な物理学的知識が使われている。土砂災害を防ぐには, 地すべりや土石流の発生と移動を予測し制御する必要があるが, その中心は物理学だ。物理学を駆使して, 起き得る災害を正確に予測できれば, コンパ

クトで効率的なダムや堤防を作ることができ, 経費の節約や環境保全になる。

● **問** 4　以下の課題において, 物理学はどのように役立つか?
(1) 森林の伐採と伐採木の搬出における安全性と作業効率の両立。(2) 野菜・果樹の遅霜被害への低コストで効果的な対策。

1.8　物理学はコスパが良い

以上のように, 物理学はあらゆる場面に登場する。しかし, 仕事や研究の個々の場面では, 物理学の法則まで立ち返って検討したりしなくても, 既にマニュアルやノウハウや慣例が存在し, それに従えばやりすごせるものである。そこで, 若い人の多くは, 「物理学なんか学ぶよりも, 実用的な技術を身につける方が楽だし意味がある」と思うものである。

ところが, そういう人も歳をとってくると, 「若い時に物理学をもっと勉強すればよかった...」と嘆くものである。科学や技術の進歩は速い。若い時に得た知識・技術の多くはやがて陳腐化するので, 人は歳をとっても学び続けねばならない。しかしニュートン力学やマクスウェル方程式は高度に確立・完成された体系なので, ほとんど陳腐化しないだろう。それらはいつの時代でも, 未解決の問題や困難に取り組むときに役立つツールなのだ。そういう意味で, 物理学は大変に「コスパの良い」学問である。学ぶ努力に対する見返りが大きい。それも物理学が多くの学部で教えられる理由である。

よくある質問 25　**将来も陳腐化しないって, なんでわかるのですか?** ... 何十年も前の昔の物理学の教科書を見て下さい。今の教科書と内容はほとんど同じです。書き方や説明法は変わっても, 本質は変わらないのです。生物学のような発展中の学問と違って, 物理学のある部分はもうほとんど変わりようがないくらいに完成・確立しているのです。

よくある質問 26　**もう発展しようが無い学問なのですか? それってつまらなくないですか?** ... 物理学の発展中の部分はもっと別のところにあります。我々は物理学の完成された部分を学び, それを役立てることに頭を使えばよいのです。

● **問** 5　君の将来やりたい研究・職業に, 物理学はどのように関わってくるだろうか? 君自身の考えを論じよ。

● **問** 6　科学には負の面もある。過去, 物理学が軍事に利用された事例を 2 つ以上挙げ, それぞれ 300 字程度で説明せよ。

1.9　法則・原理・定義・公理・定理

これから, 物理学の基本的な「考え方」を説明していく。まず, 法則・原理・定義・公理・定理などの言葉の意味を確認しておこう。

<u>法則</u> ... 自然現象や社会現象の中に見られるルール。物理学・化学・生物学・経済学などで使う。数学ではほとんど使わない。例：万有引力の法則

<u>原理</u> ... 法則と同じようなもの。ただし, 法則の中でも, より根源的なもの（基本法則に近いもの）を原理と呼ぶ傾向がある。例：アルキメデスの原理

<u>定義</u> ... 言葉の意味を定めること。

<u>公理</u> ... 定義と同じようなもの。主に数学で使う。言葉の意味を定めるだけでなく, そのようなものが存在することを認めよう, という立場も示す。例：ユークリッド幾何学の公理

<u>定理</u> ... 公理や他の定理から論理的に導かれること。主に数学で使う。定理の中で, いまいち影が薄いものを, 補題と呼ぶ。例：三平方の定理

さて, 法則 A と法則 B があって, 法則 A で説明できることはすべて法則 B でも説明され, なおかつ, 法則 A では説明できないが法則 B で説明できるようなこともあるような場合, 法則 B は法則 A より<u>一般性が高い</u>, という。そのような場合は, たいてい, 法則 A は法則 B の特別なケースであり, 法則 B から法則 A を論理的に導出することができる[*6]。

科学は, より一般性の高い法則を見出すことを目指す。最も一般性の高い法則（つまり根源的な法則）を<u>基本法則</u>とか<u>第一原理</u>と呼ぶ。しかし, 基本法則は抽象的なので, 実際には使いづらいこともある。そこで, 具体的によくある状況に限定して基本法則を変形することで, 「適用範囲は狭いが扱いは簡単」な法則が派生的に生まれる。しかし, そのような「派生的法則」は無数にあって, きりがない。それに, それぞれの「適用範囲」を覚えて判断するのが面倒くさい。

派生的法則の例として, 一定の力を受けて直線上を動く点の位置や速度を表す公式がある（高校物理を習った

[*6] ところが, 科学というのはおもしろいもので, 法則 B から論理的に導かれる法則 A のほうが一般性が高いということも, たまにある。例えば「力学的エネルギー保存則」という法則は運動の三法則から導かれるが, 「エネルギー保存則」は力学の範囲を超えて普遍的に成り立つ法則でもある。

人なら覚えているだろう, $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ というやつだ)。この法則（公式）は, 力が変化する状況では成立しない。それがなぜなのか, とか, その代わりに何を使えばよいのか, などを理解するには, 運動方程式という基本法則と, それを記述する数学（微積分学）に戻らないとダメである。

君は, 多くの法則をばらばらに覚えるのではなく, 何が基本法則で, そこからどのような条件でどのような派生法則が生じるのか, といった体系性を意識して学ぼう。

次に, オッカムの剃刀[*7]という考え方を説明する。これは, 基本法則として, 複数の候補があったとき, それらが同程度に有効であるなら, より単純なほうが正しい, という考え方である。それは必ずしも常に正しい考え方とは言えないが, 物理学（と多くの科学）は「無矛盾さ」の次に「シンプルさ」を求める傾向にある, ということは覚えておこう。

● **問** 7　オッカムの剃刀とは何か?

1.10　洞窟の影の比喩

物理学に限らず, 学問や教育についてしばしば使われる話に, 古代ギリシアの哲学者プラトンの著作に出てくる, 洞窟の影の比喩というものがある。これは特に物理学についてよく当てはまる話なので, ここで説明しておく。高校の倫理などで学んだ人もいるだろう。

プラトンの師匠であるソクラテスが, 教育について友人と議論しているときに持ち出したたとえ話である: 洞窟の奥深くに囚人たちが囚われている。彼らは生まれてからずっとそこに繋がれており, しかも洞窟の奥の壁しか見ることができない。彼らの背後には火が焚かれており, その火の明かりを使って, 彼らが見ている壁に向けて, 影絵が映し出され続ける。その中には人や乗り物や動物の影絵がある。囚人たちは, その影絵がそれらの実体だと思いこんでいる。

ところがあるとき, 一人の囚人が背後を見ることができ, それが影絵であったことを知る。さらに彼は抑留を解いて洞窟の出口まで這い上がり, 外の世界を見て, 囚人たちが実体だと思いこんでいた影や, そのもとになっていた影絵よりも本質的な世界を知る。

この比喩の囚人たちは我々多くの人間であり, 我々は普段, 物事や世界を知って理解しているような気になっているが, 実はそれは影絵のような断片的な側面にすぎない。真実を知るのは大変に難しいし勇気がいる。それを促すのが教育であるとソクラテスは述べているのである。

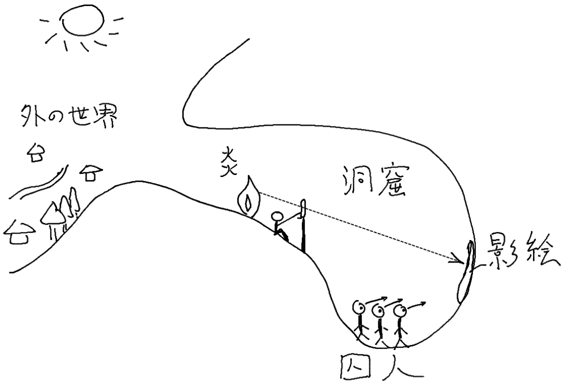

図 1.2　洞窟の影の比喩

物理学は, まさしくこのような営みである。我々が日常経験している現象は影絵のようなものである。我々は影絵をたくさん見るように日常経験をたくさんすることで、世の中の現象を理解した気になっている。ところが真実はそこにはないのである。物理を学べば学ぶほど, 日常経験だけでは理解できない抽象的な形で物理の法則があり, それの持つ説得力や予測能力を実感することで, 自然現象の本質について知るのである。

1.11　科学にはモデル化が欠かせない

さて, 我々はこれから, 力と物体の運動に関する法則を学ぶのだが, まず, 質量という概念を受け入れよう。質量とは, 物体の根源的な属性（物体を特徴付ける性質）のひとつであり, 「どうやらそういうものが存在するらしい」と受け入れるしかない。質量とは何か・質量はなぜ存在するのかを執拗に探求する物理学者達の熱い戦いはまだ続いているが, それは彼らに任せて, 我々は先に進む。感覚的には, 質量は物体の重さとか物体の「動かしにくさ」に関係するような性質である。

次に, 質点という概念を定義しよう: 質点とは, 質量は持つが大きさは持たない, 点状の仮想的（理想的）な物体である。

現実の物体は大きさや形を持つのだが, 大きさや形を考えると, 物体に働く力がややこしくなるのだ。例えば, 大きな物体の各部位に働く力がまちまちだったりすると, 物体全体に働く力はもうわけがわからぬ, ということになる。そこでとりあえず, 質点とみなせるくらい小

[*7] 剃刀は「カミソリ」と読む。

さな物体に働く力を考える。そうやってひとまず大きさや形といった属性を切り捨てることで, 次節以降に述べる諸々の力の法則や, いずれ学ぶ「運動の三法則」という単純かつ強力な法則を見出すことができたのだ。

このように, 現実のものや現象を単純化・抽象化してとらえ直し, 扱いやすくした近似的概念をモデル（模型）と呼ぶ。質点は, 物体のひとつのモデルである。現象をモデルにすることをモデル化という。

なら質点は空想の産物, 机上の空論に過ぎないのかというと, そうでもない。現実の中には, 物体の大きさや形を近似的に無視できるような現象がたくさんあり, そのような場面では, 質点の議論がほとんどそのまま成り立つ。物体の大きさや形が無視できなくても, 質点としての考察は議論の出発点として役立つことが多い。

例 1.5　野球ボールは, ある場合は質点とみなせる。たとえばボールを初速 80 km/h で斜め 45 度の角度で地上から空に投げるとどこまで遠く飛ぶか? のような問題では, ボールは質点とみなしてもほぼ差し支えない。

どうしても大きさや形を考慮すべき状況では, 質点の集合（それを質点系という）として物体をモデル化するのである。そうして, 質点の理論に持ち込むのである[*8]（図 1.3）。

例 1.6　野球のボールは, 微妙な運動, 特にボールの回転が重要であるような運動では, 質点とみなしてはダメである。例えば, カーブやシュートなどの変化球は, ボールが回転することで周囲の空気に乱れを生じさせ, それによってボールが受ける力が変化することで起きるため, ボールの形・大きさを無視できない。このような場合は, ボールは質点系としてモデル化すべきである。

● **問** 8　(1) モデルとは何か? (2) 質点とは何か?

● **問** 9　「物体」と「物質」という言葉を混同する（というか区別せずに使う）学生がちょいちょいいる。
(1)「物体」と「物質」はどう違うか? （わからなければ辞書を引こう!）
(2) 英語ではそれぞれどう呼ぶか?

モデルは科学の随所にある。たとえば化学でいずれ学ぶ「理想気体」は現実の気体のモデルのひとつである。

現実の現象や物体は往々にして複雑だが, それを複雑

[*8] その場合は, 後述するように, 角運動量や慣性モーメントといった概念が必要になる。

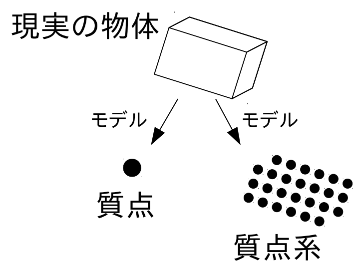

図 1.3　物体のモデル。大きさと形を無視できる場合は質点。そうでなければ質点系としてモデル化する。質点系では質点間に働く力も考える。そうすることで物体がバラバラにならないように理論化できる。

なままで見ているだけでは, 仕組みはわからない。人間のしょぼい知性では複雑なものを理解できないのだ。しかし複雑さをばっさり切り捨てて, 単純な状況に限定すると, 自然の仕組みは人間ごときにも理解できることがある。だからモデルが必要なのだ。モデルの力を借りて科学は進歩してきた。

ところが, いったん出来上がった科学を学ぶ我々は, 恩あるモデルの存在を忘れ, モデルに限って成り立つ法則が, 現実の複雑な現象にそのまま全面的に成り立つと勘違いしがちである。これは大変危険なことである。

例 1.7　君は小学校で振り子を習っただろう。そこで振り子の周期は振れ幅に依存しない, と習ったはずだ。これを振り子の等時性という。ところが, 振り子の等時性は, 振り子の振れの角が十分に小さいという単純なモデルについてのみ成り立つ近似的・限定的な性質である。振れの角が大きくなれば, 等時性は成り立たない。実際, 振れの角が 60 度になれば周期は 7 パーセント程度長くなることがわかっている。ちなみにこの「ずれ」は, 物理学と数学の理論で説明できる。

君はこれから学ぶ科学の様々な事柄に対して, それがどのような限定の中で成り立つかを注意深く理解しなければならない。そのためには, 法則や理論の結論だけを丸飲みするのではなく, その理論の成立する過程をきちんと理解し, それが現実の中の何をモデル化しているのか理解しなければならない。

1.12　系は世界を単純化・モデル化したもの

科学, 特に物理学では, 問題を扱う時に, 問題の設定そのものもモデル化する。

たとえば例 1.5 のような問題では, ボール, ボールを投げる人, ボールの飛ぶ空間, 地面, ボールに働く重力

（のもとである地球），という 5 つの存在だけを取り出し, 他の全てを世界から消し去って考える。そして, 野球ボールは質点とみなし, ボールを投げる人はボールを投げることだけを行う機械のようにみなし, 空間は空気抵抗を及ぼすような空気の無い空間とみなし[*9], 地面は少なくともボールの飛んでくる範囲では水平とみなし, 野球ボールに働く重力は野球ボールの飛んでいる間は場所や高さによらず一定の大きさで鉛直下向きに働くものとみなす。

このように, 問題にほとんど関係無いと思われる事柄をばっさり無視し, そして関係あるものもできるだけ単純化・モデル化して, 究極まで単純化された世界を仮想的に考える。

実際は世界にはもっとたくさんの物体があるし, たくさんの力もあるし, いろんなことが起き得るものだが, とりあえずそれらはこの問題には（ほとんど）無関係だから無視する。たとえば野球ボールが飛んでいる間に地面に地すべりが起きて, 地形が変わったりする, みたいなことは, 問題に影響あるかもしれないが, あまりにも特殊すぎる事情なので無視する[*10]。

このように, 世界の中のごく一部だけを限定的に切り出して単純化し, それ以外のすべてのものを無視した状況設定を, 系 (system) という。それは, 言ってみれば, 当面の問題や議論のためだけに極限まで単純化された「世界のモデル」である。前節で「質点系」という言葉が出てきたが, その中の「系」の意味はこれである。

系という言葉は, 本書では今後, たくさん出てくるし, 化学などでもよく出てくるので, よく理解しておこう!

● **問** 10　系とは何か?

1.13　概算

「モデル化」に似た考え方に概算がある。物理学は現象を定量的に予測・把握する能力があるのだが, その一方で, あんまり精密なことは考えず, 細かいことを切り落として, おおざっぱにざっくり推定することもよく行う。それが「概算」である。

概算は物理学に限らず有用なスキルである。基本的ないくつかの数字と, 各分野における基本法則, そして常識と少しの数学（特に対数や近似）を使いこなすことで, 多くのことを概算できる。

例えば， 2018 年現在, 日本政府の債務（赤字, つまり借金）の額は, 約 1000 兆円である。15 桁にもおよぶ金額だが, 多くの国民にとって, まず重要なのは, その 15 桁の全ての数字なのではなく, 15 桁という桁数, すなわち「規模」である。

ところが多くの人は「1000 兆円なんて大きすぎてピンと来ない」と言う。高等教育を受ける人がそんなことを言ってはならない。想像しにくい規模の数を想像するには,「〜〜あたり」という視点に立てばよい。膨大な額の借金も, 国民のひとりあたりの借金に換算すれば, 想像しやすくなるだろう。日本の人口は約 1 億人だから, 1000 兆円÷ 1 億人で, 1000 万円/人, つまりひとりあたり 1000 万円である[*11]。こんな調子で, 「だいたい」でいいから, 何らかの数値をぱっと出すのが概算である。

よくある質問 27　**概算はどこまでアバウトでいいのですか**?
...　一概には言えませんが, ± 50 パーセント程度でいいのでは。

● **問** 11　ある人の息子が,「僕は将来, サッカー選手になりたい」と言う。その夢を応援するためには, 親としては, それがどれだけ厳しい戦いになるかを知っておかねばなるまい。
(1) 日本のサッカーのプロリーグ（J リーグ; J1, J2, J3 をあわせて）には, 約 50 チームがある。各チームに選手は 30 人いるとして, 日本のプロサッカー選手の人数を概算せよ。
(2) サッカー選手の選手寿命は短い。平均 5 年で引退すると考えて, J リーグで 1 年間に引退するサッカー選手の総数を概算せよ。それが, 1 年間に新たにサッカー選手になれる人数だろう。
(3) 一方, 小学校 1 学年には, 何人の男の子がいるだろうか? 少子化とかは無視して, 日本の人口を 1 億人, 平均寿命を 100 年として概算せよ。
(4) 一学年の男子のうち, 何人に一人が, 夢をかなえてサッカー選手になれるのだろうか?

● **問** 12　2018 年現在, 日本の年間の国家予算は約 100 兆円である。また, 日本から国際連合（国連）への年間の拠出金額は約 240 億円である。これらの数字を, (1)

[*9] 空気抵抗を考える場合もある。
[*10] ただし, こうやって無視しまくったことの中に, 本当は無視してはいけないものがあるかもしれない。それがモデル化の怖いところだ。原発の安全性を考える時, 大きな津波が来るかも, という可能性を無視してモデル化すると, それ以後の計算や解析がどんなに正確であっても, 実際に大津波が来たときに備えることはできない。
[*11] 信じられない, これは誤植ではないか? と思う人は, 自分で調べてみたらよい。

政府の借金に比べてどのくらいの大きさか? (2) 国民ひとりあたりいくらか? という, 2 つの観点で, 概算で評価せよ。有効数字は 1〜2 桁でよい。

● **問** 13　日本の平均年間降水量は 1500 mm 程度である。一方, 日本では, 水田 1 m^2 あたり, 500 g 程度の米がとれる。一方, 米 1 kg の生産には 3000 kg の水が必要とされる。日本では, 水田に降る雨だけで, この水量をまかなうことはできるか?

1.14　解答

以下, 解答が無い問題は, 解答が略されている。***は解答の一部をわざと隠すための伏せ字である。

答 1 力学の基本法則: ***の法則・**方程式・***の法則。***の法則を加えることもある。熱力学の三法則: 熱力学第 1 法則（***保存則）・熱力学第 2 法則（***増大の法則）・熱力学第 3 法則（絶対***の法則）。電磁気学の基本法則: ***方程式[*12]。

答 7 ***として, ***の***があったとき, それらが***に有効であるなら, より***なほうが正しいだろう, という考え方。

答 8 (1) 現実のものや（... 中略...）した近似的概念。(2) 物体のモデルのひとつであり, （... 中略...）な物体。

答 11 （略解) (4) 千〜2 千人にひとり。

答 12 （略解) (2) 年間国家予算はひとりあたり 100 万円程度。年間国連拠出金はひとりあたり 250 円程度。

答 13 （略解) なんとか雨だけで足りる（計算上は)[*13]。

[*12] それぞれの基本法則は, 別の形で言い換えることもできる。

[*13] 現実は, もっと難しいことがいっぱいあるので, ほとんどの水田で灌漑が必要です。

第2章

力の基本

2.1 力とは何か?

小学校以来, 理科には何回も **「力」** が出てきたが, 諸君は力とは何か, わかっているだろうか?

有名な国語辞典である「広辞苑」(第六版電子版) では, 力は以下のように説明されている:

(1) 自らの体や他の物を動かし得る, 筋肉の働き。(後略)

(2) 気力。精神力。根気。(後略)

(3) 能力。力量。実力。(後略)

...

(8) [理] 静止している物体に運動を起こし, また, 動いている物体の速度を変えようとする作用。(後略)

科学でいう力は (8) である[*1]。(1), (2), (3) は科学でいう力とは違うものである。ところがこれらを混同している人が多い。(1), (2), (3) は日常でよく使われており, その印象に引きずられて, 科学でいう「力」もそのようなものだと思い込んでしまうのだろう。余談だが, 力とエネルギーを混同している人も多い。後述するが, **力とエネルギーは**, **明確に別物**である。「エネルギー」も日常でよく出てくるし, 上の (1)(2)(3) のような印象が日常的な「エネルギー」という言葉にあるからだろう。

ちゃんと「学問する」ためには, こういう「言葉の意味」に細心の注意が必要だ。「言葉の定義にこだわる」のだ。日常の言葉と科学の言葉をきっちり区別するのだ。さもないと, 日常の言葉の印象や, それっぽい文字づらの印象に誘導されて, 誤解したまま「わかったつもり」になってしまい, 緻密な議論や思考ができず, わけわからなくなってしまうのだ。

*1 ただし, (8) の中の「作用」という語には要注意だ。物理学では「作用」は力とは別の概念として定義されている。もし私が辞書の編者だったら, ここで作用という言葉は混同の恐れがあるので使わない。

● **問** 14　君は, 今まで「力」をどう理解・認識していたか? 科学的に正確に理解していたといえるか? そうであれば, それはどのようなきっかけでそうなったか? 正確に理解してはいなかったなら, なぜそうだったのか?

さて, 「広辞苑の (8) の説明を読んでもよくわからない」という人もいるだろう。当然である。これを理解するには, 「運動」とか「速度」などを定義する必要があるし, いろんな事例や観点について考えて納得していく必要があるからだ。それはおいおい学ぶとして, とりあえずこの (8) は, 第 5 章で詳述する「運動方程式」を部分的に述べたものである。ざっくりいうと**力は質量と加速度の積に等しい**, という法則である（その「意味」は第 5 章で学ぶ)。例えば, 質量 2 kg の物体が 3 $\mathrm{m\ s^{-2}}$ の加速度で動くとき, その物体にかかる力は, 2 kg×3 $\mathrm{m\ s^{-2}}$=6 $\mathrm{kg\ m\ s^{-2}}$ である。

ここで「$\mathrm{kg\ m\ s^{-2}}$」という不思議な単位が出てきたが, まさにこれこそが力を表す単位（のひとつ）である。この「$\mathrm{kg\ m\ s^{-2}}$」には N（ニュートン） という名前（いわばニックネーム）がついている。つまり, N=$\mathrm{kg\ m\ s^{-2}}$ である。である。「質量 2 kg の物体に 3 $\mathrm{m\ s^{-2}}$ の加速度を与えるような力」は 6 N である。

一言でまとめると, 力は, 運動方程式に登場して, 物体の速度を変えるような物理量, あるいは（同じことだが）物体の速度が変わる時に発生しているはずの物理量である[*2]。

よくある質問 28　加速度って何ですか? ... 微小時間における速度の変化量をその微小時間で割ったもの（速度を時刻で微分したもの）です。数学の教科書を見て下さい。

よくある質問 29　なぜ質量と加速度をかけると力になるのですか? ... その答は誰も知りません。なぜだかわからないけど,

*2 この文は本当は「速度」よりも「運動量」のほうが適しているのだが, 今の学習段階ではとりあえず「速度」でもよいだろう。

世界はそのようにできているのです。そのように解釈すると，全てがつじつまが合うのです。

よくある質問 30　よくわからないです。質量は質量，加速度は加速度ですよね。なぜ力が関係するのですか? ... よくわからないですよね。だからこの法則（運動方程式）は，人類発生以来，何千年も何万年もの間，未知だったのです。それをニュートンという天才が，ティコブラーエとケプラーという偉大な天文学者の研究を踏み台にして，発見したのです。

よくある質問 31　力って，本当に存在するのですか? 目に見えないのでイマイチわかりません ... 力というものが「本当に存在するかどうか」は，実はどうでもよいのです。「力」が実在すると考えれば，宇宙の法則が矛盾なく簡潔に整理できるのです。それが「力」の実在性の保証です。「そう考えれば全てつじつまが合う」というのが，物理学で認められる説得力であり，正しさであり，実在性なのです。

よくある質問 32　N（ニュートン）の定義がわかったようなわからないような... ... $\mathrm{kg\ m\ s^{-2}}$ です。ただそれだけです。

● 問 15　質量 2.0 kg の質点に，3.0 N の力をかける。質点に生じる加速度の大きさを求めよ。ただし基本法則に基づいて根拠もきちんと述べること。

● 問 16　質量 1 g の物体を $1\ \mathrm{cm\ s^{-2}}$ の加速度で動かす力の大きさを 1 dyn という（dyn はダインと読む）。1.0 dyn を N 単位で書き換えよ。

2.2　4 つの基本的な力

自然界には様々な力が存在するが，根源的には以下の 4 つのどれかに帰着されるということが，物理学者達の長い苦闘の末に明らかになっている:

- 万有引力
- 電磁気力
- 強い力（核力など）
- 弱い力（ベータ崩壊など）

その他の力，たとえば摩擦力やバネの力などは，いずれもこれらから派生する。つまりどのような力も元をたどればこの 4 つの基本的な力で説明できるのだ。

実は，我々の身近な現象に関わる力は，ほとんどが「万有引力」か「電磁気力」だ。従って，大学 1 年生の物理学に出てくる力は，ほぼほぼ万有引力と電磁気力である。

とはいえ，その他の力も我々に無関係というわけでもないので，ここで少しだけ説明しておこう。

「強い力」「弱い力」は「万有引力」や「電磁気力」と同じように，それ自体で科学的専門用語である。何かの基準よりも強い（または弱い）力を指すのではない。

「強い力」は原子核の中で陽子や中性子を同居させる力である。そもそも陽子は電磁気力によってお互いに反発する性質がある（陽子と中性子や，中性子どうしにはそういう反発力は無い）。ところが水素以外の原子では，原子核の中に複数の陽子が存在する。互いに反発しあうはずの複数の陽子が原子核という狭い空間で同居しているのだから，別の力がそれらを束ねているはずだ。それが「強い力」である。

「弱い力」は放射性元素が関与する現象，特に，原子核の「ベータ崩壊」（陽子が陽電子とニュートリノを発して中性子に変わることなど）で働く。

例 2.1　原子力発電所の事故で漏れ出した放射性セシウム $^{137}\mathrm{Cs}$ の原子核は，ベータ崩壊して放射性バリウム $^{137}\mathrm{Ba}$ の原子核に変わる。

例 2.2　放射性炭素 $^{14}\mathrm{C}$ は，ベータ崩壊して窒素 $^{14}\mathrm{N}$ に変わる。この現象は，考古学などで，過去の生物遺体の年代測定（それがいつ頃できたものかを推定すること）に使われる。

● 問 17　自然界の根源的な 4 つの力とは何か?

2.3　力の一般的な性質

個々の力について具体的に学ぶ前に，まず力の一般的な性質について学んでおこう。ここで述べるのは，その力が何であっても例外なく成り立つようなことだ。なお，以後しばらく「物体」は質点と同義語と考えて欲しい。物体の大きさや形を考えねばならないときは，逐次そのように言及する。

- 力には大きさと向きがある。つまり力はベクトルである。
- ベクトルの数学に基づいて，複数の力を足し合わせたりひとつの力を複数の力に分解して考えてもよい。特に，ある物体に複数の力が働く場合，結果的にはその物体には，それらの力をベクトルとして足し算したもの，すなわち<u>合力</u>のみが働くと考えてよい。
- 物体に働く力（合力）がゼロであるとき（これを

力のつりあい という）, 静止している物体は静止し続ける[*3]。これは後に述べる「慣性の法則」の特殊な場合だ。
- 2 つの物体 A, B において A が B に力を及ぼすとき, それと同じ大きさで逆向きの力を B が A に及ぼす。これを作用・反作用の法則という。

よくある間違い 1　**作用・反作用の法則とは? と聞かれて,「物体 A が物体 B に作用をおよぼすとき, ...」のように答える**... 「力」を「作用」と言い換えてはダメです。以前に注釈でも述べましたが, 物理学では「作用」は別の意味を表す言葉です。

よくある質問 33　**ではなぜ「作用」・反「作用」の法則というのですか**? ... わかりません。私はこの名前は失敗だと思います（笑）。でも慣習だから仕方ありません（泣）。

ではこれから, 具体的な力について学んでいく。

2.4　質量どうしが引き合う万有引力

万有引力は, 質量を持つ物体に働く力である。質量 M と質量 m をそれぞれ持つ 2 つの質点が距離 r だけ離れていれば, その間に, お互いが引っ張る向きの力が生じる（なぜだかわからないが, そういうふうに世界はできている）。その力の大きさ F は以下の式を満たす（なぜだかわからないが, そういうふうに世界はできている）:

万有引力の法則

$$F = \frac{GMm}{r^2} \tag{2.1}$$

これが万有引力だ。ここで, G は万有引力定数と呼ばれる定数で, 以下の値である（なぜだかわからないが, そういうふうに世界はできている）:

$$G = 6.6741 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\ s^{-2}\ kg^{-1}} \tag{2.2}$$

G の値は記憶しなくてもよいが, 式 (2.1) は記憶せよ。

式 (2.1) は, 英国の物理学者アイザック・ニュートンが発見した。どうやって? 惑星の運行を説明するためにいろいろな数式を試行錯誤したのだ。ニュートンだけでなく, ガリレオ, ティコ・ブラーエ, ケプラー等の学者を含めた, 長い苦闘の成果である[*4]。

この式よりもさらに万有引力を一般的に説明する理論が「一般相対性理論」である。しかし一般相対性理論は学類 1 年生には手に負えない理論なので, 我々は式 (2.1) を万有引力の基本法則（根源的な法則）とみなそう。

ところで質量とはそもそも何だろうか? それは物体に万有引力を生じさせるような, 物体の属性である。では万有引力とは何か? それは質量を持つ物体どうしに働く力だ。この議論は循環論法だ。質量を定義するのに万有引力の概念が必要で, 万有引力を定義するのに質量の概念が必要だ! こうして見ると, 世の中は全てが論理的にすっきり説明できるものではなく, どこかで「そういうものがあるのだ」と認めねば話がはじまらない。というわけで, 物体を特徴づける量として質量というものが存在する, ということを天下りに認めよう[*5]。

前節で学んだ作用・反作用の法則のために, 質量 M の物体が質量 m の物体を引く力と, その逆, つまり質量 m の物体が質量 M の物体を引く力は, 互いに向きは逆だが, 大きさは同じだ。質量の大きな物体が質量の小さな物体を引く力は, 質量の小さな物体が質量の大きな物体を引く力と同じ大きさなのだ。

さて, 万有引力が最も活躍するのは, 天体現象だ。星は, 万有引力によって物を引きつける。万有引力の法則, すなわち式 (2.1) に関しては, 地球を含めて

球状の星は, その中心に質量が集中しているとみなして扱える。　(2.3)

ことがわかっている[*6]。たとえば地球の表面に立つ質量 m の君に地球が及ぼす万有引力を考えるとき, ざっくり言って, M として地球の質量を, r として地球の半径を考えればよい。

● **問** 18　地球の半径を $r = 6400$ km, 地球の質量を $M = 6.0 \times 10^{24}$ kg とする。地表において質量 $m = 1.0$ kg の物体が受ける, 地球からの万有引力が, 9.8 N であることを示せ（有効数字 2 桁でよい）。ヒント: 単位を埋め込んで計算しないと失敗するよ!

よくある質問 34　**万有引力はどんな物体の間にもはたらいているのですか?例えば人と人の間とか。**... 質量を持つ物体な

[*3] 静止とはとりあえず「位置を変えないこと」と思っておいてほしい。

[*4] ニュートンはこれを発見した時, 腺ペストという感染症の大流行のためにロンドンの大学キャンパスを離れて実家に戻っていた。たっぷり暇があったのでいくらでも研究ができたのだろう。

[*5] 質量は万有引力とは無関係に, 「慣性の大きさ」という面もある。

[*6] ただし星の密度は球対称であること。なお, この事実は万有引力の法則をもとに数学的に証明されることだが, ここではその詳細は述べない。気になる人は, まず大学の数学をしっかり勉強しよう。

らどんな物体の間にも働いています。もちろん人と人の間にも働いていますよ。

2.5 重力と重力加速度

万有引力については前節で述べたことが全てなのだが, 実際に地球上に住む我々にとって, それをどう扱うかについては, 気をつけるべきことがいくつかある。本節ではそれについて述べる。

地球の表面付近にある物体は, 万有引力によって地球から引っ張られている。それだけではなく, 地球の回転（自転）による遠心力（後述）なども受けている。これらはいずれも, 物体の質量に比例する。そこで, これらを含めて, 地球（または他の天体）の周辺において物体の質量に比例して働く力の合力を重力と呼ぶ。

重力の大きさを F とし, 質量を m とすると, 何らかの比例係数 g を用いて,

$$F = mg \tag{2.4}$$

と書ける。このときの g, すなわち

$$g = F/m \tag{2.5}$$

を重力加速度と定義する。以後, しばらくこの g について考えよう。

まず, なぜ g の呼び方に「加速度」という言葉がついているだろう? それは, g の次元を考えればわかる。さきほど学んだように, F の SI 単位は N（ニュートン; kg m s^{-2}）, m の SI 単位は kg なので, g すなわち F/m の SI 単位は, kg m s^{-2}/kg = m s^{-2}。従って, g は, 加速度の次元を持つのだ。

次に, g の値がどのように決まるか考えよう。m を地表の物体の質量, M を地球の質量とする。地球中心から地表までの距離（つまり地球半径）を r とする。これを「地球（の中心）から物体までの距離」としてよいだろう。従って, 地表の物体が地球から受ける重力の大きさ F は, 式 (2.1) から,

$$F = \frac{GM}{r^2} m \tag{2.6}$$

となる。ここで,

$$g = \frac{GM}{r^2} \tag{2.7}$$

と置けば, 式 (2.4) が得られる。式 (2.7) に実際の G, M, r の値を（問 18 でやったように）代入すると,

$$g = 9.8 \text{ m s}^{-2} \tag{2.8}$$

である（この値は記憶せよ）。

ところが, **これはあくまで近似的な議論**であり, 厳密には正しくない。実際は, 地球の自転による「遠心力」を考慮しなければならない。遠心力は第 7 章で詳しく学ぶが, 回転軸から遠いほど大きい。地球で言えば, 高緯度より低緯度のほうが回転軸（地軸）から遠いので遠心力は大きい。また, 遠心力の向きは, 回転軸から遠ざかる向きである。低緯度の場合, それは地表面から見れば概ね上向きである（赤道だと真上）。従って, 下向き（地球の中心向き）である重力を, 遠心力はいくぶんか打ち消すのだ。その結果, 低緯度ほど重力は弱くなる, すなわち g が小さくなるのだ。

また, 地球の形は完全な球形ではなく, 赤道付近がわずかに膨らんだ楕円体っぽい形をしている。だから, 式 (2.3) でやったように地球の中心に質量が集中している, とみなすのは, 厳密にはダメである。さらにまた, 地球内部の密度は均一ではなく偏りがある。そういうことが総合的に影響して, g は地表の場所によって複雑なパターンでばらつくのだ。そのことを逆に利用して, 重力加速度の計測から地球内部の構造や地下水の様子等を調べることも行われている。これは地学（地球科学）であり, 特に, このように地球の精密な重力や形状を調べる学問を測地学という。

さて, 重力加速度が一定ではない, ということは, 農学や生命科学でも注意が必要なポイントである。それが次の問題でわかるだろう:

● **問** 19　化学実験では, 試薬を量り取る時に電子天秤を使う。電子天秤で量る重さは, その場の重力加速度に比例する。北海道大学（札幌市）と筑波大学で同じ電子天秤を調整せずに使ったら, 重さの測定値は何%くらい違うか? ヒント: 「電子天秤の校正　札幌　茨城」などをキーワードにしてインターネットなどで調べよ。

これを意識しないと, 北大と筑波大で同じ実験をしたつもりでも, 試薬の量が異なってしまい, 違う実験結果になりかねない。また, 農作物の取引で, 高緯度の街と低緯度の街で測った重さが違う! ということがトラブルの原因になるかもしれない。

● **問** 20　重力加速度とは何か?

よくある間違い 2　**重力加速度とは? と聞かれて, 式** (2.8) **または式** (2.7) **を答えてしまう**... そう答えてしまったら, g の値が場所によって異なることが説明できません。

さきほど, g が加速度の次元を持つことを示したが, g は実際に加速度として意味を持っている。君が地表付近で何かの物体を落としたら, その物体は加速度 g で加速しながら落下するのだ。そのあたりの事情は, 後で詳しく述べる。

重力加速度 g でもうひとつ気をつけるべきなのは, 高度（標高）である。g の大部分は式 (2.7) で決まるのだが, その r が変われば当然, g の値も変わる。

● **問** 21　高度 100 m まで上がった野球のボールと, 高度 10,000 m の上空を飛ぶ旅客機と, 高度 36,000 km の上空を飛ぶ静止衛星では, それぞれ g の値は地表での値の何パーセントほどになるか? 式 (2.7) によって見積もれ。それぞれの r は地表での r の何倍になるか?

この問題でわかったように, 地表と上空 100 m 程度では, g の値の違いは, わずか 0.003 パーセント程度である。この違いが野球ボールの飛距離に及ぼす影響は（詳細は省略）, 100 m の飛距離に対して 3 mm 程度になる。ボールを質点とみなす場合はボール 1 個分の大きさ（70 mm 程度）の誤差を暗に許容するので, この程度の違いは十分に無視できる。従って, g の値は一定値としてよかろう。しかし, ロケットを静止衛星の軌道まで打ち上げるときは, さすがに g を一定値にして計算してはダメである。

このように, 物理学の議論のほとんど全ては, 何らかの「近似」や「無視」を含んでいる。物理学を使った議論の結末が「何かおかしい」というときには, そのあたりが原因ではないかと考えることが必要である。

だからといって, 常に何もかも厳密に精密に考えようとするのもよくない。というのも, 物理学は, 精度を追求すればするほど理論が難しくなり, 立式や計算が大変になるからだ。問題設定に応じて, 「これはこだわっても仕方ないな」というものを切り捨てて適切に単純化すること, つまり「モデル化」が重要なのだ。

● **問** 22　月の質量は地球の質量の 1/81.3, 月の半径は地球の半径の 1/3.68 である。月の表面で月から受ける重力の大きさは, 地球の表面で地球から受ける重力の大きさの何倍か? ヒント：式 (2.1)。M と r の両方が変わることに注意。

ここで注意。実は, 純粋な物理学では, 「重力」と「万有引力」は同じ意味の言葉とされている。一方で, 地学や測地学などの分野では, 本節でそうだったように, 重力と万有引力を使い分ける。我々は純粋な物理学の理論よりも, 地球環境などの応用に近い分野なので, これらを使い分ける立場をとるのだ。しかし, 物理学者の書いた教科書などでは, 重力を万有引力の意味で使うことがあるので注意しよう。

よくある質問 35　**地球の中心に行けたら, 重力はどのように働くのでしょうか?** ... 全方向からの万有引力が打ち消しあって 0 になります。要するに「無重力」です。

よくある質問 36　**地球の質量は一定ですか? いろんな反応が起こって絶えず変わっているイメージです。**... 地球には隕石等が宇宙から飛来して質量を増やす一方, 地球大気から (地球の重力をふりきって）宇宙に飛散する分子や原子もあり, 質量を減らす。そんなこんなで, 地球の質量は, 絶えず微妙に増減しているでしょう。

2.6　計測器の校正とトレーサビリティ

ここで話題はさらに脇道にそれる。といっても, 大切な話である。

前節で, 質量を測る電子天秤は, 場所によって違った計測値を示すことを述べ, それはトラブルの原因になり得ることを述べた。そのような誤差は, 重力加速度のばらつきが原因だったりするが, それだけではない。機械の劣化や, 温度・湿度の変化による機械部品のゆがみなど, 様々な原因があって起きる。

ではそういう誤差はどうやって避けるのだろうか?

端的に言えば, 計測器（電子天秤等）が正確な値を示すように調整するのだ。すなわち, 質量があらかじめ正確にわかっている物体（分銅など）をその計測器に載せて測り, 計測値と真値（あらかじめ正確にわかっている値）との関係式（それを検量線という）を求めるのだ。

このような作業を計測器の校正という。校正は, 電子天秤だけでなく, 他の様々な物理量の計測機器についても同様に必要である。それぞれ, あらかじめ正確に値のわかっている対象を計測し, 検量線を作るのだ。そして, 実際の測定値を検量線で計算し直して, 誤差の小さい値に直すのだ。

と言っても, 多くの機器は電子化されており, 校正で求めた検量線は計測器の中のコンピュータに記憶され, 計測値は自動的に計算し直して表示してくれるので,

ユーザーが普段使う時はいちいち校正を意識することは少ないだろう。

よくある質問 37　なんだ, じゃあ校正のことは心配する必要はありませんね... とんでもない!!! その校正作業は, 結局は誰かがやらねばならないのです。計測器は校正してこそ価値があるのです。大学だと, 研究室の先生か, 大学院生か, 研究員などの人が, ひそかにやっています。業者さんに依頼してやってもらうこともあります。そういう「舞台裏」を想像・理解するためにも, 様々な計測の誤差になる要因を知っておく必要があります。それも物理学を学ぶ目的のひとつです。

では, 校正に使う「あらかじめ値の正確にわかっている対象」はどうやって用意するのだろうか? その値が正確だということはどうやって保証するのだろうか? 答は, 「校正しようとする機器よりも精度の高い機器で測った対象を使う」である。ではその「精度の高い機器」はどうやって校正するのか? 「それよりさらに高精度な機器で測った対象を使う」のだ。そういうのを, 日本で（または世界で）最も正確な機器（国家標準または国際標準）にたどり着くまで繰り返すのだ。これを「計測器のトレーサビリティ」という。こうして, 世の中にあるたくさんの計測機器を遡るとひとつの基準に到達するような体制を社会で構築・維持するのだ。それは科学技術社会の重要な基盤なのだ。

よくある質問 38　「最も正確な機器」の精度はどうやって保証するのですか? ... それが先端の物理学です。物理学の基本法則から高い精度で結果を理論的に予想でき, なおかつ計測も可能な現象を測ることで校正します。つまり最後は物理学の理論と比較して校正するのです。それは大掛かりな装置で大変な作業になります。そのような仕事をどれだけ高い精度で行えるか? それは一国の科学技術のレベルを決める重要な任務であり, 専門の研究機関が担います。日本では, つくばにある産業技術総合研究所がその役割を担っています。

● **問** 23　校正とは何か? 計測器のトレーサビリティとは何か? 本書の説明を確認した上で, インターネット等でさらに調べて, 気づいたこと・興味を持ったことを述べよ。

2.7　kgf（キログラム重）という単位

ところで, 力の単位である N（ニュートン）は, 物体が加速する現象に基づいて定義されているので, ちょっとイメージしにくい。我々が日常で「力」を感じるのは, 加速現象よりもむしろ, やはり重力にまつわる現象, つまり「重さ」ではないだろうか。

そこで, 多くの人が「重さ」に基づいた単位で力を表したいなーと思う。それが, kgf という単位である。kgf はキログラム重とか重量キログラムと読む。kgf は,

$$1\ \mathrm{kgf} := 9.80665\ \mathrm{N} \tag{2.9}$$

と定義されている。kgf は, もともと 1 kg の物体に地球表面でかかる重力の大きさとして定義されていたが, 前述したように, それは地球の場所場所で微妙に異なるので, 定義としてはイケてない。そこで, 式 (2.9) を使って N と関連付けることで, kgf は定義し直されたのである。

重力加速度 g は,

$$g = 1\ \mathrm{kgf/kg} \tag{2.10}$$

と表すことができる。なぜか?

$$\begin{aligned} 1\ \mathrm{kgf} &:= 9.80665\ \mathrm{N} = 9.80665\ \mathrm{kg\ m\ s^{-2}} \\ &= (9.80665\ \mathrm{m\ s^{-2}})\ \mathrm{kg} = g\ \mathrm{kg} \end{aligned} \tag{2.11}$$

である。この式の最左辺と最右辺を kg で割ると, 式 (2.10) が得られる。

よくある質問 39　中学では 1 N は約 100 g, と習いましたが ... それは間違いです。式 (2.9) から,

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kgf}/9.80665 = 0.102\ \mathrm{kgf} \tag{2.12}$$

です。これは「0.102 kg の物体に地表付近でかかる重力」なので, ざっくり「1 N は約 100 g **の物体の重さ**」と言っても OK です。しかしこの「の物体の重さ」を省略するのは間違いです。

よくある質問 40　そんなのどうだっていいじゃないですか? ... いえ, ここは譲れません。N は力の単位であり, g は質量の単位です。力と質量は別の物理量なので, どうやっても換算はできません。たとえば 1 L という量（体積）を K という温度の単位で表現することはできないでしょ? それと同じようなことです。

よくある質問 41　中学の先生が間違っていたのですか? ... そのような間違いを教える先生がおられるというのは信じがたいですが, 先生がそうおっしゃったなら, 残念ながらそれは間違いです。でも, ありがちなのは, 先生はちゃんと「の物体の重さ」までおっしゃったのに, 生徒がそれを聞きのがした, あるいは読み飛ばした, というケースです。

● **問** 24

(1) 質量 2.0 kg の物体に 3.0 m s^{-2} の加速度を与えるような力を, kgf を用いて表わせ。
(2) 質量 150 g の物体に 0.40 kgf の力を加えたら, どのくらいの加速度が生じるか?

2.8　電荷どうしが引き合ったり反発し合うクーロン力

次に, 電磁気力について考えよう。電磁気力とは,「電荷」を持つ物体に働く力のことだ。では電荷とは何だろう?

物質を構成するのは原子核や原子, イオンなどであり, それらを構成するのは, 電子や陽子, 中性子, 中間子など,「素粒子」と呼ばれる微細な粒子だ。なぜだかわからないが, それぞれの素粒子には, 電荷という, 固有の性質 (物理量) がある。

電荷の性質として,

- 電荷は正と負という符号のある量である。
- 電子 1 個と陽子 1 個は, 同じ大きさで逆の符号の電荷を持っている。

ということが知られている。その理由は, 根本的にはわかっていない。そのようにこの世界は作られているのだと言うしかない。

そして, 電子 1 個や陽子 1 個が持つ電荷の大きさ（絶対値）を電荷素量と呼び[*7], それは

$$q_e = 1.602176634 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \tag{2.13}$$

である[*8]。C というのは電荷の単位であり, クーロンと呼ぶ。SI 基本単位で表せば, 1 C=1 A s（アンペア・秒）だ（これが C の定義でもある)。

上で述べた「電荷の性質」から, 電子の電荷は $-q_e = -1.602176634 \times 10^{-19}$ C, 陽子の電荷は $+q_e = 1.602176634 \times 10^{-19}$ C である。

よくある質問 42　電荷素量の値は覚えるべきですか? ... 高校と違って, 大学では「これは覚えなさい」「これは覚えなくてよろしい」というような指示はほとんどありません。何を覚えるかは, 学習者であるあなた自身が決めるのです。これは大事だ, 便利だ, と思えば覚えればよいし, そうでなければ覚えなくても構いません。何が大事かも, あなたが判断するのです。そういう建前はともかく（笑), 電荷素量はやはり大事な量なので, 有効数字 4 桁程度, つまり 1.602×10^{-19} C くらいは覚えておくとよいのではと思います。

素粒子以外の物体（原子核, 原子, イオン, 分子, あるいはもっと大きな物体）は, 複数の素粒子で構成される。通常, その中には, 正の電荷を持った素粒子や負の電荷を持った素粒子が混在している。そのような場合, その物体の電荷は, 各素粒子の持つ電荷の総和 (正の値と負の値を加えて差し引きした量) として定義する。例えば, 水素原子は 1 個の陽子と 1 個の電子から構成されるが, 陽子の電荷は q_e, 電子の電荷は $-q_e$ というように, 同じ大きさ（電荷素量）で逆符号なので, その総和（$q_e - q_e$）は 0 である。従って, 水素原子の電荷は 0 とみなす。

正の電荷と負の電荷のどちらかが多いときだけ, その物体は 0 以外の電荷を持つことになる。物体が 0 以外の電荷を持つときは, その物体は「帯電している」という。

帯電している粒子のことを荷電粒子という。電子や陽子, 原子核, イオンなどは荷電粒子だ。荷電粒子のことを電荷ということもある。

電荷や荷電粒子の説明がひとしきり片付いたところで, いよいよ電磁気力の説明に入る。

まず電磁気力のひとつを紹介しよう:「粒子 1」と「粒子 2」という 2 つの荷電粒子があるとき, それらの間には, 電荷に応じて, お互いが引きあう力（引力）またはお互いを遠ざけあう力（斥力）が働く（なぜだかわからないが, そういうふうに世界はできている)。その斥力を F とすると, F は以下の式を満たす（なぜだかわからないが, そういうふうに世界はできている)：

クーロンの法則

$$F = \frac{k\, q_1\, q_2}{r^2} \tag{2.14}$$

ここで, q_1, q_2 は粒子 1 と粒子 2 がそれぞれ持つ電荷, r は粒子間の距離であり, 斥力は 2 つの粒子を結ぶ直線に平行な向きに働く。k は定数で, 有効数字 4 桁では, $k = 8.987 \times 10^9$ N m^2 C^{-2} だ。この式 (2.14) を, クーロンの法則 (Coulomb's law) と呼び, このように記述される電磁気力をクーロン力 (Coulomb force) と呼ぶ[*9]。クーロンというのは, この法則を見つけた物理学者の名前だ。k の値は記憶しなくてもよいが, 式 (2.14) は記憶しよう。

[*7] 電気素量とか素電荷とも呼ばれる
[*8] q_e は電荷素量を表すのによく使われる記号。この他に e という記号も使われるが, ネイピア数（自然対数の底）とかぶってしまって紛らわしいよね。
[*9] クーロン力は「くーろんか」ではなく「くーろんりょく」である。ばかばかしいが念の為（笑)。

クーロン力は, 電荷を持つ物体に働く力だ。一方, 重力は, 質量を持つ物体に働く力であった。興味深いことに, これらの数学的な表記, すなわち式 (2.14) と式 (2.1) は, 互いによく似ている（なぜだかわからないが, そういうふうに世界はできている）。従って, 重力に関して成り立つ議論, 特にその数学的な扱いは, クーロン力にも通用することが多いし, その逆も然りである。

よくある質問 43　性質も似ているのでしょうか? この 2 つの式は統合できるのでは? ... 地球中心で重力がゼロになるように, 一様に帯電した球の中心では電場がゼロになる, などの, よく似た性質があります。しかし, これらの式の統合には, 誰も成功していません。

さて, 上述のように, 電荷には, **正電荷**と**負電荷**の 2 種類がある。式 (2.14) の q_1, q_2 は正や負の値をとり得るのだ。そして, q_1 と q_2 が同符号（両方とも正, もしくは両方とも負）のとき, 式 (2.14) では F は正になり, そのとき, 2 つの粒子の間には, 斥力（互いに遠ざける力）がはたらく。一方, q_1 と q_2 が異符号（片方が正で片方が負）のとき, F は負になり, 斥力の逆方向, つまり引力（互いに引き合う力）がはたらくことになる（ここが重力との大きな違いだ。重力には引力しかない。また, 「負の質量」は無い）。

● **問** 25　クーロンの法則とは何か?

● **問** 26　電荷素量とは何か?

● **問** 27　互いに 1.0 m 離れたところに存在する 2 個の電子の間には, クーロン力と重力の両方が働く。そのクーロン力を F_e, 重力を F_g とする。(1) F_e の大きさを求めよ。(2) F_g の大きさを求めよ。ただし, 電子の質量 m_e は, 9.1×10^{-31} kg である。(3) F_g は F_e の何倍か?

2.9 電場, 磁束密度, ローレンツ力

前節で学んだクーロン力は, 荷電粒子が静止していようが運動していようが, 無関係に働く。ところが電磁気力にはもう 1 種類あって, それは荷電粒子が運動しているときにのみ働くような力である。それらを含めて正確に言えば, 次のようになる（今は詳細は理解しなくてよい）:

電荷 q を持つ荷電粒子に働く力 $\mathbf{F}$ は, 何らかの 2 つのベクトル $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ を用いて, 次式のように書けることがわかっている（$\mathbf{v}$ は荷電粒子の速度）。

ローレンツ力

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v}\times\mathbf{B} \tag{2.15}$$

式 (2.15) で表される力をローレンツ力という。このような形で荷電粒子にローレンツ力を及ぼすようなベクトル $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ を, それぞれ電場と磁束密度と呼ぶ（定義）[*10]。

ここで × という記号が出てきた。これはただの掛け算ではなく, ベクトルの外積というものである。今はとりあえずこれは理解できなくてもよい（知りたい人は数学の教科書を参照せよ)。「そんなものがあるのか」という程度の理解で OK。

よくある質問 44　「今は理解できなくてよい」のなら, ここで教えなくてもいいんじゃないですか? ... 「見たこと・聞いたことがある」というのが大事なのです。それが伏線になり, 皆さんの学習効率を高めるのです。

式 (2.15) はローレンツ力を定義する式であり, 同時に電場と磁束密度を定義する式でもある。つまり, たとえば「磁束密度って何ですか?」と問われたら, 式 (2.15) をさらっと書いて, この $\mathbf{B}$ のことです, といえばよいのだ。

● **問** 28　(1) ローレンツ力とは何か? (2) 電場の定義を述べよ。(3) 磁束密度の定義を述べよ。

よくある間違い 3　式 (2.15) の E, B, v, F を細字で書いてしまう... それらはベクトルなので太字で書くべきです。

$F = qE + qv \times B$ ... ダメ

$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ... OK

● **問** 29　(1) 電場の単位を SI 基本単位で表わせ。(2) 磁束密度の単位を SI 基本単位で表わせ。ヒント: 電場と磁束密度の定義である式 (2.15) に戻って考える。電荷と電場の積が力になるので, 電場の単位は, 力の単位/電荷の単位。同様に, 電荷と速度と磁束密度の積が力になるので... (以下略)。

式 (2.15) の第 1 項は, 荷電粒子がどのような運動状態にあっても（静止していても運動していても）, 同様に働く力である。ところが第 2 項は, 荷電粒子の速度に依存する力である。速度が $\mathbf{0}$ の場合は, この力は $\mathbf{0}$ なのだ。つまり, ローレンツ力には, 荷電粒子に対して, いつでも同様に働く力と, その粒子が動いているときだけ働

[*10] そして, 磁束密度にある定数をかけたものを磁場という（詳細は割愛する)。

く力という, 2 種類の力からなるわけだ。そして, 前者を電気力, 後者を磁気力（または磁力）という。

前節で学んだクーロン力は, 式 (2.15) の右辺の第 1 項に相当する「電気力」である。実際, 式 (2.14) で, q_2 を q と置いて書き直せば,

$$F = q\frac{k\,q_1}{r^2} = qE \qquad \text{ここで, } E = \frac{k\,q_1}{r^2} \tag{2.16}$$

となる（ほんとは F も E もベクトルのはずだから太字のはずだが, ここではそれぞれの大きさだけを考えよう。ベクトルで考えたいなら章末参照）。これは, 電荷 q_1 を持つ荷電粒子が作る電場 E から, 電荷 q を持つ荷電粒子が力を受ける, という解釈である。

● **問** 30　1 個の電子から 1.0 m 離れた点での電場の大きさは? ヒント: 式 (2.16)。

この問題でわかったように, 「1 個の電子の作る電場の大きさ」は, 距離 r が変われば変わる。つまり, 1 個の電子のまわりの各位置で, その電子が作る電場というものが存在するのだ。そのように, 電場は, 空間の各位置に存在する量である。磁束密度も同様に, 空間の各位置に存在する量である。空間の各位置に存在する量のことを「場」という。

電磁気学において, 本質的な研究対象は, 電気力や磁気力ではなく, むしろこれらの「場」である。そして, 電場が変わるとそれにつられて磁場密度が変わり, 磁束密度が変わるとそれにつられて電場が変わる, ということがわかっている（そのように世の中はできている）。その基本法則をマクスウェル方程式という。それを理解するには, ベクトル解析という, 諸君には未知の数学（場の微分と積分に関する数学）が必要なので[*11], 本書では扱わない。また, 特殊相対性理論というものを使うと, 電場と磁場が統一されるのだが, それも難しすぎるので本書では学ばない。

よくある質問 45　高校で磁力を習った時, フレミングの左手の法則というのがありましたが... ... 式 (2.15) があればフレミングの左手の法則は不要です。式 (2.15) はフレミングの左手の法則を包含し, それよりも一般性の高い, 強い式なのです。ただしこれを使いこなすには「外積」を理解する必要があります。がんばって数学を勉強してください!

よくある質問 46　磁力は電荷を持った粒子が運動しているときに働くとのことですが, 静止した磁石同士にはたらく磁力はどうなんですか? ... 磁石の中では電子のスピンというもののせいで電流が流れており, それに磁力がかかります。

よくある質問 47　高校では「磁気力に関するクーロンの法則」というのを習ったのですが, 磁石同士に働く力はそれで説明できるのでは? ... 磁荷と呼ばれる量を考え, 2 つの磁荷 m_1, m_2 が距離 r だけ離れているとき, 両者の間に働く斥力 F は次式のようになる, という法則ですね（k_m はある定数）:

$$F = \frac{k_{\mathrm{m}}\,m_1\,m_2}{r^2} \tag{2.17}$$

この式を教育現場で教えることには議論があります。というのも, この式は見かけほど単純でも便利でもないのです。磁力にはもっと一般的でうまい扱い方があるのです。まず, 実験的な事実として, 「磁荷」という量は単体で存在しないのです。存在する時は常にプラスとマイナスがペアになった状態なのです。電荷は「プラスの電荷」や「マイナスの電荷」がそれぞれ単体で存在しますが, 磁荷はそうではないのです。にもかかわらず, この式は, m_1 と m_2 という 2 つの単体の磁荷が存在するかのような式なのです（m_1, m_2 がペアになっているから問題ないじゃないかと思うかもしれないけど, そういうことではないのです。この式は m_1 と m_2 の「間」に働く力を述べているので, 「m_1 と m_2 は別物」という設定なのです）。従って, 現実の状況にこの式を適用しようとすると, ひとつの「プラスの磁荷とマイナスの磁荷のペア」と別の「プラスの磁荷とマイナスの磁荷のペア」の間に働く力を求めることになり, この式を 4 つ立てなければならないのです。一方, 上で述べたローレンツ力とマクスウェル方程式[*12]は, そのような不自然さは無く, 普遍的に磁力を扱うことができるのです。従って, 私は「磁気力に関するクーロンの法則」は必要は無いと思っています。実際, 「磁気力に関するクーロンの法則」を使わずに電磁気学を教える教科書はたくさんあります。

よくある質問 48　電磁気力とローレンツ力は同じ意味ですか? ... ほぼそうなのですが, 若干微妙なところがあります。というのも, 特にミクロな粒子の運動は, 本質的には量子力学を使わないと表現できないものであり, 量子力学での荷電粒子の運動は, 電場や磁束密度ではなく, それらに関係しているけど別の場である「スカラーポテンシャル」「ベクトルポテンシャル」という量で表現されるのです。つまり, 電磁気力を量子力学で扱うと, 式 (2.15) には出る幕が無いのです。そういう意味で, ローレンツ力は電磁気力のひとつの表現と考えればよいでしょう。

[*11] 「ライブ講義大学生のための応用数学入門」で学べる。

[*12] そこから導出されるビオ・サヴァールの法則というのが現実的な問題設定ではよく使われます。

2.10 発展: 重力やクーロン力をベクトルで表す式

（発展的内容なので, 興味ある人だけ読めばよい。）

ところで, 力はベクトル（大きさと向きを持つ量）なのだから, 式 (2.1) を, 力の大きさだけでなく力の向きまできちんと表現できるような式に書き直してみよう。図 2.1 のように, 物体 1 と物体 2 があり（ともに質点とみなす）, それぞれの質量を m_1, m_2 とし, それぞれの位置ベクトルを $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ とする（大学ではベクトルを太字で書き表す!)。物体 1 が物体 2 から受ける重力（ベクトル）を $\mathbf{F}_{12}$ とする。まず, 物体 1 と物体 2 を結ぶ（物体 1 から物体 2 に向かう向きの）ベクトルは $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ である（わからなければ数学の教科書を参照)。そして, その大きさは物体 1 と物体 2 の距離, すなわち式 (2.1) の r である。つまり式 (2.1) は,

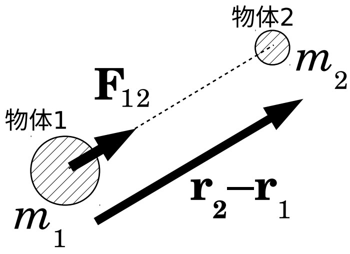

図 2.1　物体 1 が物体 2 に及ぼす重力 $\mathbf{F}_{12}$。

$$F = \frac{G\,m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \tag{2.18}$$

と表すことができる。また, $\mathbf{F}_{12}$ の向きは $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ と同じ向きなので, $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ という単位ベクトル（大きさ 1 のベクトル）で向きが表される。従って, $\mathbf{F}_{12}$ は次式のように表すことができる（この右辺の左半分は式 (2.18) であり, 右半分は向きを表す単位ベクトル）:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{G\,m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}\,\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \tag{2.19}$$

まとめると次式のようになる（目指していた式）:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{G\,m_1 m_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \tag{2.20}$$

同様の考え方でクーロン力（式 (2.14)）を力の方向まで記述できるように書くと次式のようになる:

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{k\,q_1 q_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \tag{2.21}$$

ここで, $\mathbf{F}_{12}$ は粒子 1 が粒子 2 に及ぼす電気力（ベクトル）, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ はそれぞれ粒子 1 と粒子 2 の位置ベクトルである。

よくある質問 49　式 (2.21) にはなぜマイナスがついているのですか? ... マイナスは $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ に掛かっていると考えればわかるでしょう。つまり, $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, つまり「粒子 2 から粒子 1 へ向かう向き」です。それは粒子 1 にとっては,「粒子 2 から遠ざかる向き」です。そちらを向く力は斥力です。これは電荷が同符号のとき（$q_1q_2 > 0$ のとき）, 電気力は斥力である, ということに整合します。というか, そこを整合させるためにマイナスが必要だったのです。（$q_1q_2 < 0$ のときは向きが逆転して式 (2.21) は引力になることもわかるでしょう)。

2.11 解答

答 15 （略解) 1.5 m s^{-2}

答 17 重力・電磁気力・強い力・弱い力

答 18 略。ヒント: 式 (2.1) に適切に値を代入して計算。ただし, r は km で与えられているので, m に換算すること。つまり, $r = 6.4 \times 10^6$ m とすること。

答 20 地表付近にある質量 m の物体が地球から受ける重力は mg と書ける。このときの定数 g が重力加速度[*13]。

答 21 地球中心から地表までの距離を r_1, 地球中心から上空（野球ボール, 旅客機, または静止衛星）までの距離を r_2 とする。地表の重力加速度を g_1, 上空の重力加速度を g_2 とすると, 式 (2.7) より,

$$g_1 = G\frac{M}{r_1^2}, \qquad g_2 = G\frac{M}{r_2^2}, \qquad \text{従って,}$$

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \Big(\frac{6400\ \text{km}}{r_2}\Big)^2 \quad \text{である。}$$

野球ボールの場合, r_2 =6,400 km+100 m=6,400.1 km を上の式に代入すると, $0.999968\cdots$。従って

*13 たまに, 重力加速度とは GM/r^2 である, という人がいるが, 間違い。なぜなら, この式は, 地球を静止した完全な球体とみなしており, この式に従えば地表のどこでも同じ値になってしまうから。実際の g の値は, 場所によって微妙に異なる。例えば地下に重いものがある場合は, その直上の地表付近では g は大きくなる。低緯度では地球の自転による遠心力（後に学びます）の影響も g の値に入って来る。また, ウィキペディアなどには「地球表面付近において物体が受ける重力の加速度」が重力加速度であると書かれているが, これもダメ。「重力の加速度」とは何か? 重力が加速されるのか? 重力によって何かが加速されるのか? 地面に置いてある石は重力を受けるけど, 加速されていないよね?

地表での 99.997 パーセント。旅客機の場合, r_2 =6,400 km+10,000 m=6,410 km を上の式に代入すると, 0.9969⋯。従って地表の 99.7 パーセント。静止衛星の場合は, r_2 =(6400 km)+(36000 km)≒42000 km を上の式に代入すると, 0.023⋯。従って, 地表の約 2 パーセント。

答 22 地球の半径を r_1, 月の半径を r_2, 地球の質量を M_1, 月の質量を M_2 とする。問題文より $M_2/M_1 = 1/81.3$, $r_2/r_1 = 1/3.68$。さて, 質量 m の物体が地表にあるとき地球からうける重力を F_1, 月の表面にあるとき月からうける重力を F_2 とすると, 式 (2.1) より,

$$F_1 = G\frac{M_1 m}{r_1^2}, \qquad F_2 = G\frac{M_2 m}{r_2^2} \qquad \text{従って,}$$
$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{M_2}{M_1} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{1}{81.3} \times 3.68^2 = \frac{1}{6.00}$$

従って, 1/6 倍。

答 24 （略解; レポートは導出過程も書くこと）(1) 0.61 kgf (2) 26 m s^{-2}

答 27 (1) 式 (2.14) より, $F_e = 8.987 \times 10^9$ N m^2 C^{-2} $\times$ $(1.602 \times 10^{-19}$ C$)^2/(1$ m$)^2 = 2.3 \times 10^{-28}$ N
(2) 式 (2.1) より, $F_g = 6.7 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} $\times (9.1 \times 10^{-31}$ kg$)^2/(1$ m$)^2 = 5.5 \times 10^{-71}$ N
(3) $F_g/F_e = 2.4 \times 10^{-43}$

注: このように, クーロン力は重力よりもはるかに大きい。米国の物理学者リチャード・ファインマンは, これを, 「光が陽子 1 個の端から端まで通り過ぎるのにかかる時間と, 宇宙の年齢との違いくらい大きい」と表現している。

答 30 電場と磁束密度の定義式 (2.15) で, 今は $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ として両辺を電荷 q で割り, 両辺の絶対値をとって, $|\mathbf{F}| = F$, $|\mathbf{E}| = E$ とすれば, $E = F/q$ である。この F に式 (2.14)（$q_1 = q$, $q_2 = q_\mathrm{e}$ とする）を代入すると, $E = F/q = k\,q_\mathrm{e}/r^2$。$q_\mathrm{e} = 1.602 \times 10^{-19}$ C, $r = 1.0$ m, $k = 8.987 \times 10^9$ N m^2 C^{-2} を代入して計算すると, $E = 1.4 \times 10^{-9}$ N/C。

第3章

様々な力

3.1　糸やロープに働く張力

ここまでは主に根源的な 4 つの力について学んだ。ここからはこの 4 つの力から派生する力について学ぼう。まずは張力という力だ。

例として, 君が天井から垂れ下がったロープに吊り下がって静止しているとしよう（簡単のためロープの質量は無視する）。ロープに 1 箇所でも弱い部分があればロープは切れて君は落下するだろう。従って, 君に働く重力はロープの全ての箇所にも働いていることがわかる。

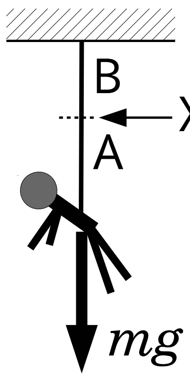

図 3.1　ロープに吊り下がる人

ではロープの任意の 1 箇所 X を考えよう。そこより下の部分をロープ A, そこより上の部分をロープ B と呼ぼう。本来はロープ A とロープ B は X で繋がっていて 1 本のロープなのだが, 便宜上そう名づける。

さてロープ A はロープ B を下向きに引っ張っている。これは直感的に明らかだ。一方, 同時にロープ B はロープ A を上向きに引っ張っている。これは作用・反作用の法則に従えば明らかである（ロープ A を「物体 A」, ロープ B を「物体 B」として考えればよい）。ロープ B がロープ A を上向きに引っ張っているというのがわかりにくければ, 次のように考えてもよい: 仮にロープ B がロープ A を上向きに引っ張っていないとすると, 「君の体とロープ A を合わせた物体」に働く力は重力のみである。しかし今, 「君の体とロープ A を合わせた物体」はロープに吊られて「静止」している。静止しているからには「力のつりあい」が成り立たなくてはならない。従って, ロープ B は X においてロープ A に「君に働く重力と同じ大きさで反対向き（上向き）の力」を及ぼしていると考えざるを得ない。

これらの考察の結論（「君に働く重力と同じ大きさの力は, ロープの任意の箇所, つまり全ての箇所にも働いている」「ロープの任意の箇所では, そこを挟んで互いに逆向きで同じ大きさの力が働いている」）から, 次のような結論が得られる: ロープの端に力が働く場合, それと同じ大きさの力が, ロープの任意の箇所において, その箇所を挟んで互いに逆向きに働く。

このような力を**張力**と呼ぶ（慣習的には T で表すことが多い）。張力には以下のような性質がある（というかこれらが張力の定義である）:

- 張力は糸状の物体（ロープなど）に働く。
- 張力は糸の各箇所で, 糸（の接線）に平行に働く。
- 糸にかかる摩擦力や, 糸自体の質量にかかる重力が無視できる限り, 張力の大きさは糸のどこでも同じである。
- 張力は引っ張りの向きにしか働かない。つまり, 張力のかかった糸を任意の箇所で 2 つに分けて考えると, 両者が互いに及ぼすのは引き合う力のみであり, 押し合う力はない。

ところで不幸にして X が弱かったらどうなるだろう? ロープは重力のために X 付近で次第に伸びていき, ついには切れてしまうだろう。すると君に働く重力に抗っていた力は消え, 君は重力に引かれて落下してしまう。ただし, その場合でも, ロープが完全に切れる寸前まで張力は存在するのだ。

● **問** 31　図 3.2 のように, 片端が壁にとりつけられた

綱を力 F で引く場合（上）と, 両端を力 F で引く場合（下）では, 綱にかかる張力の大きさは, どちらも F で等しい。このことを説明せよ。

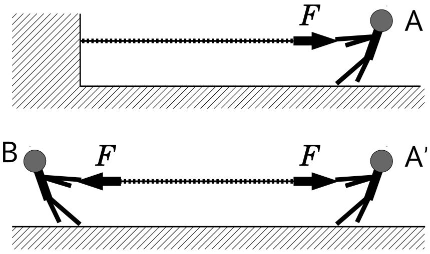

図 3.2　壁対人の綱引き（上）と, 人対人の綱引き（下）

● **問** 32　図 3.3 のように, 質量 m の君は, 天井に吊り下げられた滑車に通されたロープの片端を体に結び, もう片端を手に持って, 自らの力で自らの体を持ち上げようとしている。君の手がロープを引く力は $mg/2$ であることを示せ（つまり体重の半分の力で君は自分を持ち上げることができるのだ)。

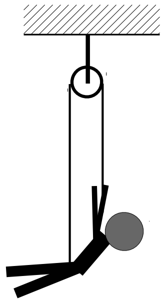

図 3.3　自力で上昇しようとする人

● **問** 33　図 3.4 のように, 君は天井から固定された滑車 A と自由に上下できる滑車 B（動滑車）を利用して, 質量 m の物体をロープで持ち上げようとしている。滑車の質量は無視し, ロープと滑車の間の摩擦は無いものとする。ロープは一端が天井に固定され, 滑車 B と滑車 A を通って, もう一端が君の手に握られている。君がロープを引っ張るのに必要な力は $mg/2$ であることを示せ。ヒント：ロープにかかる張力を T とすると, 滑車 B には上向きに $2T$ の力が働く。

よくある質問 50　**要するに天井と人が半分ずつ引っ張っているということ**? ... そうです。

問 33 の考え方を援用すれば, 図 3.5 のように, 動滑車

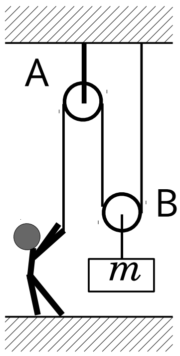

図 3.4　動滑車を使って物を持ち上げる

の数を増やせば増やすほど小さな力で物を持ち上げることができるということがわかるだろう。

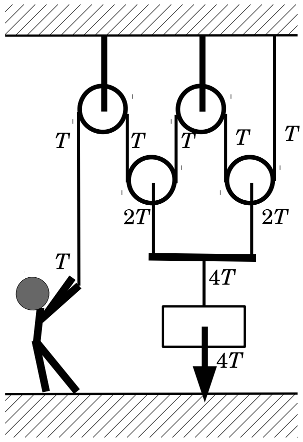

図 3.5　2 個の動滑車を使えば必要な力は 1/4 になる。

● **問** 34　君の手がロープを引っ張るとき, その力の根源は何か?自然界に存在する 4 つの根源的な力に帰着して説明せよ。

3.2　大気圧と水圧

農学・林学・環境科学では水が重要である。灌漑水をどのように制御するか? 土の中や作物・樹木の体内でどのように水が分布すれば作物や木がよく育つか? 魚や水草を良好な温度や酸素濃度に置くにはどのように水を循環させればよいか? そういう場面はかぞえきれない。

そこで本節では水にちょっとこだわった話をしておく。これは大学の力学の標準的なメニューにはほとんど出てこない話だが「農学部の物理」には必要な話題である。

まず「水圧」を復習しよう。水圧は水の中や水の端（容器等との境界）で発生する, 面積あたりの力（の大き

さ）である。

水が重力を受けると, それによって水圧が発生する。

例 3.1 四角い水泳プールがある。水平方向の 2 辺の長さをそれぞれ a, b とし, 深さを H とする。容積は abH である。ここに水を満たす。水の密度（単位体積あたりの質量）を ρ とすると, プールを満たす水の質量（=密度×体積）は ρabh である。従って水にかかる重力の大きさ（つまり重さ）は $\rho abhg$ である（g は重力加速度)。これがプールの底面（面積 ab）にかかるので, プールの底での水圧（=力/面積）は, $\rho abHg/(ab) = \rho gH$ である。

● **問** 35 以下の問に答えよ。
(1) 水深 1 m のプールの底での水圧が約 100 hPa になることを示せ。
(2) それは大気圧（有効数字 2 桁で 1000 hPa）の何倍か?
(3) 地球上の海の平均水深は 3700 m である。その水深での水圧を求め, 大気圧の何倍か求めよ。

ここで「大気圧」が登場したが, 大気圧も大気（地表の上空にある大気）にかかる重力がもたらす圧力である。

例 3.2 大気圧は時と場所によって変動するが, 標高 0 では約 1000 hPa, つまり約 100000 N/m^2 である。つまり面積 1 m^2 の地表面の上空に, 約 100000 N の重さの大気が載っている。重力加速度を $g \fallingdotseq 10$ m/s^2 とすると, その質量は約 10000 kg=10 t である。

よくある質問 51 **え!!?? 空気ってそんなに重いんですか?? そんなんで私たちの体はなぜ潰れないんでしょうか**? ... びっくりですよね。我々が日常的に暮らすこの地上は, 実はけっこうな大きい圧力の環境なのです。それで平気なのは進化の結果なのでしょう。ちなみに火星の大気圧は地球の 1/100 未満らしいですよ。火星人が地球に来たらしんどいだろうねー（笑）

よくある質問 52 **例** 3.2 **で重力加速度を** 10 m/s^2 **とするの, 違和感あります。**9.8 m/s^2 **ではないのですか**? ... その前に約 1000 hPa とか約 100000 N/m^2 というざっくりな量が出てきたでしょ? だから, 重力加速度もざっくりの値でよいのです。9.8 より 10 の方がきりがよいから計算が楽じゃないですか。実際は, 高気圧や低気圧が来ることで, つくばでも 980 hPa から 1020 hPa 程度の気圧は日常的に発生します。つまり 1000 hPa に対して ±20 hPa の変動, つまり 2 パーセントの変動があることを無視した設定での議論です。9.8 m/s^2 と 10 m/s^2 の差も 2 パーセントくらいじゃないですか。だから無視したのです。

よくある質問 53 **そういうのはどう判断するのですか**? ... 話の文脈やテンションを読むのです。ああ, この話はこのくらいの精度での文脈やテンションなんだな, という暗黙の合意です。日常でもあるじゃないですか。昨日何時に寝た? → 11 時半くらいかな? みたいな話。11 時 28 分 37 秒に寝た, とか言いませんよね。寝に落ちる瞬間ってそもそも曖昧だし。

よくある質問 54 **科学がそんなアバウトなのでいいのですか**? ... 科学はいつでも細かく精密にやればよいというものではありません。アバウトなほうが本質が見えやすいこともあります（最初の章の概算の話を思い出して下さい)。ちゃんときっちりやるべきときと, アバウトでよいときを, 適宜判断して使い分ける。その判断は対象に関する知識や経験に基づきます。ここでは, 気圧の変動がどのくらいあるかという知識です。だから, いろんなことがちゃんとわかっていないとアバウトな議論はできないのです。

ここで注意!! 実は, 地上の水の中の圧力は, 水にかかる重力だけでなく, その上の大気にかかる重力も加わっている。というか, プールの底から見れば, その上には水と大気の両方が重なって覆いかぶさっているのだから, 両方の重さがかかるのは当たり前である。従って, 地球上にある水の中の圧力は, 大気圧 + 水にかかる重力による水圧である。

たとえば, 水深 1 m での「水にかかる重力による水圧」は 100 hPa 程度だが, 実際のその場所での圧力は, それに 1000 hPa の大気圧が載って 1100 hPa 程度になる。

よくある質問 55 **え!!?? 問** 35 **では** 100 hPa **って言ってたじゃないですか! 水圧ってどちらのことを言うのですか**? ... ケースバイケースです（笑)。多くの場合は, 大気圧を除外して, 水にかかる重力による水圧だけを意味します。

よくある質問 56 **ケースバイケースって, それで誤解したら調査データとか無茶苦茶じゃないですか!!** ... そうです。だからこの話をしたのです。世の中には他にもこういう危険な混乱の源が随所に放置されています。多くの人は, さっきみたいに「重力加速度を 10 m/s^2 にしてよいのですか!?」みたいなことには敏感なのに, こういう危険な混乱には気づかないし, 気にしないのです。何かズレていますよね。

よくある質問 57 **人間が地上にいるとき, 大気の圧力に押しつぶされないでいられるのは, どのような力が内側からはたらいているのですか? また, もし人間が体ひとつで圧力のあまりかからないものすごく高い場所に行ったとしたら, その人は破裂するのでしょうか**? ... 人体の大部分は水であり, そもそも

（液体の）水は圧力がかかってもあまり変形しません。それが「つぶれない」ことのひとつの理由。また, 肺に空気がありますが, 鼻を介して肺は外気とつながっているのでその圧力は基本的に外気の圧力（大気圧）と同じ。従って, 肺の空気は大気圧と同じ圧力で押し返すから肺もつぶれない。ただし, 人間が体ひとつで潜水する場合は, これが成り立ちません。特に, 水圧のために肺の空気が圧縮されます。そのため, ある程度以上の深さに潜ると, 人間の体に働く浮力（それは体積に比例する; 後述）が小さくなって, 人間の体は勝手に沈んでいくそうです（テレビでやっていました）。

逆に気圧の低いところ, 特に真空では, 体液が沸騰します（圧力が低くなると液体の沸点は下がる）。

よくある間違い 4　重力が存在しないと水圧は存在しないと思っている... 無重力の空間でも, 水の入った PET ボトルをぎゅっと握れば, ボトル内の水に水圧は発生します。

よくある質問 58　でもさっき「水が重力を受けると, それによって水圧が発生する」って書いてたじゃないですか... その文章で「水が重力を受ける」は十分条件。必要条件ではありません。

3.3 水圧の大事な性質, パスカルの原理

水圧に関する重要な性質について述べる。君がボールを持って水中に潜っていったとき, ボールは水圧を受けて圧縮されて小さくなるが, そのとき, 楕円形になったりせず, 球形のまま小さくなるだろう。なぜか? ボールの表面を想像上でたくさんの小さなタイルの集まり（たくさんのタイルからできているサッカーボールみたいなイメージ）と考えると, タイルはそれぞれいろんな方向を向いているが, それらにかかる水圧は常にそれらに垂直で同じ大きさなのだ（だからボールは均等に圧縮されて球形のまま縮むのだ）[*1]。

これは一例だが, 一般に, 静止した水では, 水圧は面に対して垂直に力を及ぼし, 水圧の大きさは面の向きによらず同じ大きさである, という性質がある。これをパスカルの原理（図 3.6）という。これは中学校や高校物理基礎で習ったが, その理由を知る人は少ないだろう。特に, なぜ「面の向きによらず同じ大きさ」なのだろうか? それについて考えよう。

ある深さの水の中に, サイコロ状の水の塊をイメージしよう。そのサイコロの外側にも水は切れ目なく続いているので, あくまで想像上の「水のサイコロ」である。ここで, 外側の水の存在を忘れて, そのサイコロだけについて考えてみよう。そしてそのサイコロが, 仮想的に, 薄いビニールの膜で包まれていたとしよう。そのサイコロの 2 つの側面を, 君が両手で挟んで押すと, サイコロはどうなるだろう? もちろん, 押した面の方向には縮み, それ以外の面の方向に水ははみ出ようとするだろう（それはマヨネーズのボトルを両手でぎゅっとしたとき, マヨネーズが口からにゅるっと出るのと同じことだ）。

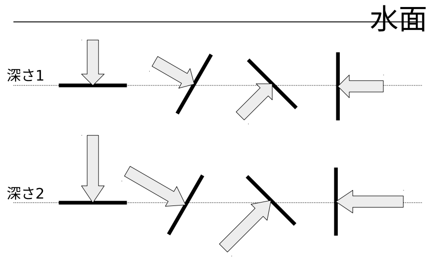

図 3.6　水の中で様々な向きの面に働く水圧。同じ深さどうしなら, 面（太い線分）の向きがどうであれ, 面にかかる水圧は同じ大きさで, 面に垂直に力を及ぼす（パスカルの原理）。深さが違えば, 水圧の大きさ（矢印の長さ）は違う（深いほうが大きい）。

つまり, 「特定の面での圧力が大きいと, 水のサイコロは変形する」のだ。そしてこの対偶は「水のサイコロが変形しないならば, つまり水が静止していれば, どの面にかかる圧力も同じ」となる。つまりパスカルの原理が成り立つ[*2]。

3.4 浮力は水圧から生じる

海に船が浮かぶのは「浮力」のためである。我々が水に入ると体が軽く感じるのも浮力のせいである。浮力はどうしてできるのだろうか? 答は水圧にある。

静止した水の中に, 直方体形の物体がどっぷり浸かっている状態を考えよう（図 3.7; 物体は浮き上がったり沈み込んだりしないように, 極細の糸で上から吊るされたり水の底に係留されていると考える）。その上面や下面の面積（直方体を水平に切った断面積）を A, 直方体の高さを b と置く。この直方体の上面に相当する深さ（水面からの距離）を h とすると, 下面に相当する深さは $h+b$ である。この物体に働く力を考えよう。

まず, この物体に働く重量がある。それは鉛直下向き

[*1] ただし, これは十分に小さいボールについての話。この後の浮力の節で述べるように, 水圧は深さによって変わるので, 実際はボールの大きさに応じて, ボールの上の部分よりも下の部分に大きな水圧がかかる。

[*2] ただしこれは厳密な証明ではない。マヨネーズのたとえで直感に訴えてわかった気にしただけである。でもそれで納得してもらえれば, とりあえずそれで十分だ。

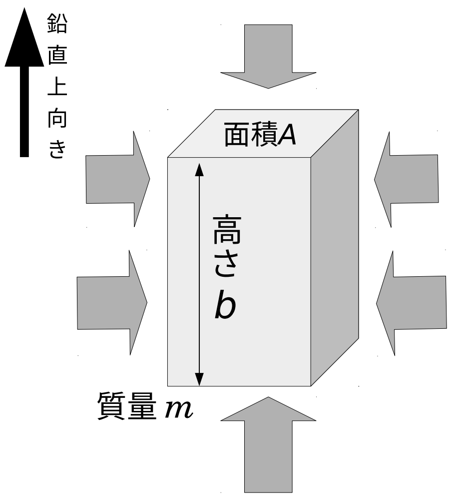

図 3.7　水中に浮遊する直方体状の物体（浮力の説明図）。図の余白は水で満たされていると考えて欲しい。水圧による力（矢印）が各面に働く。左側面と右側面に働く力どうしは大きさが同じで向きが逆なので打ち消す。同様に, 手前側面と奥の側面に働く力（図ではごちゃごちゃするので省略）どうしは大きさが同じで向きが逆なので打ち消す。上面に働く力より下面に働く力のほうが大きい。従って, 差し引き, 上向きの力がこの物体に働く。

で大きさは mg である（m は物体の質量)。とりあえずこれは浮力に関係ないので, 脇においておく。

次に, 直方体の各面に働く水圧による力がある。ところが側面で相対する面に働く「水圧による力」は, それぞれ面に垂直で, 互いに逆向きである。そして（同じ深さなので）パスカルの原理によって同じ大きさである。従って打ち消し合う。

残るのは, 上面と下面のそれぞれにかかる圧力による力だ。上面での水圧の大きさは既に述べたように ρgh であり, それによる力は下向きで, 大きさ（＝圧力×面積）は ρghA である。同様に, 下面での水圧の大きさは $\rho g(h+b)$ であり, それによる力は上向きで, 大きさは $\rho g(h+b)A$ である。下面にかかる力の方が大きいのだ。

従って, これらの合力は上向きで, その大きさは $\rho g(h+b)A-\rho ghA$, つまり ρgAb となる。これが浮力だ。浮力は, 物体の表面にかかる, 水圧による力の合力なのだ。

ここで Ab は物体（直方体）の体積である。すると ρAb は物体と同じ体積の水の質量と同じであり, 従って, ρgAb は「物体と同じ体積の水の重さ」と同じである。

つまり, 水中の物体にかかる浮力は, その物体と同じ体積の水の重さと同じ大きさで, 鉛直上向きにかかるのだ。

ここでは話を簡単にするために直方体形の物体で考えたが, これはどんな形状の物体についても言える。それを証明しよう。

静止した水中に任意の形の物体が浮遊しているとしよう。想像の中で, その物体を水そのもので置き換えてみる。すると, その「物体と同じ形の水の塊」は, まわりの水と実質的には境目がなく存在できるから, 静止していられる。つまり, その「水でできた物体」に働く重力と浮力は釣り合うはずだ。浮力は物体の表面にかかる水圧による力の合力だから, 全く同じ形をした元の物体にも, 同じ浮力がかかるはずだ。従って, 物体にかかる浮力は「同じ体積の水にかかる浮力」と同じである。

よくある質問 59　この証明があれば, 直方体に関するさっきの証明は無用じゃないんですか? ... まあそうです（笑)。でも, 物事はいろんな観点から考えることで深い理解・納得に至りますから。

よくある質問 60　水の中はなぜ無重力ですか? ... ちょっと語弊がありますね。「密度が水と等しいような物体」に限って, 水の中は「無重力」です。それは, 重力と浮力が釣り合うからです。さっきは「脇においておく」と言いましたが（笑）, 物体には鉛直下向きに重力が働いています。そして, 物体には鉛直上向きに, 「物体と同じ体積の水に働く重力」と同じ大きさの浮力が働いています。もし物体の質量が, 同じ体積の水の質量と同じならば（つまり物体と水の密度が互いに同じならば）, 「物体にかかる重力」と, 「物体と同じ体積の水に働く重力」は同じになりますから, 「物体に働く重力」と「物体に働く浮力」は同じ大きさで互いに逆向きなので打ち消し合って, 合力は $\mathbf{0}$, つまり「無重力」になります。

3.5　応力と圧力

ここまで水圧や大気圧を論じてきたが, ここではより一般的に, 圧力とは何かを論じよう。化学の授業などでは, 圧力は容器の壁に対して気体や液体が及ぼす力を面積で割ったもの, ということで出てくる。しかし本当は, 圧力はもう少し慎重に定義すべき量なのだ。そのことを説明しよう。

圧力の前に, まず応力というものを定義する必要がある。それは, 面にかかる力を面積で割ったもの（すなわち, 単位面積当たりの力）である。ここで, 君は「それは圧力ではないか?」と思うかもしれないが, その疑問は保留にして先を読んで欲しい。

この「面にかかる力」は, 面に対して様々な方向を持つ可能性がある。例えば君が消しゴムで鉛筆の字を消す時, 消しゴムを紙に押し付けながら横に滑らす力, つまり消しゴムと紙の接触面に対して斜め方向の力が発生する。この力を消しゴムと紙の接触面の面積で割れば応力である。

応力を,「面に垂直な成分」(押し付ける力) と「面に平行な成分」(滑らす力) に分解して, 前者を垂直応力, 後者をせん断応力と呼ぶ。消しゴムの例で言えば, 消しゴムを紙に押し付けるのが垂直応力, 消しゴムを紙に沿ってずらそうとするのがせん断応力だ。

例 3.3　底面積が $A = 4\ \mathrm{cm}^2$ の消しゴムを, 大きさ $F = 2\ \mathrm{N}$ で紙面から $\theta = 60$ 度の向きの力で紙面に押し付けた。そのとき, 消しゴムの底面と紙の間に発生する応力を考えよう。
垂直応力は $F \sin\theta/A = 2\ \mathrm{N} \times (\sqrt{3}/2)/(4\ \mathrm{cm}^2) \fallingdotseq 0.43\ \mathrm{N\ cm}^{-2} = 4.3 \times 10^3\ \mathrm{Pa}$。
せん断応力は $F \cos\theta/A = 2\ \mathrm{N} \times (1/2)/(4\ \mathrm{cm}^2) \fallingdotseq 0.25\ \mathrm{N\ cm}^{-2} = 2.5 \times 10^3\ \mathrm{Pa}$。(例おわり)

では, 応力と圧力はどう違うのだろう? 端的に言えば, 圧力は応力の一種である。

ここで「パスカルの原理」を思い出そう。すなわち, 静止した水には,「同じ位置なら面の向きによらず同じ大きさの垂直応力が面にかかる」という性質がある。こういう性質がある場合は, その応力の大きさが圧力[*3]である。

実は, 静止していない (流れている) 水や, 静止していても消しゴムのような (流れることがそもそもできない) 物体は, この性質を持たない。つまり, 流水の中や消しゴムの中では, 同じ位置でも面の向きによって垂直応力の大きさは変わるし, せん断応力が発生しうるのだ (その理由は線型代数という数学が必要なのでここでは述べない)。そのような場合は,「その位置で互いに直交する 3 つの面のそれぞれでの垂直応力の大きさ[*4]の平均値」を圧力という。

よくある質問 61　**圧力って, 単位面積あたりの, 面を垂直に押す力の大きさ, って高校では習いましたが**... ... 高校「物理基礎」の教科書 (例えば啓林館, 2015 年) にはそう書いてありますね。要するに (圧縮を正とするような) 垂直応力のこと。正確ではありませんが, 高校生にはそれが限界なのでしょう。皆さんは大学生なのでちゃんとした定義をここで述べました。

よくある質問 62　**なら, 直立した人の足の裏にかかる圧力は, 体重/足裏の面積, というのは嘘ですか**? ... 厳密に言えば間違いです。それは鉛直上下方向の垂直応力であり, 圧力に一致するとは限りません。しかし, その人の足裏に接する血管の中の圧力は, (血流の流れを無視すれば) それに一致するとしてよいでしょう。

さて, 当然ながら, 応力や圧力の単位は, 力の単位を面積の単位で割ったものである。国際単位系 (SI) では, $\mathrm{N/m^2}$ である。$\mathrm{N=kg\ m\ s^{-2}}$ なので, これは $\mathrm{kg\ m^{-1}\ s^{-2}}$ とも書ける。この単位を Pa (パスカル) と呼ぶことは既知だろう。

よくある質問 63　**「電圧」は電気の圧力ですか**? ... 違います。電圧は圧力ではありません。電圧は P.52 で定義します。英語では voltage と言って,「圧」に相当する語は入っていません。

よくある質問 64　**では, なぜ日本語では「圧」という字が電圧にあるのですか**? ... わかりません (泣)。紛らわしいですが, 私は単なる記号として受け入れています。漢字の意味や語感からその単語の意味やイメージを作るというのは, 日常では我々はよくやりますが, 科学では誤解の元ですから, あまりやらないほうがよいでしょう。

ここで「流体」という概念について説明しよう。まず, ガスボンベの中のガス, プールやコップの中の水, 消しゴムのように, 一定の大きさの空間を気体や液体や固体がみっちりと連続的に埋めることで構成される物体を連続体という。

そして,「静止状態ではせん断応力が働かないような連続体」を流体と定義する。(液体の) 水は流体である。すなわち, プールやコップの中で静止している水には, せん断応力は存在しない。なぜか? もしそれが存在したら, 水は静止せず, 流れて変形するのだ[*5]。

そして, 流体, すなわちせん断応力が働かないような連続体にはパスカルの原理が成り立つということが数学的に証明できる[*6]。つまり, 流体とは, パスカルの原理

---

*3 ただし, 圧縮を正の応力と定義する場合。
*4 ただし, 圧縮を正, 引っ張りを負とする。なお, この「3 つの面」は, 互いに直交しさえすれば, 任意の向きでよい。いろんな選択肢があるが, それぞれで定義した圧力は結果的には同じ値になる。
*5 パスカルの原理のところでマヨネーズで説明したことがそれである。
*6 正確には, せん断応力が存在しないときは垂直応力の大きさは面の向きによらず等しい, ということが証明できる。

が成り立つような連続体のことである，と言ってもよい。

● **問** 36　流体とは何か?「せん断応力」という言葉を使う定義と，「パスカルの原理」を使う定義をそれぞれ述べよ。

よくある質問 65　つまり流体って液体と気体のことですか? ... そうとも限りません。固体なのに流体というものもあります。例えば地球内部のマントル。地殻の下の厚さ 3000 km 程の部分ですが，ここは高温な岩石からなりますが，液体ではなく固体です。しかし，非常に小さな速さで変形していることがわかっています（マントル対流）。また，氷も固体ですが流体です。山岳地帯（アルプスやヒマラヤ）や高緯度地帯（グリーンランドや南極）にある氷河は，数 100 m から数 1000 m もの厚さの氷が，自重で変形して，ゆっくり変形・流動しています。

さて，圧力は上の定義から，向きを持たない量である。水圧は圧力の一例である。もちろん，静止した水の中で，水圧のせいで何かの物体に力が及ぼされる時，その力はベクトル（向きを持つ）なのだが，その向きは，「圧力」がもともと持っているものではなくて，圧力を引き受ける物体の表面の向きが決める（面に垂直な向きになる）。だから圧力自体に向きを考えることはできないし，その必要もない。従って，「圧力」は本質的にはベクトルではなく，スカラー量なのだ。

よくある質問 66　でも，中学校や高校では

$$\textbf{力} = \textbf{圧力} \times \textbf{面積} \tag{3.1}$$

って習いましたが，力はベクトルですよね。でも面積は当然スカラーだし，もし圧力がスカラーなら，圧力 × 面積 はスカラーになってしまい，ベクトルにはならないです。矛盾していませんか? ... 実は「面積」は本来はベクトルとして扱うべきものなのです。正確に言うと，「面積ベクトル」と言って，「その面に垂直な向き」を向きとし，「その面の面積」を大きさとするようなベクトルです。そして，単位面積あたりの力は，一般的には圧力ではなくむしろ応力です。つまり，上の式は

$$\overrightarrow{\text{力}} = \text{応力 かける } \overrightarrow{\text{面積ベクトル}} \tag{3.2}$$

と解釈するのが正しいのです。

よくある質問 67　じゃあ，「応力」はベクトルですか? スカラーですか? ... 既に「面の向き」が決まっている場合は，応力の向きも決まっているので，式 (3.2) を忘れて面積をスカラーとみなして応力をベクトルとみなすという考え方もアリでしょう。しかし，いろんな場合を含めてちゃんと考えるなら，式 (3.2) が大切な式です。この式は，右辺の面積ベクトルに応力をかけることで力というベクトルになるという式です。つまり，応力は数学的にはベクトルをベクトルに写す「写像」であり，それは数学的にはスカラーでもベクトルでもない，テンソルという概念になります（応力テンソルといいます）。これはいずれ数学で学ぶ「線型写像」や「行列」で説明できるものです。まあ今はあまり気にしないで，スルーして下さい。

3.6　弾性力（フックの法則）

次にバネについて考えよう。バネは伸び縮みすると元にもどろうとする力を発揮する。それを表す法則をここで考えるのである。なお，この話はバネだけでなく，いずれバネ以外の多くの「変形すると元に戻ろうとする力を生じるような物体」（楽器の弦，ゴムボール，鉄骨，野菜や果物，多原子分子，地球など）に適用される。バネはそのモデルなのだ。

まずバネの一端を壁かどこかに固定して，そこからバネを直線上で伸び縮させることを考えよう。バネのもう一端（壁ではない側）を点 P と呼ぶ。直線上に x 軸をとり，その上での点 P の座標を x としよう。さて，バネに力がかかっていない（だらんとした）状態を自然状態，そのときのバネの長さを「自然長」と呼ぶ。自然状態での点 P の位置を原点 $(x = 0)$ としよう。

バネが P に対して発揮する力を F とすると，F は P の位置 x 依存する関数である。それを $F(x)$ と書こう。その関数を具体的に知らなくても，P が位置 x_0 の近くをうろうろしている場合に限れば，線型近似（「ライブ講義 大学 1 年生のための数学入門 第 5 章）を使って

$$F(x_0 + \Delta x) \fallingdotseq F(x_0) + F'(x_0)\Delta x \tag{3.3}$$

となる（$F'(x)$ は $F(x)$ の導関数）。Δx は，P が x_0 からどれだけ離れているかを表す量である。そのような量（基準として考えている場所からどれだけ離れているか）を変位という。ここで，$x_0 = 0$ としてみよう。そのときはバネは自然状態だから $F(0) = 0$ である（図 3.8 の上の図）。すると上の式 (3.3) は，

$$F(\Delta x) \fallingdotseq F'(0)\Delta x \tag{3.4}$$

となる。この式は Δx が 0 に十分に近い量のときは，良い近似で成り立つ。そこで，**Δx が十分に 0 に近い範囲に限定して，近似の誤差を無視できると仮定（モデル化）すると**，$F(\Delta x) = F'(0)\Delta x$ となる。ここで，形式的に Δx を x と書き直せば[*7]，

$$F(x) = F'(0)x \tag{3.5}$$

[*7] Δx のままでも不都合は無いが，Δ を書くのがめんどくさいので x と書くのだ。

となる。ここで $F'(0)$ の符号について考えよう。バネの力は, 戻ろうとする方向に働くのだから, 変形（変位）と逆向きに働く。従って, x が正なら F は負, x が負なら F は正である。従って, 式 (3.5) において $F'(0)$ は負であるはずだ。そこで, 形式的に $F'(0)$ を $-k$ と書き換えよう。このとき k は正の定数である。すると式 (3.5) は,

フックの法則

$$F = -kx \tag{3.6}$$

となる。これをフック（Hooke）の法則という（ちなみにこれを発見したロバート・フックは, 細胞を発見して cell と名付けた人物でもある)。

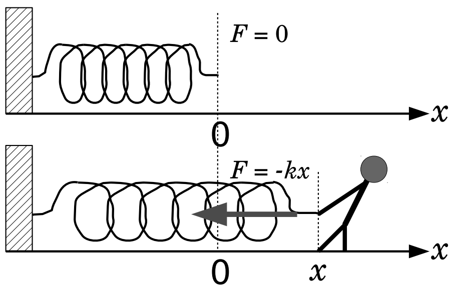

図 3.8　フックの法則

バネの話に戻すと, F は, バネが端に及ぼす力（バネの端についた物体がバネから受ける力）, x はバネの伸び, k はバネ定数と言われる定数である。

このように, 本来は複雑かもしれない関数を一次関数（一次式）で近似する考え方を線型近似という。要するに, フックの法則は, 力と変形（変位）の関数の線型近似式に過ぎず, バネ定数とはその関数の微分係数（の絶対値）に過ぎない。

式 (3.6) から明らかに, バネが伸びるほど力の大きさは大きくなる。繰り返すが, 右辺のマイナスは, バネの伸びの方向（x の符号）と力の方向（F の符号）が逆だよ, ということを示す。バネは伸びると（x が正だと）, 縮もうとする力, つまりひっぱる力を生じるから F は負になる。一方, バネは縮むと（x が負だと）, 伸びようとする力を生じるから F は正になる。

● **問** 37

(1)　フックの法則とは何か?
(2)　バネ定数とは何か?
(3)　バネ定数の SI 単位は?

さて, この「法則」は, 万有引力の法則やクーロンの法則よりも, ずっと一般性の低い「しょぼい」法則である。フックの法則は, 限定的な例にしか成り立たない経験則に過ぎない。実際, バネをどんどん伸ばすと, まっすぐな針金になってしまって, それ以上は伸びようがない。無理に伸ばすと, ぶちっと切れてしまう。従って, フックの法則は, バネの伸び（x）がゼロに近いときにしか成り立たない。また, そもそもなぜこのような力が生じるかというと, バネの中の物質を構成する原子や分子どうしが引き合う力（主に電気力）がその根源にあるからである[*8]。

式 (3.6) は, バネだけに成り立つのではなく, 一般に, 多くの物質や物体に成り立つ。例えば橋を構成する鉄骨は, 荷重や自重によって伸び縮みする。フックの法則に従うような力を弾性力と呼ぶ。弾性力によって変形する物体を弾性体と呼ぶ。そう考えると, フックの法則は,「法則」というよりもむしろ, 弾性力や弾性体の定義である, とも言えるだろう[*9]。

● **問** 38　弾性力とは何か?弾性体とは何か?

● **問** 39　弾性体ではない存在として,「塑性体」というものがある。塑性体とは何か, 調べよ。

よくある質問 68　高校ではフックの法則は $F = kx$ で習ったのですが, $F = -kx$ との考え方の違いは? ... $F = kx$ と書くときは, 力の大きさだけを考えていますが, $F = -kx$ の場合は力の向きまで考えています。

さて, 例として, バネ定数 k のバネを天井からつるし, その先端に質量 m の物体を吊り下げて静止させる。バネ自体の質量は無視しよう。では, バネはどのくらい伸びるだろうか?

鉛直下向きに x 軸をとり, 物体をつるす前のバネの先端の x 座標を 0 とする。物体をつるしてバネが x だけ伸びたとき, 物体にかかるバネの弾性力は $-kx$, 物体にかかる重力は mg である（ただし g は重力加速度)。前節で述べた,「物体が静止している場合, その物体に働く力（合力）はゼロである」という法則（「力のつりあい」）から, この物体が静止するにはこの 2 つの力の和がゼロでなければならない。従って,

$$-kx + mg = 0 \tag{3.7}$$

[*8] ただし, 基本法則からフックの法則を導くのは, 簡単ではない。
[*9] ただし, 違う立場の定義もあるので注意。

従って, $kx = mg$, 従って,

$$x = \frac{mg}{k} \tag{3.8}$$

である。これがバネの伸びである。

● **問** 40　同じ物体と同じバネを月面に持っていって同様の実験をするならば, バネの伸びは地球上の何倍になるか?ヒント：地球上の重力加速度に相当するものは, 月面上ではどうなるだろうか?

● **問** 41　図 3.9 左のように, バネ定数 k のバネを 2 本, 平行にならべて天井からつるし, その先端をつなげて, そこに質量 M の物体を吊り下げて静止させる。バネは $Mg/(2k)$ だけ伸びることを示せ。この状況で 2 本のバネをあわせて 1 つのバネとみなすとき, そのバネ定数は $2k$ となることを示せ。ヒント：重力 Mg を, 2 本のバネで分担する。バネ定数を求めるには, バネ定数の定義を思い出すこと。(バネの並列)

● **問** 42　図 3.9 右のように, バネ定数 k のバネを 2 本, 縦につなげて天井からつるし, その先端に質量 M の物体を吊り下げて静止させる。バネは $2Mg/k$ だけ伸びることを示せ。この状況で 2 本のバネをあわせて 1 つのバネとみなすとき, そのバネ定数は $k/2$ となることを示せ。ヒント：こんどは重力を分担できない。上のバネにも下のバネにも, Mg の力がかかる。(バネの直列)

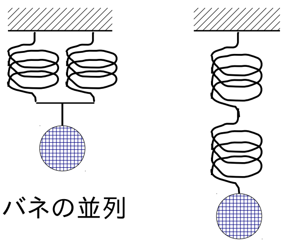

図 3.9　バネの並列と直列

● **問** 43　バネ定数 k のバネを a 本だけ縦につないだものを b 本だけ束ねて大きなバネを作ると, そのバネ定数は bk/a となることを示せ（ヒント: n 本の直列を m 本だけ並列)。

断面積 A, 長さ L の棒 X のバネ定数を考える。この棒を, 無数の小さい（細くて短い）棒の集合（それぞれが弾性体）と考えれば, 棒 X の断面積は, 小さい棒の並列の本数に, 棒 X の長さは, 小さい棒の直列の本数に, それぞれ比例するので, 棒 X のバネ定数 k は, A/L に比例する。そこで,

$$k = E\frac{A}{L} \tag{3.9}$$

と書く。このとき E をヤング率と呼ぶ。ヤング率は物質に固有の定数（物性値）である。

● **問** 44

(1)　ヤング率の SI 単位は?
(2)　鉄のヤング率を調べよ (「理科年表」[*10]などを使え)。
(3)　長さ 10 m, 直径 2.0 mm の鉄線の先に 10 kg の物体を吊り下げると, 鉄線はどのくらい伸びるか?
(4)　(3) で直径を半分 (1.0 mm) にするとどうなるか?
(5)　(3) で鉄のかわりに銅を使うとどうなるか?

ヤング率を使うと, フックの法則は以下のように書ける：

$$F = -E\frac{A}{L}x \qquad \text{従って,}$$

$$\frac{F}{A} = -E\frac{x}{L} \tag{3.10}$$

左辺の F/A は単位面積あたりの力で, 以前述べた垂直応力（ただし, ひっぱりを正とする）である。

右辺の x/L は単位長さあたりの伸びであり,「ひずみ」と呼ぶ。応力を σ, ひずみを ϵ と書くと, 上の式は,

$$\sigma = E\epsilon \tag{3.11}$$

と書ける（符号はとりあえず無視した)。これもフックの法則のひとつの表現である。ここで示したフックの法則は, 1 方向の伸びと, それと同方向のひずみとの間の関係であったが, それ以外にも, 様々な方向の応力と様々な方向の歪みに関しても同様の関係が成り立つ。それを総称してフックの法則と呼ぶ。ただし, それをきちんと表現するには, 前述したテンソルという数学が必要であり, それは 2 年生以降に学ぶ。

● **問** 45　(1) 応力の SI 単位は?　(2) ひずみの SI 単位は?

よくある質問 69　フックの法則はバネだけの話かと思っていましたが, もっと一般的なものなんですね。... そう。要するに力と変形の線型近似ですから, ほとんどの物体に成り立ちます。地震の波もフックの法則で説明されます。

[*10] 国立天文台 (編)「理科年表」丸善。毎年, 最新版が出ているが, 基本的なデータはそんなに頻繁には変わらないので, 昔の年のものを参照しても大丈夫。

3.7　垂直抗力

君が地面に立つとき, 君は地球から重力（引力）を受ける。ところが, 君が静止しているためには, 君にかかる合力はゼロでなければならない。さもなければ君の体は地面にどんどんめり込んでいくはずだ。「力がどうであれ, そこに固い地面があれば, めり込んでいくわけがないだろう」と君は思うかもしれない。しかし, その考え方は物理学ではダメなのだ。物理学には「固いものにめり込んでいくことはできない」というような法則は存在しない。固いものの表面で物体が静止することも, あくまで「力のつりあい」で説明しなければならないし, 説明できるものなのだ。

君の足下に, 固い岩があったとしよう。その岩は, 君の体重のせいで, ごくわずかだが, 変形するのだ。その変形をもとに戻そうとする力, つまり弾性力が, 君の体を押し返すのだ。それが重力と釣り合って, 君の体にかかる合力はゼロになり, 君は地上で静止できるのだ。

このように, 物体が, 固い面に対して垂直に力をかけると, 面はほとんど変形せずに（といっても弾性力を発揮する程度には変形するが), それと等しい大きさで逆向きの力を, 面は物体に対して働く。その力を垂直抗力と呼び, 慣習的に N で表す。

これは物体と「固い面」との間の「作用・反作用の法則」にすぎないじゃないか, と君は思うかもしれない。それは早計である。仮に垂直抗力が無くたって, 作用・反作用の法則は成り立つ。君の体に働く重力は, 地球が君を引っ張るのであり, その反作用として君は地球を引っ張る。君の足元に地面があったとしても, その地面がゆるゆるの状態で, 君を全く支えてくれないならば, 君の体は加速度を持って地中に沈んでいくだけだ。それでも作用・反作用の法則は（君の体と地球との間で）成り立っている。

でも, もしそこに固い地面があるならば, その地面が垂直抗力を発揮して君の体を支えるのである。逆に言えば, 垂直抗力を発揮してくれるような面のことを「固い面」と言うのだ[*11]。

これらを総合して, 以下のような例を考えよう。図 3.10 のように, 傾斜角 θ のなめらかな斜面に, 質量 m の物体が載っている。この物体には, 重力 mg が鉛直下向きに働いている。

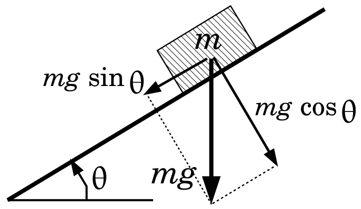

図 3.10　斜面に載った物体と, それにかかる重力

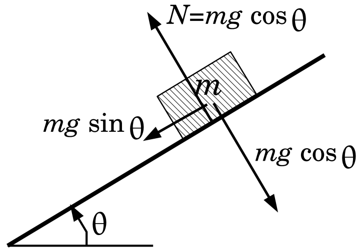

図 3.11　物体は斜面から垂直抗力 N を受ける。

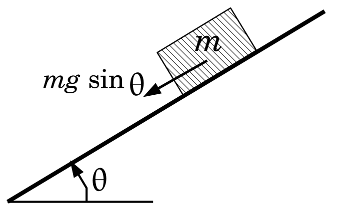

図 3.12　結局, 物体は斜面に平行な力だけを受ける。

このとき, 図 3.10 のように, 鉛直下向きの重力 mg は, 斜面に沿った方向の力と斜面垂直方向の力に分解して考えてもよい。前者の大きさは $mg\sin\theta$, 後者の大きさは $mg\cos\theta$ である。

と言われても, なぜ, 斜面に沿った方向と斜面垂直方向に分解するのだろうか? そうするのが便利だからだ。というのも, もし斜面が固ければ, 物体が動き得るのは斜面に平行な向きだけで, 斜面に垂直な方向には動けない。従って, 斜面に垂直な方向では, 物体に働く力は釣り合っているはずだ。それをまずあぶり出せば, 物体にかかる合力は求めやすくなる。

さて話を戻すと, 物体にはもともと重力の斜面垂直成分 ($mg\cos\theta$) が働いているから, それと同じ大きさで物体を斜面に垂直に押し返す垂直抗力 N があるはずだ (図 3.11)。一方, 今考えている斜面はなめらかなので, 斜面に沿った方向には斜面は物体に力をおよぼさない (つるつるしている!)。結局, 物体に働く重力と斜面から

[*11] この例では, 君の体に働く力は, 地球から受ける重力と, 固い地面から受ける垂直抗力である。これらの釣り合いによって君の体は静止する。一方, 固い地面の表層に働く力は, 君の体に働く垂直抗力の反作用（上から下に押す力）と, より下の地面から受ける弾性力（下から上に押す力）, そしてその層に働く重力（下向き）である。これらの力が釣り合うことで, 地面表層も静止する。

物体が受ける垂直抗力を足し合わせると, 物体に働く力として, 図 3.12 のように, 斜面に沿った重力 $mg\sin\theta$ だけを考えればよいことになる。

● **問** 46　図 3.13 のように, 傾斜角 30 度と 60 度の 2 つのなめらかな斜面に, それぞれ質量 3 kg と質量 m の物体が載せられ, 滑車を介してロープでつながり, 静止している。物体と斜面の間の摩擦は無く, 滑車とロープの間にも摩擦は無く, ロープの質量は無視できるほど軽いとする。m を求めよ。ヒント：ロープにかかる張力の大きさを T とする。まず左の物体が静止する条件から T の大きさが求まる。そしてその T は, 右の物体にもかかる。

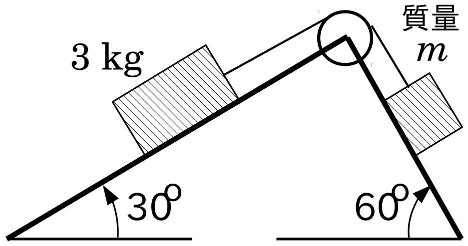

図 3.13　2 つの斜面に載せられ, ロープでつながって静止する 2 つの物体

よくある質問 70　斜面と滑車の問題は, 高校時代に挫折したとこです。... 滑車を介したロープはどこでも張力が同じ, というのがポイントです。

（以下は発展的な内容なので読み飛ばしても構わない）垂直抗力は, 物体の位置をある面内に限定するために出てくる力である。もちろんそれは面の弾性力などから発生するのだが, 物理学の問題として解析する際は, その向きや大きさは, 物体が面にめり込んだりしないように（辻褄が合うように）決められる。一般化に, 位置や運動を制限するような条件を拘束条件と呼び, 拘束条件を実現するために働く力を拘束力 (constraint force) という。垂直抗力は拘束力の一種であり, 「物体がその面にめり込まない」という拘束条件を実現する。張力も拘束力の一種であり, 「物体どうしの（糸に沿った）距離を変えない」という拘束条件を実現する。現実的・実用的な状況では運動の多くは拘束条件を伴うが, 拘束条件を扱う力学の一般論はかなり難しい。

3.8　摩擦力（クーロンの摩擦法則）

我々は日常経験から, 物体と物体を接触させたまま動かす（ずらす）には力が必要だと知っている。ということは, 接触する物体どうしには, それらを「ずらすまい」とする力が働くのだろう。そのような力を, 摩擦力という。これは, 以下の 2 つの式に従うことが多い。

まず, N を, 物体どうしが接触面を介して接触面に対して垂直に互いに押し合う力の大きさとする。2 つの物体が相対的に静止している場合（ずれない場合）は, 摩擦力は静止摩擦力とよび, その大きさ F_{s} は,

$$F_{\mathrm{s}} \leq \mu N \tag{3.12}$$

を満たす。また, 接触面を介して 2 つの物体が相対的に運動している場合（ずれる場合）は, 摩擦力は動摩擦力とよび, その大きさ F_{m} は,

$$F_{\mathrm{m}} = \mu' N \tag{3.13}$$

となる。μ, μ' は, それぞれ静止摩擦係数, 動摩擦係数とよばれる定数で, 接触面の物質や状態に依存する。

これを, クーロンの摩擦法則という。この「クーロン」は電気的な力の「クーロン力」のクーロンさんと同一人物である。偉い学者は一人でいくつもの法則を発見するので, 後世の我々は「クーロンの法則といってもどの法則だ?」と混乱してしまうのだが, まあそれは仕方がない。

さて, 式 (3.12) に不等号"≤"が入っているのは, 次のような理由による: 摩擦力は, 接触中の 2 つの物体を「ずらすまい」とする力である。従って, 静止中の 2 つの物体の間に, 互いをずらそうとする力がそもそも働いていない場合は, あえて「ずらすまい」とする必要はない。そのとき, 静止摩擦力はゼロである。また, たとえ, 「ずらそうとする力」が働いても, それが弱ければ, それを打ち消す程度の摩擦力があれば十分であり, それ以上は必要ない。物体が静止しているからには「力のつりあい」が成り立つはずで, となると静止摩擦力は「ずらそうとする力」と反対の向きに**同じ大きさで**働いていると考えざるを得ないのだ。従って, 静止摩擦力は, ある一定の範囲（μN 以下）で, 「ずらそうとする力」に対応してそれを"ちょうど"打ち消す力を発揮するのである。

さて, 多くの場合, $\mu' < \mu$ である。つまり静止摩擦係数 μ は動摩擦係数 μ' より大きい。つまり, 摩擦力は, 静止状態の方が, 動いている状態よりも強い。それがなぜなのかは, 様々な説があるが, 決定打は無い。

この「クーロンの摩擦法則」も, 一般性の低い「しょぼい」法則である。単なる経験則であり, この法則から外れるような例もある。摩擦力は, 結局, 物質と物質の間に働く力なので, おそらく電気力がその根源なのだろう。しかし, 基本法則からクーロンの摩擦法則を導くことには, まだ誰も成功していない。実は, 摩擦力の起源や実体は, よくわかっていないのだ。クーロンの摩擦法則は誰もが「しょぼい」と思っているが, 誰もそれに代わる法則を見つけ出せないでいる...

よくある質問 71 $\mu' < \mu$ となる理由がわかりません。... 正確な理由は不明。よく言われるのが, 静止状態では接触面での微妙な凹凸が互いにかみ合って抵抗が大きいのに対し, 動いているとなかなか凹凸がかみあわず, 滑りやすくなる, という説明。

よくある質問 72 「車のブレーキは, タイヤを完全に止めるより, 少し回しながらのほうが, 地面との摩擦が大きくなって早く止まれる」と聞いたことがあります。$\mu' < \mu$ と関係していますか? ... まさにそうです。それを利用したのが ABS(アンチロック・ブレーキング・システム)です。

● **問** 47

(1) クーロンの摩擦法則とは何か?

(2) 摩擦係数とは何か?

(3) 摩擦係数の次元は?

(4) アンチロック・ブレーキング・システムを説明せよ。

● **問** 48 傾斜角 ϕ の斜面に, 質量 m の物体が載って, ぎりぎりで静止している。これよりも少しでも傾斜がきつければ, 物体は滑り出してしまう。このとき, 傾斜角 ϕ と静止摩擦係数 μ の間に, 次の関係が成り立つことを示せ(このような ϕ を安息角という)。

$$\mu = \tan\phi \tag{3.14}$$

式 (3.14) は, 実際の物体どうしの静止摩擦係数を測るときに便利な理論である。2 つの物体を接触させ, まず接触面が水平になるように置く。そして, それらを徐々に傾けていって, 片方が滑り出したら, そのときの傾きの角 ϕ を分度器で測って式 (3.14) に入れればよい。

さて, 静止摩擦係数 μ や動摩擦係数 μ' は接触面の物質や状態に依存する, と述べたが, 接触面の面積には依存しないのだろうか? つまり, 「垂直に互いに押し合う力」が同じであっても, 接触面の面積が大きくなったり小さくなったりすることで, 摩擦力は変わったりしないのだろうか?

実は, 驚くべきことに, 「面積には依存しない」のである。それは, クーロンの法則(式 (3.12), 式 (3.13))から数学的に証明される。ここでは述べないが, 興味のある人は挑戦してみよう!!

よくある質問 73 黒板を手で押すとき, 黒板がわずかに変形してその弾性力が手を押し返すことで手が静止すると聞きました。でも, 手と黒板の間に, もし作用・反作用の法則がはたらくなら, 黒板は変形しないでも, 同じ大きさで逆向きの力が手にはたらくと思います。大きさが同じなら釣り合うんじゃないんですか? ... とても良い質問です。作用・反作用の法則を学ぶとき, 多くの人が感じる疑問です。物体が動く(運動状態を変える)かどうかは, 「その物体に働く力」が釣り合っているかどうかで決まります。ところが作用・反作用の法則は, 「その物体に働く力」と同じ大きさで逆向きに「相手の物体に働く力」があるという話です。なので, 「大きさが同じで向きが逆」ということだけを切り出して「ならば力は釣り合うのでは?」と考えるのは早計です。手が物体を押す力と, 物体が手を押し返す力が「釣り合っている」としても, そのことは物体の運動にも手の運動にも, 直接的には無関係なのです。つまり, 作用・反作用の法則と力のつりあいは無関係なのです。

例として, ボール投げを考えましょう。ボール投げの際, 手はボールに力をかけますが, その力はボールを加速することに寄与します(これは後に学ぶ運動方程式で説明されます)。一方, ボールは等しい大きさで逆向きに手を押し返します(作用・反作用の法則)。だからボールを投げるときに手は負担を感じるのです(だからピッチャーには体力が必要)。このとき, ボールにかかる力は釣り合っていません。手にかかる力(ボールから受ける反作用の力と, 腕の筋肉が手を押す力)も釣り合っていません。

手が黒板を押すとやがて動かなくなるのは, 筋肉(それは肩から手首にかけての部分)が手(手首から先の部分)を押そうとする力と, 黒板が弾性力(それは結局は垂直抗力)で手を押そうとする力が釣り合うからです。その弾性力は, 黒板がわずかだけど歪むことで発生します。従って, 手が黒板を押し始めてから黒板が十分に歪むまでの間は, 黒板の弾性力は手が押す力よりも弱いので, 黒板は徐々に押し込まれて変形します。その過程では, 手が押す力の「余り」は, 黒板の変形を加速することに寄与します(運動方程式)。そして, それらの和, つまり手が押す力と同じ大きさで逆向きの力を手は黒板から受けます(これが作用・反作用の法則)。これは変形の途中でも, 変形しきったときでも, 同じこと。ところが変形しきったときは, 黒板の加速度はゼロになるので, 結局, 手が押す力と黒板の弾性力は等しい大きさになります。

よくある質問 74 物体に力がかかるとき, ごくわずかでもめり込むなら, かなり長い時間, 力をかけていたら, その物体は

へこみますか? ... 力の大きさと素材によりますが, そういう場合も多いでしょう。短時間では弾性的な（変形に比例した反発力を生じ, 力が取り除かれると元に戻る）物体も, 長時間, それなりの力にさらされ続けたら, 反発力を徐々に失い, 変形が戻らなくなったりします。この性質を弾塑性と呼びます。「レオロジー」という学問分野で扱います。

演習問題 1　バネ定数 2.0 N/m のバネを, 左端から 1.0 N, 右端から 1.0 N の力でそれぞれ引っ張った。伸びはどのくらいか?

演習問題 2　動摩擦係数 μ' は, 接触面の面積には依存しないことを証明せよ。

実験 1　1 枚のティッシュペーパーから, 幅 2cm ほどの帯を 2 枚切り出し, それぞれ帯 A と帯 B と呼ぶ。帯 A はそのままにし, 帯 B はねじる（数 10 回）。それぞれの帯について両端をひっぱって引きちぎる。どちらが切れにくい (引きちぎるのにより大きな力が必要) か? また, 僅かに湿らせると強さはどうなるか? 結果を述べ, 理由を考察せよ。

3.9　応用: 川を流れる水の水圧

本章の最後に, 生物資源学類に関係した応用的な話題を扱おう。川は水資源の供給源であり, 多様な生物の生息地でもある, 大事なものである。川の水の流れ方はそれらの基盤になる情報であり, その予測や制御には物理学が必要である。

川がプールと違うのは, 傾斜面の上を流れているということである。図 3.14 は水平面から角 θ だけ傾斜した川を横から見た図である。水は左上から右下に, 時間的に一定の速度で流れている。川底に沿って下流方向に x 軸をとり, それに垂直に上向きに z 軸をとる。ここで注意してほしいのは, z 軸は鉛直上向きではないということだ。

さて, 水面が $z = H$ にあるとする。つまり川底から水面まで, z 軸に沿った距離が H である。この H を「川の深さ」と定義する。

よくある質問 75　**え!? 深さって, 鉛直方向に測るのではないのですか**? ... そこがポイントなのです。もし鉛直方向に測ったら, この場合は H より大きくなりますね。そういうふうには測らないのです。

そして, $z = h$ の位置では, 「水深」を $H - h$ と定義する。この位置での水圧（水面上にかかる大気の圧力の影響は考えない）$p(h)$ を求めよう。そのためには, ここより上の水塊（ハッチのかかった 2 つの四角形のうちの上に相当する; 底面積を A とする）について, 力の釣り合いを考える。この水塊の体積は $A(H - h)$ だから, 質量は $\rho A(H - h)$ であり（ρ は水の密度）, 鉛直下向きに $\rho g A(H - h)$ という大きさの重力がかかる（g は重力加速度)。それを斜面に垂直（鉛直ではない）に下向きと, 斜面に沿って下流方向に分解すると（図では点線矢印）, それぞれの大きさは $\rho g A(H - h)\cos\theta$, $\rho g A(H - h)\sin\theta$ となる。前者に釣り合うように, この水塊はその下の水塊から同じ大きさで斜面に垂直に上向きの力（垂直抗力）を受ける。つまり, この上下の水塊の境界面（$z = h$）に, $\rho g A(H - h)\cos\theta$ という力が発生する。これを面積 A で割ると, その場所の水圧 $p(h)$ が得られる。すなわち,

$$p(h) = \rho g(H - h)\cos\theta \tag{3.15}$$

である。もし傾きが 0 なら（水平で流れていない川）, $\theta = 0$ だから $\cos\theta = 1$ となり, $p(h) = \rho g(H - h)$ となって, プールなどでの水圧と同じになる。

ところが, このような理屈を知らないで, 水深を鉛直方向で測ってしまい（その場合は $(H - h)/\cos\theta$ になる）, しかも水圧を単純にプールと同じように密度 × 重力加速度 × 水深で求まると考えてしまうと,

$$p(h) = \rho g(H - h)/\cos\theta \qquad \text{(間違い!)} \tag{3.16}$$

のように思ってしまう。河川の環境を研究する人は, そのようなミスをしてはいけない。

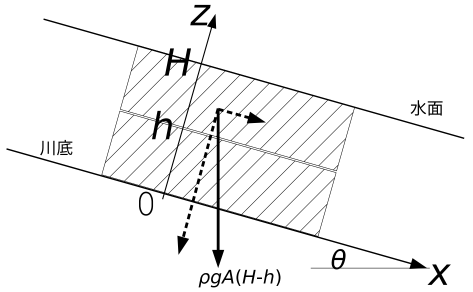

図 3.14　川を流れる水を横から見た図

河川や水路や沿岸など, 水がある場所・流れる場所の機能や環境は, 当然ながら水の動きに大きく影響される。ここで挙げたのはごく初歩的な例だが, 水の動きを理解・予測するには, 奥深い高度な物理学が必要なので

ある。その体系を水理学と呼ぶ。水に関わる農業, 防災, 環境, 生物学などを研究したり仕事にしようと思う人は, いずれ水理学をしっかり勉強することになるだろう。

● **問** 49　斜度 10 度の川で, 水深が 0.5 m の位置での水圧を式 (3.15)（ただし式）と式 (3.16)（間違った式）のそれぞれで計算し, 値を比べよ。（前者は約 4.8 kPa, 後者は約 5.0 kPa になるはず。回答は有効数字 3 桁で。）

3.10　解答

答 31 ロープの各箇所に仮想的に断面を考える。「人対壁」では, 人 A がロープを引く力は, 各断面の左側に, 大きさ F で右向きにかかる。その反作用は, 各断面の右側に大きさ F で左向きにかかる。それがロープの左端（壁との接点）まで伝わり, 壁との接点では, 壁はロープから, 大きさ F で右向きの力を受ける。その反作用として, ロープは壁から大きさ F で左向きの力を受ける（この「壁が引く力」がロープの各箇所での左向きの力の源泉であり, そのおかげで「作用・反作用の法則」とつじつまが合う）。これは, 壁のかわりに別の人がロープを左端で大きさ F の力で左向きにひっぱるのと同じこと。従って,「人対人」でも,「人対壁」でも同じことになる。

答 32 君の体には 2 箇所でロープから上向きにひっぱられている。また, ロープの張力 T は, ロープのどこでも等しい。従って, 君の体には上向きに $2T$ の力がかかる。一方, 重力によって, 君の体に下向きに mg の力がかかる。座標軸を, 上向きを正にとると, 力のつりあいから, $2T - mg = 0$。従って, $T = mg/2$。一方, 君の手がロープを引く力は T に等しいので, 結局, $mg/2$ に等しい。

答 33 滑車 B の両端のそれぞれで, ロープの張力 T が滑車 B を上向きに引く。一方, 滑車 B には質量 m の物質にかかる重力 mg が下向きにかかる。力のつりあいから, $2T - mg = 0$。従って $T = mg/2$。ロープの張力は, ロープのどこでも等しいから, 君の手にかかる力も T, すなわち $mg/2$ である。

答 34 君の手がロープを引く力は, 君の手の筋肉の筋繊維の収縮から生じる。この現象は, 筋繊維を構成する高分子の変形によって生じる。分子スケールの現象を支配する力は, ほとんどの場合, 電気力である。従って, 君の手がロープを引く力の根源は電気力である。

答 37 (1) バネの伸び（変位）x と, バネが押す力 F が比例する, という法則。(2) フックの法則を $F = -kx$ と書くときの係数 k。(3) $k = -F/x$ なので, F の単位（すなわち N=kg m s^{-2}）を x の単位（すなわち m）で割ればよい。答は, kg s^{-2}。

答 38 力と変位が比例する, という, フックの法則が成り立つような力を弾性力という。弾性力だけで変形する物体を弾性体という。

答 39 塑性体とは, 変形すると元に戻らない物体である。（弾性体は, 力がかかると変形するが, かかる力が無くなれば元にもどる。）

答 40 質量 m の物体が地表にあるとき, バネの伸びが x_0 だったとする。バネの弾性力と（地球からの）重力のつりあいは, $-kx_0 + mg = 0$。一方, 質量 m の物体が月面にあるとき, バネの伸びが x_1 だったとする。月面での（月から受ける）重力は, 問 22 より, 地表での（地球から受ける）重力の約 1/6 なので, バネの弾性力と（月からの）重力のつりあいは, $-kx_1 + mg/6 = 0$。この 2 つの式から mg を消去すれば, $kx_1 = kx_0/6$。従って, $x_1 = x_0/6$。従って, 月面でのバネの伸びは, 地表での約 1/6 倍。

答 41 下向きに座標系をとる。左側のバネを A, 右側のバネを B と呼ぶ。バネ A について, バネが下端に働く力を F, 伸びを x とすると, フックの法則より,

$$F = -kx \tag{3.17}$$

である。左右対称なので, まったく同じ式が, バネ B についても成り立つ。一方, 質量 M の物体にかかる力は, 2 つのバネから受ける力, つまり $2F$ と, 重力 Mg である。物体が静止するには合力はゼロだから,

$$2F + Mg = 0 \tag{3.18}$$

これらの式から F を消去すると, $-2kx + Mg = 0$。従って, $x = Mg/(2k)$ である。バネが 1 本だけのときは, $x = Mg/k$ なので（式 (3.8)）, この結果は, k が 2 倍になったとみなせる。

答 42 下向きに座標系をとる。上のバネを C, 下のバネを D と呼ぶ。バネ C について, バネが下端に働く力を F_1, 伸びを x_1 とすると, フックの法則より,

$$F_1 = -kx_1 \tag{3.19}$$

である。バネ D についても同様に, バネが下端に働く力を F_2, 伸びを x_2 とすると, フックの法則より,

$$F_2 = -kx_2 \tag{3.20}$$

である。一方, 質量 M の物体にかかる力は, バネ D が下端に働く力, つまり F_2 と, 重力 Mg である。物体が静止するには合力はゼロだから（力のつりあい）,

$$F_2 + Mg = 0 \tag{3.21}$$

である。また, バネ D にかかる力は, バネ C が下端に働く力 F_1 と, 物体がバネ D を引っ張る力（つまり重力）である。バネ D に関する力のつりあいから,

$$F_1 + Mg = 0 \tag{3.22}$$

これらの式から, $Mg = -F_1 = -F_2 = kx_1 = kx_2$。従って, $x_1 = x_2 = Mg/k$ である。2 本のバネの伸びの合計 x は, $x = x_1 + x_2 = 2Mg/k$。バネが 1 本だけのときは, $x = Mg/k$ なので（式 (3.8)）, この結果は, k が 1/2 倍になったとみなせる。

答 43 問 42 と同様に考えれば, バネ定数 k のバネを a 本, 縦につなぐと, バネ定数は k/a となる。問 41 と同様に考えれば, バネ定数 k/a のバネを b 本, 束ねる（並列につなぐ）と, バネ定数は bk/a となる。

答 44 (1) $E = kL/A$ で, k の SI 単位は $\mathrm{kg\ s^{-2}}$, L/A の SI 単位は $\mathrm{m/m^2{=}m^{-1}}$ なので, E の単位は $\mathrm{kg\,s^{-2}m^{-1}}$。順番を入れ替えて $\mathrm{kg\ m^{-1}\ s^{-2}}$ などでも OK。なんと! これは Pa, すなわち圧力の SI 単位ではないか! (2) 約 2.0×10^{11} Pa。(3) まずこの鉄線のバネ定数 k を求める。$L = 10$ m, $A = 3.14 \times (0.002\ \mathrm{m}/2)^2 = 3.1 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2}$。従って, $k = EA/L = 6.2 \times 10^4\ \mathrm{kg\ s^{-2}}$。さて, 質量 m の物体を吊り下げたときの伸び x は,

$$x = \frac{mg}{k} = \frac{10\ \mathrm{kg} \times 9.8\ \mathrm{m\ s^{-2}}}{6.2 \times 10^4\ \mathrm{kg\ s^{-2}}} = 1.6 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

従って, 1.6 mm (約 2 mm) 伸びる。(4) 伸びはバネ定数に反比例する。バネ定数は断面積に比例する。従って, 伸びは断面積に反比例する。従って, 直径を半分にすると断面積が 1/4 倍になり, 伸びは 4 倍になる。従って, 伸びは 6.4 mm になる。(5) 銅のヤング率は 1.3×10^{11} Pa。鉄の約 0.65 倍。伸びはバネ定数に反比例し, バネ定数はヤング率に比例する。従って伸びはヤング率に反比例する。従ってヤング率が 0.65 倍になれば伸びは 1/0.65 倍。従って, 2.5 mm 程度になる。

答 45 (1) $\sigma = F/A$ より, σ の SI 単位は, $\mathrm{kg\ m\ s^{-2}/m^2}$ $\mathrm{=kg\ m^{-1}s^{-2}{=}Pa}$。(2) $\epsilon = x/L$ より, ϵ の単位は, m/m=1。従って, 単位無し! (無次元)

答 46 3 kg の物体にかかる重力の, 斜面平行方向の大きさは, (3 kg) $\times\ g \times \sin(\pi/6)$。質量 m の物体にかかる, 斜面平行方向の力の大きさは, $mg \times \sin(\pi/3)$。これらはともにロープの張力と等しい。ロープの張力 T は, ロープのどこでも等しいから, $T = (3\ \mathrm{kg})g\sin(\pi/6) = mg\sin(\pi/3)$。従って, $m = (3\ \mathrm{kg})g\sin(\pi/6)/\{g\sin(\pi/3)\} = \sqrt{3}\ \mathrm{kg} \fallingdotseq 1.7\ \mathrm{kg}$

答 47 (1) 物体どうしが接触している場合, 静止摩擦力 F_s と動摩擦力 F_m が, $F_\mathrm{s} \le \mu N, F_\mathrm{m} = \mu' N$ となること。ここで, N は物体どうしが互いに接触面に垂直に押し合う力。μ, μ' は, それぞれ静止摩擦係数, 動摩擦係数とよばれる定数。(2) クーロンの法則が上の式のようにかける時の, μ や μ' のこと。(3) $\mu' = F_\mathrm{m}/N$ であり, F_m も N も力なので, その比である μ' は無次元。μ も同様に無次元。

答 48 質量 m の物体に, 斜面に平行にかかる重力（重力の斜面成分）は $mg\sin\phi$。これが静止摩擦力 F_s とつりあっている。いま, 静止摩擦力は上限の状態なので, クーロンの摩擦の法則より, $F_\mathrm{s} = \mu N$。ここで N は物体と斜面の間に働く, 斜面に垂直方向の力であり, これは重力の斜面垂直成分に等しい：$N = mg\cos\phi$。従って, $F_\mathrm{s} = \mu mg\cos\phi$。斜面に平行な方向の力のつりあいより, $mg\sin\phi = F_\mathrm{s} = \mu mg\cos\phi$。従って, $\mu = mg\sin\phi/(mg\cos\phi) = \sin\phi/\cos\phi = \tan\phi$。

よくある質問 76　解答を省略するの, やめてください。 ... これ, 悩ましい話です。私は 10 年以上かけて数学や物理学のテキストを作っていますが, 最初の頃は問題の解答が雑だったり「略」が多かったのです。その頃は, 学生がよく「問題が解けません...」と言って質問に来ました。私は彼らと一緒に考えて, 「正解」だけでなく, 考え方や勉強法も助言できました。学生の中には, 解答のついていない問題を友達と一緒に考えているうちに, 数学や物理学の楽しさにのめりこんでしまい, 数学や物理学が大好きになってしまったという人達もいました。

しかし, 学生から「解答をつけてください」と言われて, 丁寧に解答をつけるようにしたら, 学生は質問に来なくなりました。そして, 「解答を丸暗記して再現しただけ」のような答案が増えました。数学や物理学にハマる学生も減りました。

そこで私は気づきました。正解を教えることで学生が成長するなら教えればよい。しかし, 正解を教えることが学生の成長を損なうこともあるのだと。

学問は, 「誰かが作った正解を真似したり丸暗記するもの」ではなく, 自分の頭で納得するまで考えるものです。そこが苦しくもあり, 楽しくもあるのです。そうやって人は成長し, 科学は発展するのです。その意味で, 「問題の解答」は, むしろ悪影響をもたらすものではないか, と, 私は悩んでいます。あなたはどう思いますか?

よくある質問 77　でも, 自力で解いた後の答え合わせには,

正解を教えてもらうことが必要です。 ... そもそも「正解」は主観的なものであり,「誰から見ても完璧な正解」が存在する保証は無いのですよ。実際, 教員や教科書が与える「正解」には, 間違っていることも多いのです。だから, あなたにとっての正解は, 誰かが与えるものでなく, あなたが作るものです。いろんな観点から考えぬいて,「これが正しい!」とあなた自身が納得し, 人にも自信を持って説明できるなら, それが「正解」です。お互いの「正解」を比べて議論しながら,「より正しい正解」を作るのです。学問は本来, そういうものです。

よくある質問 78 **でも, 解答が無いと勉強の効率が悪いです。いくら考えてもわからなくて詰んだとき, 解答がなければどうすればよいのですか**? ... その気持ちはよくわかります。そういうときこそ, 局面を打開するべく, いろんな工夫をして, いろんなことを学ぶのです。先生に質問に行ったり, 友達同士で一緒に考えたり, 図書館で関連する本を探したり, ネットの検索や掲示板を使ったり, いろんなことを自分から試みるのです。そうやって, 人間的にも成長するのです。

よくある質問 79 **そこまで物理学や数学に熱くはなれません。** ... ではその問題をスルーして先送りしますか? それもアリでしょう。他にもやりたいことや, やらなきゃいけないことがありますもんね。実際, 多くの研究者も, 解けない問題やわからない理論を先送りしたまま何年も抱えていたりするものです。どういう選択をするかはあなた次第です。

よくある質問 80 **でも, それだと単位がとれないかもしれないじゃないですか** ... それが嫌なら, 諦めずに何かするほうがよいでしょうね。とりあえず, 勇気を出して, 先生に質問してはどうでしょう?

第4章

仕事とエネルギー

注: この章を理解するには, 「積分」を理解していることが必要。

本章では「エネルギー」について学ぶ。世の中には「エネルギー」という言葉が溢れている。物理学でもエネルギーは大変重要な概念だ。なぜそんなに大事なのだろうか? というか, そもそもエネルギーとは何だろう? それを理解するには, まず「仕事」という概念を定義しなければならない。そこから話をはじめよう。

前章で, 体を滑車に吊るす話や, 動滑車で物を持ち上げる話や, 質量の異なる物体を 2 つの斜面に置いてロープでつないで静止させる話などを学んで, 君は不思議に思わなかっただろうか? これらので話は, とりあえず力のつりあいや, 作用・反作用の法則などは成立していた。だが, 物体をその重さの半分の力で持ち上げられる, というのは不思議だ。我々の素直な直感では, 物を持ち上げるにはその重さ以上の力が必要では? と思ってしまう。しかし実際の自然はそうではない。不思議だ。気持ち悪い。この不思議さをうまく説明し, この気持ち悪さから我々を救ってくれるシンプルな法則は無いのだろうか?

それがここで学ぶ「仕事の原理」そして「仮想仕事の原理」だ。これらは「力のつりあい」をもっと普遍的に述べた物理法則である。「力のつりあい」と等価だが, ある意味, それよりも深く, 根源的な法則なのだ。これらを使うことで, いろんな力の大きさがするっとわかってしまう。

4.1　仕事の原理

（この話は中学校や高校でも学んだことを覚えている人も多いだろうが, 真っ白な気持ちで向き合って欲しい。）

例 4.1　図 4.1 のように, 高さ h の丘に質量 m の荷車を押し上げることを考えよう。丘の下の点 O で運搬者は, 左側の緩い傾斜 (θ) の斜面 AB で押し上げようか, それとも右側のきつい傾斜 (θ') の斜面 A'B' で押し上げようか考えている。どちらの斜面を押し上げるのが楽だろうか? 摩擦は無視する。

直感的に, 左の（傾斜の緩い）斜面の方が押し上げるのは楽な気がするが, 実はそうでもない。左のほうが押し上げる力は小さくて済むが, そのぶん移動させる距離（点 A から点 B まで）は長いのだ。

この状況を整理するのが「仕事」という概念だ。仕事とは, とりあえずここでは以下のように定義する（後でこの定義は拡張される）:

仕事の定義

ある点に力がかかって, その点が動くとき, その力の移動方向成分と, 点が動いた距離の積を仕事 (work) という。

まず, O → A → B という経路を辿ったとき, 運搬者が発揮する力がする仕事を考えよう。O → A では荷車を水平方向に運ぶが, 摩擦が 0 ならば運搬者は荷車を押す力はほぼ 0 であり, 従って O → A での仕事は 0 である。そして, A → B では, 荷車にかかる重力（下向きで大きさ mg）の斜面に沿った成分（大きさ $mg\sin\theta$）に逆らって押し上げる。その距離は $h/\sin\theta$ である。従って A → B での仕事は $mg\sin\theta \times h/\sin\theta = mgh$ となる。つまり, O → A → B の経路での運搬にかかる仕事は mgh だ。同様の検討を O → A' → B' でも行うと, $mg\sin\theta' \times h/\sin\theta' = mgh$ となる。つまり, 丘に荷車を押し上げることにかかる仕事は, 左の斜面を経ても右の斜面を経ても同じである。

実はこのような状況は, この「斜面と荷車」の例だけでなく, もっと普遍的に成り立つことがわかっており, それを「仕事の原理」という。すなわち,

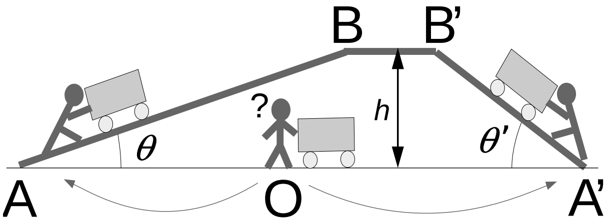

図 4.1　丘に荷車を押し上げる。どちらの斜面を経由するのが楽か?

仕事の原理

摩擦などが働かない状況では, 物体を移動させるとき, 経路や方法によらず, それにかかる仕事は同じである。

これは「原理」であり, なぜ成り立つかは問わず, 経験的に受け入れるべきものである。

4.2　仮想仕事の原理

仕事の原理をさらに拡張した, 「仮想仕事の原理」という不思議な原理がある（これも経験的に受け入れるべきものである)。

例 4.2　動滑車で物を持ち上げる話 (問 33) では, 滑車やロープや天井が互いに及ぼす力（張力など）は別とすれば, 関与する力は, 君がロープを下向きに引く力 T と, 物体に下向きにかかる重力 mg だ。ここで, 仮想的に, 君がロープを, ちょっとだけ引き下げたとしよう (図 4.2)。このとき, 滑車 B が Δx だけ持ち上がったとする。すると, 当然, 物体も同じだけ, つまり Δx だけ持ち上がる。このとき, ロープの動きをたどって考えれば, 君がロープを手繰り寄せた長さは $2\Delta x$ だとわかるだろう[*1]。

このとき, 下向きに座標をとり, それぞれの力について仕事を考え, それらを合計してみる。

$$T(2\Delta x) + mg(-\Delta x) \tag{4.1}$$

ここで, 第 2 項の $(-\Delta x)$ のマイナスは, 座標の向き（下向き）とは逆の上向きに物体が移動することをあらわす。で, **だまされたと思って**, **これを** 0 **とおいてみよう**：

$$2T\Delta x - mg\Delta x = 0 \tag{4.2}$$

[*1] 滑車 B の左右端からそれぞれ長さ Δx だけ上の部分が, 手繰り寄せた後には無くなっている。これらの長さの合計は（左右にそれぞれ 1 つずつあるので）$2\Delta x$ である。

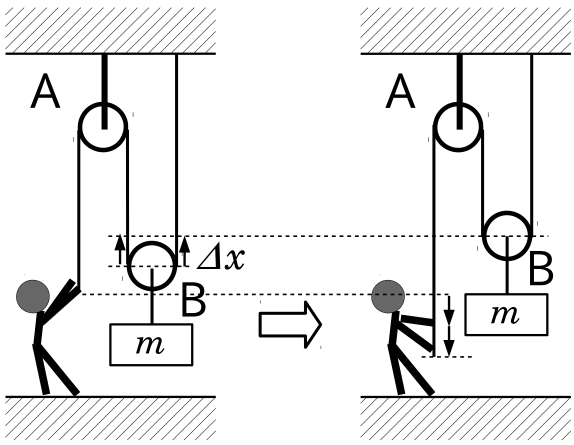

図 4.2　動滑車を使う持ち上げ。物体を Δx だけ上昇させるにはロープを $2\Delta x$ だけ手繰り寄せる必要がある。

すると,

$$T = \frac{mg}{2} \tag{4.3}$$

という, 正しい答えが得られる。これが仮想仕事の原理の例である。(例おわり)

仮想仕事の原理とは以下のようなものである：

仮想仕事の原理

力がつりあっている系では, 仮想的な微小変位に伴って外力のなす仕事の総和は 0 である。

「仮想的な微小変位」とは, 上の例で言えば, 君がロープを手繰り寄せる $2\Delta x$ や, それに伴って物体が上に移動する Δx のことだ。「外力」とは, 君が引く力と, 物体にかかる重力のことだ。

なんで「仕事」とか「仮想的な微小変位」とかの得体の知れぬものを持ち出してこんな「原理」を考えるのだろうか? それは, これが正しいと仮定すれば, いろんな物事をシンプルに矛盾なく説明できて便利だからだ。なぜこんな原理が成り立つのか, その理由は誰も知らない。自然はそうなっているのだ。

この例では, 確かに動滑車のおかげで, ロープを引っ張る力は半分になったが, そのかわり, 手繰り寄せる長さは倍になってしまった。つまり, 同じ高さだけ持ち上げようとすると, かかる力が半分なら, 手繰り寄せる長さ（距離）を倍にしなければならない。つまり, たとえ必要な力の大きさは動滑車などで変えることができても, 力と距離の掛け算, つまり仕事は, 変えることができない。それが自然の摂理なのだ。だから, 仕事という概

念が便利なのだ。

もうひとつの例を考えよう。前章で考えた, 2 つの斜面に物体を置いてロープでつないで静止させる話である。

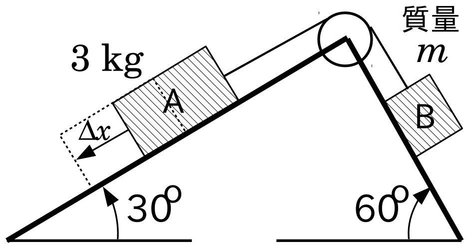

図 4.3 2 つの斜面に載せられ, ロープでつながって静止する 2 つの物体。図 3.13 改変。

例 4.3 前章の問 46 において, 物体 A を斜面に沿って左下向きに Δx だけ動かしてみよう（図 4.3）。すると, ロープにつながっている物体 B も, 斜面に沿って左上向きに Δx だけ動くはずだ。このとき, 物体 A に関して重力がなす仕事は, $(3\ \mathrm{kg})g\{\sin(\pi/6)\}\Delta x$ である。一方, 物体 B に関して重力がなす仕事は, $-mg\{\sin(\pi/3)\}\Delta x$ である。マイナスがつくのは, 物体 B が重力と逆方向（上方向）に移動したからだ。仮想仕事の原理より,

$$(3\ \mathrm{kg})g\Big(\sin\frac{\pi}{6}\Big)\Delta x - mg\Big(\sin\frac{\pi}{3}\Big)\Delta x = 0 \tag{4.4}$$

ここから, $m = \sqrt{3}$ kg が出てくる。（例おわり）

● **問** 50

(1) 仕事とは何か?
(2) 仕事の単位を SI 基本単位による組み立て単位で表せ。それを J（ジュール）と呼ぶ。
(3) 仮想仕事の原理とは何か?

● **問** 51 君はてこの原理を聞いたことがあるだろう。これは仮想仕事の原理から導くことができる。図 4.4 上のように, 支点 S の上に, 左右に長さ l_1, l_2 を持つ「てこ」が置かれ, 左右それぞれの端にぞれぞれ質量 m_1, m_2 の物体 1, 2 が載っている。これを, 図 4.4 下のように, 左側が下がるように, 仮想的に小さな角 θ だけ下げる。このとき,

(1) 左端がもとの状態から h_1 だけ下がり, 右端がもとの状態より h_2 だけ上がるとすると,

$$h_1 = l_1 \sin\theta \tag{4.5}$$
$$h_2 = l_2 \sin\theta \tag{4.6}$$

となることを示せ。

(2) 物体 1 における重力による仮想仕事は $m_1 g l_1 \sin\theta$, 物体 2 における重力による仮想仕事は $-m_2 g l_2 \sin\theta$ となることを示せ。

(3) 仮想仕事の原理より, 次式（てこの原理）を導け：

$$m_1 l_1 = m_2 l_2 \tag{4.7}$$

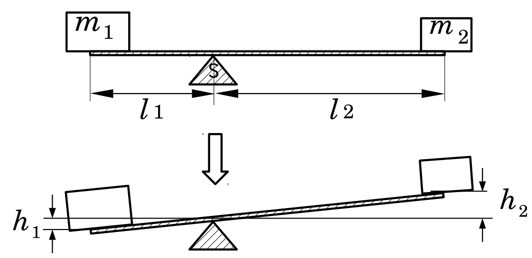

図 4.4 仮想仕事の原理からてこの原理を導く。

前章で述べたように, 物体が静止しているとき, 力のつりあいが実現している。しかし実は, 大きさを持つ物体についてはそれに加えて, 上述の「てこの原理」に相当する, モーメントのつりあいというものも実現する。モーメントとは, 簡略に言えば, ある点（支点）からの距離と, それに直交する力との積だ。そして, モーメントのつりあいとは, モーメントの合計が 0 になるということだ。高校物理を学んだ人は聞いたことがあるだろう。しかし, これをきちんと正しく記述し, 理解するには, 数学で「ベクトルの外積」というのを学ばねばならないので, 今は詳述しない（第 11 章, 第 12 章で学ぶ)。ただし, ここでは, 「仮想仕事の原理は, 力のつりあいだけでなく, モーメントのつりあいまでも含んだ, 一般性の高い法則だ」ということを認識しておこう。

● **問** 52 図 4.5 のようなジャッキについて, 半径 r のハンドルを 1 回転すると, 上載物は Δy だけ持ちあがるとする。摩擦は無視する。

(1) ハンドルをまわすのに必要な力を F とする。ハンドルを 1 回転するときに, 君の手がなす仕事は

$$2\pi r F \tag{4.8}$$

であることを示せ。

(2) 上載物の質量を m とする。ハンドルを 1 回転するときに, 重力のなす仕事は

$$-mg\Delta y \tag{4.9}$$

であることを示せ。

(3) 次式を示せ：

$$2\pi rF - mg\Delta y = 0 \tag{4.10}$$

(4) 次式を示せ：

$$F = \frac{mg\Delta y}{2\pi r} \tag{4.11}$$

(5) $m = 1000$ kg, $r = 0.2$ m, $\Delta y = 0.003$ m のとき, F はどのくらいか?

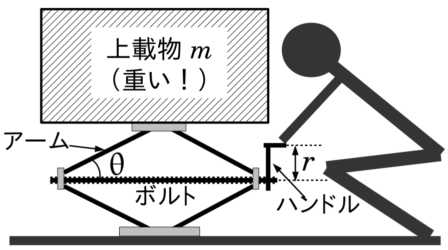

図 4.5　ジャッキで物を持ち上げる。

よくある質問 81　仮想仕事の原理の「仮想的な微小変位」はどうして仮想的である必要があるんですか? ...　「微小変位」という考え方自体がそもそも仮想的です。バランスしている系に少しでも変化を加えたら, バランスが崩れるかもしれない。でも, 「バランスを崩さない程度に小さな変位」というのが微小変位であって, そもそもそんなの厳密には現実的に無理じゃね?という気持ちがあるから「仮想」なのです。

よくある質問 82　仮想仕事の原理に鳥肌が立ちました。自然の不思議さを感じざるを得ません。 ...　このような原理を見つける旅が, 学問としての物理学なのでしょう。

よくある質問 83　仕事の定義って, 中学校で習いましたっけ? 覚えていないのですが... ...　そういう人, けっこういます (笑)。確実に習ってるはずです。忘れてしまったのは, その重要性とか意味がわかっていなかったからでは? それが何? ってかんじでスルーしたのでしょう。中学生はまだ幼いので, それも仕方ありません。しかし, 仕事の定義は物理学の根幹中の根幹です。今後は「知らない」「忘れた」ではダメですよ。

4.3　エネルギーは仕事を一般化した概念

さて, 仮想仕事の原理では, 「仕事」という量が重要な働きをした。それにとどまらず, 仕事は, 物理学の全般にわたって, 重要な役割を果たす概念だ。例として, 図 4.2 の例をもういちど考えよう。君がロープを引くことで

$$2T\Delta x$$

という仕事をしたとき, 同時に, 質量 m の物体にかかる重力が

$$-mg\Delta x \tag{4.12}$$

という仕事をした。このとき, 仮想仕事の原理から, 両者の和は 0 である。

君がロープを引くことによって君は仕事をし, 実際, 疲れる。しかしその努力は, 重力に逆らって物体が上昇した, という結果（重力による負の仕事）に残っている。この上昇した状態で物体に別のロープとか滑車とかてこをつければ, 今度は物体が下がることによって, また別の物体を持ち上げることができるだろう。

このような話は, お金のやりとりに似ていないだろうか? A 君が B 君に 1000 円を譲渡したとする。なぜそんなやりとりが起きたか, とか, それによって 2 人の関係はどうなるか, という興味もあるが, 2 人以外の人にしてみれば, お金のやりとりは 2 人の間で完結している（2 人あわせた収支は 0 である）。そして, A 君からもらった 1000 円で, こんどは B 君が C さんから何かを買うことができる。

物理学における仕事とは, この話の「お金」のような役割をする。A 君, B 君, C さん, ... とお金が手渡されていくように, 君がロープを引くことでなした仕事は, 後々まで, 形を変えながら, 様々なところに受け渡されるのだ。そのように, 仕事を普遍化した量を, 物理学ではエネルギーという。これはとても大事なので大きく書いておこう:

エネルギーの定義

仕事が形を変えた量, もしくは仕事に形を変えることができる量をエネルギーという。

エネルギーは仕事と同じ次元を持ち, その単位は, SI 単位系では J である。

● **問 53**　エネルギーとは何か?

エネルギーには, 様々な形態がある。熱もエネルギー

だ。なぜか? 例えば気体に熱を加えると膨張し, まわりのものを移動させることができる。つまり, 仕事ができる。だから熱はエネルギーである。

光もエネルギーの一形態だ。なぜか? 太陽光を浴びると暖かくなる, つまり熱を受け取ることができる。熱はエネルギーなので, 光はエネルギーを運ぶのだ。

熱は, 後に学ぶ「運動エネルギー」というタイプのエネルギーに帰着させて考えることができる。また, この章の後半で学ぶ「ポテンシャルエネルギー」というタイプのエネルギーもある。物質が化学反応するときに出る熱や光は, 物質の分子レベルでのポテンシャルエネルギーの変化によるものである。

さて, 仕事について, もう少し, 丁寧に数学的に意味づけよう。

さきほど, 仕事とは, 「力と, その力が働く点が"力と同じ向き"に動いた距離との掛け算」であると述べたが, それが成立するのは, その点の移動中に, 力がほとんど変化しないことが必要である（でなければ, どの時点での力を掛け算すればいいのかわからない）。では, 移動中に力が次第に変化するような場合は, 仕事はどのように定義されるのだろうか?

いま, ある物体に力 F がかかっているとき, それを力の向きに Δx だけ動かす。 Δx だけ動かす間には F は変化しないと考える。すると, その力がする仕事 ΔW は,

$$\Delta W = F\Delta x \tag{4.13}$$

である。これは仕事の定義だ。これをたくさん繰り返すことを考えよう。いま, 座標上で, 位置 x_0 にある物体を, 位置 x_1 まで運ぶとする。この間, 物体にかかる力は変化するかもしれないが, x_0 から x_1 まではとても近くて, その間の力の変化は無視できるくらいに小さいとする（逆に言えば, 力の変化が無視できるくらいに, x_0 と x_1 を近づける）。つまり, この間の力は F_1 でほぼ一定値とみなせる。このときの仕事 ΔW_1 は, 上の式から,

$$\Delta W_1 \fallingdotseq F_1\Delta x_1 \tag{4.14}$$

である（$\Delta x_1 = x_1 - x_0$ とする）。位置 x_1 まで来た物体は, こんどは x_1 のすぐ近くの位置 x_2 まで運ばれ, その間, 物体にかかる力は F_2 で一定であるとする（ただし F_2 は F_1 と同じとは限らない）。このときの仕事 ΔW_2 は, 同様に,

$$\Delta W_2 \fallingdotseq F_2\Delta x_2 \tag{4.15}$$

である（$\Delta x_2 = x_2 - x_1$ とする）。以下同様に, 物体をすこしずつ $x_3, x_4, \cdots, x_n$ まで順次運び (n は正の整数）, 各ステップでは物体に $F_3, F_4, \cdots, F_n$ というそれぞれ一定値の力がかかっていると, 各ステップでの仕事は,

$$\begin{aligned}\Delta W_3 &\fallingdotseq F_3\Delta x_3\\ \Delta W_4 &\fallingdotseq F_4\Delta x_4\\ &\cdots\\ \Delta W_n &\fallingdotseq F_n\Delta x_n\end{aligned} \tag{4.16}$$

となる。これらを辺々で合計すれば,

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta W_k \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n}F_k\Delta x_k \tag{4.17}$$

となる。左辺は, 物体を x_0 から x_n まで運ぶときの全体の仕事であり, これを W と書こう:

$$W \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n}\Delta W_k \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n}F_k\Delta x_k \tag{4.18}$$

ここで n を十分大きくとって, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の分割を十分に細かくすれば, すなわち, 式 (4.18) の極限として,

$$W = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_k\to 0}}\sum_{k=1}^{n}F_k\Delta x_k \tag{4.19}$$

を考えれば, 積分の定義（数学の教科書参照）より, 次式が成り立つ:

仕事の定義（力が一定でない場合）

物体が位置 $x = a$ から位置 $x = b$ まで移動する時, 物体にかかる力 $F(x)$ のなす仕事 $W_{a\to b}$ は,

$$W_{a\to b} = \int_a^b F(x)\,dx \tag{4.20}$$

ここで x_0 を a に, x_n を b に, W を $W_{a\to b}$ に, それぞれ改めて書き換えた。$F(x)$ は x の各点で物体が受ける力だ。この式 (4.20) は, 仕事の定義式 (4.13) を, 「力が次第に変化する場合」に拡張した（つまり, より一般性の高い）仕事の定義式である。

例 4.4 バネの力のなす仕事を考えよう。バネが伸びたり縮んだりするとき, その伸びや縮みが大きいほど力は強い。つまり, 力が一定ではない。そこで, バネが伸びたり縮んだりするときの仕事は, 単純に「力かける距離」ではダメで, 式 (4.20) を使わねばならないのだ。

では, バネ定数 k のバネについた物体を動かすときの仕事を求めよう。物体の位置を x とし, バネが伸びる方向に x 軸をとる。バネの自然状態では $x = 0$ とし

よう。物体が位置 x にあるときに, バネが物体に及ぼす力を $F(x)$ とすると, フックの法則（式 (3.6)）より, $F(x) = -kx$ である。すると, 物体を位置 $x = x_0$ から位置 $x = x_1$ まで動かすときに, バネの力がなす仕事 $W_{x_0 \to x_1}$ は, 式 (4.20) より, 次式のようになる:

$$W_{x_0 \to x_1} = \int_{x_0}^{x_1} (-kx)\, dx = -\frac{1}{2}k(x_1^2 - x_0^2) \qquad (4.21)$$

● **問** 54

(1) 上の説明を再現して, 式 (4.21) を導け。
(2) バネ定数 6.0 N/m のバネを, 自然状態から 3.0 m だけひき伸ばすとき, バネの力がなす仕事は?
(3) このバネを, 自然状態から 3.0 m だけ押し込むとき, バネの力がなす仕事は?

例 4.5　一定の質量 m の物体が, 高さ h_0 から h_1 まで移動するとき, 重力のなす仕事 $W_{h_0 \to h_1}$ を求めよう。座標軸を上向きにとると, 重力は, 式 (2.4) より,

$$F = -mg \qquad (4.22)$$

である。g は重力加速度である。右辺のマイナスは, 重力が座標軸の向きとは逆向きであることを表す[*2]。従って, 式 (4.20) より, 仕事は次式になる:

$$W_{h_0 \to h_1} = \int_{h_0}^{h_1} (-mg)\, dx \qquad (4.23)$$

ここで, **もしも** g **が一定なら**（質量 m はもともと定数であることに注意）, この積分は定数関数 $(-mg)$ の積分なので簡単に実行できて, 次式のようになる:

$$\begin{aligned} W_{h_0 \to h_1} &= -mg[x]_{h_0}^{h_1} = -mg(h_1 - h_0) \\ &= mg(h_0 - h_1) \qquad (4.24) \end{aligned}$$

もっとも, この状況では力"$-mg$"が一定なので, わざわざ積分を持ち出さなくても, 「力かける距離」で十分だ。力は $-mg$ で, 距離は $h_1 - h_0$ で, その積は $-mg(h_1 - h_0)$ となり, 式 (4.24) に一致する。（例おわり）

よくある質問 84　**式** (4.24) **で**, $mg(h_1 - h_0)$ **ではダメですか**? ... ダメです。$h_0 - h_1$ と $h_1 - h_0$ では符号が逆になってしまいます。符号には意味があるのです。もし $h_0 > h_1$ なら（つまり物体が下がるとき）, 式 (4.24) では W は正になります。これは, 「力（重力）の向き」と「移動の向き」が一致するので, 仕事は正になるということに対応します。そしてもし $h_0 < h_1$ なら（つまり物体が上がるとき）, W は負です。これは, 重力に逆らって動く状況であり, 重力のする仕事は負になるということに対応します。あなたの提案する $mg = mg(h_1 - h_0)$ は, あえて言えば, 「重力のする仕事」ではなく, 「重力に逆らって物体を移動させる誰かの手の力のする仕事」です。

よくある質問 85　**例** 4.5 **で**, **座標軸は下向きじゃダメですか**? ... いいですよ。その場合, $F = mg$ となり, $W_{h_0 \to h_1} = mg(h_1 - h_0)$。これは本文の結果とは符号が逆のように見えますが, 今の場合は h が大きいと低いので, 結局, 物体が下がると $h_0 < h_1$ となり, そのとき $W_{h_0 \to h_1}$ は正になる。という結論は変わりません。本文で座標を上向きにとったのは, 「高いところほど h が大きい」ほうが, 我々の空間認識では直感に素直だからです。

● **問** 55

(1) 仕事の定義 (式 (4.20)) から出発して式 (4.24) の導出を再現せよ。
(2) 質量 140 g の野球ボールが, 高さ 50 m から地表まで重力に引かれて移動する（要するに落下する）とき, 重力のする仕事を求めよ。
(3) 質量 60 kg の人が, 駿河湾の海岸（標高 0 m）から富士山頂（標高約 3800 m）まで移動する（要するに登山する）とき, 重力のする仕事を求めよ。

実は例 4.5 は, ちゃんと考えたら「力が一定」ではなくなる。というのも, 前章で述べたように, 重力加速度 g の値は標高によって変化する。従って, 物体にかかる力"$-mg$"は一定ではなく, 式 (4.23) の積分で $-mg$ を「定数関数」とみなすことは, 厳密には正しくない。つまり, 式 (4.24) は, g の変化が実質的に無視してもかまわないような状況（ごく小さな標高変化での議論とか, あまり精度にこだわらない議論）に限定的に許される「近似」である。

ではこの仮定を外す, つまり g の標高依存性を考慮に入れると, どうなるだろうか? それが次の例である:

例 4.6　質量 m の物体 A が, 質量 M の物体 B から万有引力を受けながら, 物体 B からの距離が R_0 から R_1 まで変化する。このとき万有引力のなす仕事を求めよう。座標軸を物体 B から物体 A の向きにとると, 万有引力は, 式 (2.1) より,

$$F = -\frac{GMm}{x^2} \qquad (4.25)$$

[*2] 式 (2.4) では力の向きを考えず, 力の大きさだけを考えていたことに注意せよ。

である。ここで右辺のマイナスは, 万有引力が座標軸の向きとは逆向きであることを表す[*3]。式 (4.20) より,

$$W_{R_0\to R_1} = \int_{R_0}^{R_1}\Big(-\frac{GMm}{x^2}\Big)dx = \Big[\frac{GMm}{x}\Big]_{R_0}^{R_1}$$
$$= \frac{GMm}{R_1} - \frac{GMm}{R_0} \tag{4.26}$$

となる。特に, 物体 A が**無限遠**から距離 R まで物体 B に近づくときは, $R_0=\infty$, $R_1=R$ として, 式 (4.26) は次式のようになる:

$$W_{\infty\to R} = \frac{GMm}{R} \tag{4.27}$$

（例おわり）

● **問** 56　式 (4.26) を導出せよ.

ここで, 式 (4.26) と式 (4.24) は似たような話題だったので, 両者の関係を確認しておこう。前者で物体 B を地球とし, 地球の半径を r とする。$R_0 = r + h_0$, $R_1 = r + h_1$ とすれば, 式 (4.24) の状況になる。すると, 式 (4.26) は次式のようになる。

$$W_{h_0\to h_1} = \frac{GMm}{r+h_1} - \frac{GMm}{r+h_0} \tag{4.28}$$

● **問** 57

(1)　$y = 1/(1+x)$ という関数を考える。x が十分に 0 に近い時は, $y \fallingdotseq 1 - x$ と近似できることを示せ（ヒント: 線型近似)。

(2)　$y = 1/(a+x)$ という関数を考える (a は正の定数)。$a >> |x|$ の近い時, $y \fallingdotseq (1/a) - (x/a^2)$ と近似できることを示せ。ヒント: $y = (1/a)\{1/(1+x/a)\}$ と変形し, x/a を前小問の x に相当するものとみなして前小問を利用。

(3)　$r >> h_1$ かつ $r >> h_2$ と仮定して, 次式を導け:

$$W_{h_0\to h_1} \fallingdotseq \Big(\frac{GM}{r^2}\Big)m(h_0 - h_1) \tag{4.29}$$

(4)　$GM/r^2 = g$ であることを式 (2.7) で確認し, それを用いて式 (4.26) と式 (4.24) の関係を述べよ。

● **問** 58　質量 m の質点を, 高さ h から地表まで移動させるときに重力がなす仕事を E とする。

(1)　E を, 式 (4.24) と式 (4.26) のそれぞれを用いて表せ（前者を E_1, 後者を E_2 とする)。

(2)　m=10 kg として, h = 100 m (野球のホームランボールの高度）, h = 10 km （旅客機の飛行高度), h = 1000 km （人工衛星の高度）のそれぞれの場合で, E_1 と E_2 を求めて比較せよ。有効数字 3 桁程度で。なお, 地球を半径 R = 6370 km, 質量 $M = 5.972\times10^{24}$ kg の球とし, 重力加速度を $g = 9.823\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ とする。物体に働く力は重力以外の力, 例えば自転による遠心力などは考えない。

(3)　h が大きい場合に E_1 と E_2 が違う値になるのはなぜか?

ところで, 式 (4.20) は, 以下のようなトピックとして,「化学」でも出てくる。

● **問** 59　気体を膨張させたり圧縮したりするときの仕事を考えよう。ある気体が, 断面積 A のシリンダー（筒状の容器）に入っており, 上面がピストンで蓋してある。鉛直上向きに x 軸をとり, シリンダーの底面で $x=0$ とする。ピストンは x 軸にそって上下に動くことができる。最初, ピストン（つまり蓋）は $x=h$ にあって静止しているとする (図 4.6)。ピストンは十分に軽いとし, 重力を無視する。気体の圧力を P とする。

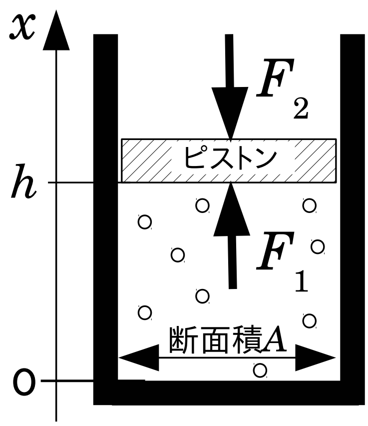

図 4.6　気体の入ったシリンダー。

(1)　気体の体積 V は, $V = Ah$ と表せることを示せ。

(2)　気体がピストンに及ぼす力 F_1 は,

$$F_1 = PA \tag{4.30}$$

となることを示せ。

(3)　外部からピストンにかかる力（それを外力という[*4])

[*3] 式 (2.1) では力の向きを考えず, 力の大きさだけを考えていたことに注意せよ。

[*4] この外力が具体的に何によるものかは, ケースバイケースであ

を F_2 とすると,

$$F_2 = -PA \tag{4.31}$$

となることを示せ。

(4) 次に, ピストンをゆっくり動かして, $x = h + dh$ の位置に移動させることを考えよう。$dh > 0$ なら, 気体は膨張し, $dh < 0$ なら気体は圧縮される。dh は微小であり, ピストンが $x = h$ から $x = h + dh$ まで動く間に F_1 や F_2 はほとんど一定であるとみなす。このとき, 外力がなす仕事 dW は,

$$dW = F_2\,dh = -PA\,dh \tag{4.32}$$

となることを示せ。

(5) 体積の変化を dV とする。すなわち, ピストンの移動後に気体の体積は $V + dV$ になったとする。次式を示せ:

$$dV = A\,dh \tag{4.33}$$

(6) 式 (4.32), 式 (4.33) より次式を示せ:

$$dW = -P\,dV \tag{4.34}$$

(7) ピストンを大きく動かし, 体積が V_1 から V_2 になるまで変化させることを考えよう。この間に外力がなす仕事 $W_{V_1\to V_2}$ は次式のようになることを示せ:

$$W_{V_1\to V_2} = -\int_{V_1}^{V_2} P\,dV \tag{4.35}$$

(8) ここで, 気体は理想気体であるとしよう。つまり, 理想気体の状態方程式:

$$PV = nRT \tag{4.36}$$

が成り立つとする (n はモル数, R は気体定数, T は絶対温度)。次式が成り立つことを示せ:

$$W_{V_1\to V_2} = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}\,dV \tag{4.37}$$

(9) ここでさらに, ピストンの移動は十分にゆっくりであり, その過程では温度 T は一定であるとすると, 次式が成り立つことを示せ:

$$W_{V_1\to V_2} = nRT \ln \frac{V_1}{V_2} \tag{4.38}$$

(10) 1 モルの理想気体を摂氏 0 度 (一定) で体積を半分まで圧縮するときに外力がなす仕事を求めよ。

り, ある場合は誰かが手で押さえ込んでいるのかもしれないし, ある場合はシリンダー外部に充満する気体の圧力によるものかもしれない。この問題ではその詳細は気にしない。

式 (4.34) は, 化学や熱力学で, 非常によく出てくる式だ。ここでは外力がなす仕事を考えたが, 気体（の圧力）がなす仕事を考えると, それは外力がなす仕事の符号を逆にしたものである（なぜなら気体がピストンにおよぼす力は外力がピストンにおよぼす力の逆だから）。それを dW' とすると, $dW' = -dW$ なので,

$$dW' = P\,dV \tag{4.39}$$

となる。この式もよく使われるので, 式 (4.34) との違いをよく理解しておこう[*5]。

4.4　ポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）

さて, 式 (4.20) をみると, 仕事 $W_{a\to b}$ は, 始点 $x = a$ と終点 $x = b$ の関数だ。特に, 始点 a をどこかに固定して, それを基準点と呼び, a のかわりに O と書こう（O はゼロではなく origin の O)。そして b を改めて x と書けば, 仕事 $W_{O\to x}$ は x の関数だ。その意味は, 「基準点から位置 x まで物体を運ぶときの仕事」である。この $W_{O\to x}$ の符号を変えたものをポテンシャルエネルギーという（単に「ポテンシャル」と言うこともある)。すなわち,

ポテンシャルエネルギーの定義 (1)

$$U(x) := -W_{O\to x} \tag{4.40}$$

で定義される関数 $U(x)$ を, ポテンシャルエネルギーという。ここで $W_{O\to x}$ は, 物体を基準点から位置 x まで運ぶときに, 物体にかかっている力がなす仕事である。

例 4.7　上の例 4.5 で, 地面 $h = 0$ を基準点とし, h_1 を改めて h とおけば, $W_{O\to h} = W_{0\to h} \fallingdotseq -mgh$ である。このとき, ポテンシャルエネルギーは, 式 (4.40) から,

$$U(h) \fallingdotseq mgh \tag{4.41}$$

である。(例おわり)

つまり, 物体を高く持ち上げるほど, 重力によるポテンシャルエネルギーは, 大きくなる。で, 持ち上げられた物体は, てこや滑車を使えば, 別の物体を持ち上げる「仕事」をすることができる。つまり, ポテンシャルエネ

[*5] 化学や熱力学では, 教科書によって, 外力のなす仕事を dW とするものと, 気体がなす仕事（すなわちここで dW' とあらわしたもの）を dW とするものがあるので, 気をつけよう。

ルギーとは, 力を受けている物体が, ある位置にあることによって持つエネルギー, つまり位置に付随するエネルギーである。

ポテンシャルエネルギーは, 中学校や高校で学んだ位置エネルギーと同じ概念である。ただし大学では位置エネルギーという言葉は使わない。

よくある質問 86　同じなら「位置エネルギー」でよいのでは? なぜわざわざポテンシャルエネルギーというのですか? ... 物理学の正式な用語は「ポテンシャルエネルギー」です。でも中高生には「ポテンシャルって何よ?」ってなるでしょうから, わかりやすく言い換えているのです。

よくある質問 87　「位置エネルギー」の方がわかりやすいから, そっちを正式な用語にすべきでは? ... そう言われても私にはどうしようもありませんし, 私はもう慣れたので違和感はありません。慣習ってそんなもんです。

● **問** 60　ポテンシャルエネルギーとは何か? 位置エネルギーとどう違うか?

● **問** 61　地面を基準点とし, 地面から高さ h にある, 質量 m の物体のポテンシャルエネルギー（重力による）$U(h)$ が mgh に（近似的に）等しいことを (g は重力加速度）, ポテンシャルエネルギーの定義から出発して導出せよ。

● **問** 62　バネ定数 k のバネについた物体を考える。バネの自然状態を原点かつ基準点として, 物体が位置 x にあるとき, バネの弾性力によるポテンシャルエネルギー $U(x)$ は次式のようになることを示せ。また, 関数 $U(x)$ をグラフに描け。

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{4.42}$$

ところで, 式 (4.40) の右辺の $W_{O\to x}$ は, 物体にかかっている力がなす仕事だ。例えば例 4.7 では, 重力がなす仕事がそれに相当する。ところが, 現実的には, 重力がかかっている物体が, ひとりでに重力に逆らって上に移動したりはしない。誰かが重力に逆らう力をかけて, その物体を持ち上げねば, 物体は上に移動しない。そのような「誰かの力」がなす仕事 $W'_{O\to x}$ を考えると[*6], それは重力のなす仕事とは同じ大きさでありながら符号が逆である（力の向きが逆だから）。すなわち, $W'_{O\to x} = -W_{O\to x}$ だ。それを使うと, ポテンシャルエネルギーは以下のように定義することもできる：

ポテンシャルエネルギーの定義 (2)

$$U(x) = W'_{O\to x} \tag{4.43}$$

で定義される関数 $U(x)$ を, ポテンシャルエネルギーという。ここで $W'_{O\to x}$ は, 物体を基準点 O から位置 x まで運ぶときに, かかっている力に逆らって誰かがなす仕事である。

例 4.7 では, 物体を地面から高さ h まで君が持ち上げるとすれば, 君は物体に上向きに mg という大きさの力をかけ, 上向きに h だけ移動させねばならないので, そのとき君が（重力に逆らう力で）なす仕事は $W'_{o\to h} = mgh$ だ。従ってポテンシャルエネルギーは, 式 (4.43) から, $U(h) = mgh$ となり, それは式 (4.41) に一致する（つじつまが合っている）。

式 (4.40) と式 (4.43) は, 互いに等価であり, どちらの定義を採用してもかまわない。これらの 2 つの定義は, 教育的な意味で, 「わかりやすさ」に一長一短があるのだ。前者は, 右辺にマイナスが出てくるのがちょっと不自然でわかりにくい。後者は, そこに実在している力とは別の力を誰かが発揮すると想定するという点でわかりにくい。そこで, これらの欠点を解消した第 3 の定義がある。すなわち,

ポテンシャルエネルギーの定義 (3)

$$U(x) = W_{x\to O} \tag{4.44}$$

で定義される関数 $U(x)$ を, ポテンシャルエネルギーという。ここで $W_{x\to O}$ は, 物体を位置 x から基準点 O まで運ぶときに, 物体にかかっている力がなす仕事である。

例 4.7 で, 物体が高さ h から地面 (基準点; 高さ 0) まで落下することを考えれば, 下向きに mg という大きさの重力がかかって, 下向きに h だけ移動するので, そのとき重力がなす仕事は $W_{h\to 0} = mgh$ である。従ってポテンシャルエネルギーは, 式 (4.44) から, $U(h) = mgh$ となり, それは式 (4.41) に一致する（つじつまが合っている）。

もちろん, 式 (4.40), 式 (4.43), 式 (4.44) は, 互いに等価であり, どれを定義として採用してもかまわない

[*6] ここで $W'_{O\to x}$ のダッシュは「微分」という意味ではない。単に $W_{O\to x}$ と区別するための印である。

（ちょっと考えれば, $W_{x \to O} = W'_{O \to x} = -W_{O \to x}$ であることがわかるだろう）。教科書や学者によって, どの定義を採用するかは, 様々だ。しかし, 物理学の実体としては, どれも同じことだ。

● **問** 63　質量 m の物体が, 質量 M の物体から距離 R だけ離れているときの, 万有引力によるポテンシャルエネルギー $U(R)$ を考える。無限遠（$R = \infty$）を基準点とすると, $U(R)$ は次式のようになることを示せ。また, 関数 $U(R)$ をグラフに描け。

$$U(R) = -\frac{GMm}{R} \tag{4.45}$$

よくある質問 88　無限遠が基準点ってどういうことですか? ... 文字通りの意味です。式 (4.40) では, 物体を無限遠から運んでくるという意味になりますし, 式 (4.44) では物体を無限遠まで物体を運ぶということになります。と言っても違和感ありますよね。普通, 基準点といえば, $x = 0$ とか $f = 0$ みたいに, 座標がゼロのところを選びますからね。しかし, 重力は, 距離が 0 に近づくほどどんどん強くなるので, 座標がゼロのところに物体を持って行くと, 仕事は無限大になってしまいます（式 (4.26) の R_1 を 0 に近づけてみてください）。その結果, ポテンシャルエネルギーも無限大になってしまいます。それは具合が悪いので, あえて座標がゼロのところではなく, 逆に, 無限に遠いところを基準点にするのです。

よくある質問 89　具合が悪いって... そんな主観的な理由で勝手に基準点を選ぶのってテキトーすぎじゃないですか? ... それでうまくいくから OK なのです。ポテンシャルエネルギーは, その値自体ではなく, その差や変化を使います（いずれ学ぶ「力学的エネルギー保存則」で経験します）。その際, どこが基準点かは, どうでもよくなります。

実は, 式 (4.45) は, 式 (4.41) を一般化した式である。前者から後者を導出できるのだ。やってみよう。今, 地球の質量を M, 地球の半径を r, 地表からの高さを h とすると, 地表から高さ h にある, 質量 m の物体のポテンシャルエネルギー（無限遠を基準点とする）は, 式 (4.45) より,

$$U(r+h) = -\frac{GMm}{r+h} \tag{4.46}$$

となる（この U と式 (4.41) の関数 U は別物であることに注意）。関数 $f(x) = -GMm/(r+x)$ の線型近似は（よくわからないという人は, 問 57 の解答を参照）,

$$-\frac{GMm}{r+x} \fallingdotseq -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r^2}x \tag{4.47}$$

となる（$x \fallingdotseq 0$ とする）。ここで, 高さは地球の半径に比べて十分に小さいとしよう。つまり, $h << r$ とする。すると $h \fallingdotseq 0$ と仮定できて, 式 (4.47) で $x = h$ とすれば,

$$\begin{aligned} U(r+h) &= -\frac{GMm}{r+h} \\ &\fallingdotseq -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r^2}h \end{aligned} \tag{4.48}$$

となる。ここで, 地表での重力を考えれば,

$$\frac{GMm}{r^2} = mg \tag{4.49}$$

である。これを使って式 (4.48) を書き換えると,

$$U(r+h) \fallingdotseq -\frac{GMm}{r} + mgh \tag{4.50}$$

となる。つまり,

$$U(r+h) + \frac{GMm}{r} \fallingdotseq mgh \tag{4.51}$$

となる。なんと!! この右辺（mgh）は, 式 (4.41) の右辺に一致しているではないか! なぜだろう?

式 (4.51) 左辺の第一項 $U(r+h)$ は, 「物体を高さ h から無限遠まで移動する仕事」である（ポテンシャルエネルギーの定義 (3) より）。また, 式 (4.51) 左辺の第二項 GMm/r を式 (4.45) と比べると, これは物体が地表にあるときのポテンシャルエネルギー（無限遠を基準点とする）の符号を変えたものである。つまり, 「物体が地表から無限遠まで移動するときの仕事」の符号を変えたもの, つまり, 「物体が無限遠から地表へ移動するときの仕事」である。

従って, 式 (4.51) の左辺は, 「物体を高さ h から無限遠まで移動し, そこから地表まで移動するときの仕事」, 要するに「物体を高さ h から地表へ移動するときの仕事」, つまり「地表を基準とする, 物体のポテンシャルエネルギー」である。それは式 (4.41) の左辺と同じことを意味している。つじつまがあっているではないか!!

● **問** 64　以下の値をそれぞれ求めよ。必要な数値は, 各自, 調べよ。

(1)　地上 10 m の高さにある, 質量 2 kg の物体に関する, 重力のポテンシャルエネルギー。（地表を基準点とする）

(2)　長さ 10 m, 直径 2 mm の鉄線を 1 mm 伸ばしたとき, 鉄線の弾性力のポテンシャルエネルギー。（伸ばす前の端を基準点とする）

(3)　月に関する, 地球の重力のポテンシャルエネルギー。(無限遠を基準点とする)

● **問** 65　傾斜角 θ の滑らかな斜面に沿って, 質量 m の物体を, 斜距離 L だけ運びあげた。かかった仕事は? また, ポテンシャルエネルギーの変化は?

4.5　保存力

ここでひとつ注意。ポテンシャルエネルギーという考え方は, 物体にかかる力が保存力 (conservative force) という, ある種の力についてのみ, 定義される。保存力とは, 物体を移動させるとき, その力がなす仕事が, 移動の経路によらず, 出発点と到達点だけで決まる, というような力である。

そもそも, ポテンシャルエネルギー $U(x)$ とは, ある特定の位置 (基準点) から位置 x まで物体を運ぶときに力がなす仕事を用いて定義された。力が保存力でなければ, この $W_{O\to x}$ が移動の経路によってまちまちの値をとりうるので, $W_{O\to x}$ の値が x で一意的に定まらない。つまり, $U(x)$ の値が一意的に定まらないのだ。

我々が考えうる力の多くは保存力である。数少ない例外は, 摩擦力だ。摩擦力は保存力ではない。

● **問** 66　保存力とは何か?

● **問** 67　上の問について, 以下のような回答があった。それぞれについて, 正しいか, 正しくないか, 正しくないならどこがどのように間違っているかを述べよ。

(1)　「物体を移動させるとき, どの経路をたどっても仕事が変わらないもの」
(2)　「物体を移動させるとき, その力がなす仕事が, 移動の経路によらず, 出発点と到達点だけで決まること」
(3)　「物体を移動させるとき, その力がなす仕事が, 移動の経路によらず一定であるような力」
(4)　「物体を移動させるとき, 移動の経路によらず一定であるような力」

● **問** 68　摩擦力が保存力でないことを証明しよう。

(1)　物体を位置 x_0 から位置 x_1 に運ぶときの仕事を W_{01} とし, その逆戻り, つまり物体を位置 x_1 から位置 x_0 に運ぶときの仕事を W_{10} とする。もし力が保存力なら, $0 = W_{01} + W_{10}$ となることを示せ (ヒント : 物体を x_0 から x_0 まで運ぶ経路には, 「何も動かさない」とか「x_0 から x_1 までを往復する」などがある。)
(2)　摩擦力では, 上の式が成り立たないことを示せ。

● **問** 69　傾斜角 θ の, 動摩擦係数 μ' の斜面に沿って, 質量 m の物体を, 斜距離 L だけ運びあげた。かかった仕事は? また, 重力のポテンシャルエネルギーの変化は?

4.6　仕事率

単位時間あたりになされる仕事のことを, 仕事率という。すなわち, 時間 Δt の間に, 仕事 ΔW が行われた場合, 仕事率 P は,

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \tag{4.52}$$

と定義される。ここで, 仕事率が時々刻々と変わるような場合についても対応できるように, Δt として十分に短い時間をとると,

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{4.53}$$

となる。つまり, 仕事率は, 仕事を時刻で微分したものである, と言ってもよい。

例 4.8　質量 m の物体を, Δt の時間をかけて高さ Δh まで持ち上げる場合を考えよう。仕事 ΔW は $mg\Delta h$ となる。仕事率 P は,

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{mg\Delta h}{\Delta t} \tag{4.54}$$

となる。Δt を 0 に近づけると,

$$P = mg\frac{dh}{dt} \tag{4.55}$$

となる。dh/dt は物体を持ち上げる速度だ。これを v とおくと,

$$P = mgv \tag{4.56}$$

となる。(例おわり)

仕事率の単位は, SI 単位系で表すと, $\mathrm{kg\ m^2\ s^{-3}}$, もしくは, 同じことだが $\mathrm{J\ s^{-1}}$ だ。この単位をワットといい, W とあらわす。

よくある質問 90　W という記号に混乱してきました。さっきまで W は仕事を表していましたよね? 今は W は仕事率で

すか? **仕事と仕事率って同じなんですか**? ... 違います。よく見て下さい。さっきまで「仕事」を表していた記号は W ではなく W です。斜めっている文字でしょ? そして今, 仕事率の話で使っている W は斜めっていないでしょ? W と W は全く意味が違います。前者は仕事を表す記号（というか変数）です。後者は仕事率の単位で「ワット」です。

よくある質問 91　**なんでそんな紛らわしいことをするんですか**? ... 紛らわしくありません。科学では, 変数を斜字体で表し, 単位を立体で表すということが国際的な取り決め（国際単位系）で決まっています。そういうことにちゃんと注意を払えばよいのです。ちなみに仕事の W は work の頭文字で, 単位 W はスコットランドの科学者 James Watt の頭文字です。由来が違います。同じアルファベットになったのは偶然です。

● **問** 70　質量 2.0 kg の物体を, 地表付近で, 3.0 m/s の速さで持ち上げる時の仕事率を求めよ。

式 (4.52) を見ると, ぶっちゃけ言えば仕事率は「仕事を時間でわったもの」であることがわかる。この関係を逆転すると, 仕事率に時間をかけたら仕事になる, ということがわかる[*7]。なので, 仕事の単位として, 「仕事率かける時間」という単位を使うこともできる。特によくあるのが, 仕事率を単位 W で, 時間を単位 h で表す, W h （ワット時）という単位だ。これは仕事の単位, すなわちエネルギーの単位だ。1 W の仕事率を 1 時間続けたときの仕事が, 1 W h だ。

● **問** 71　1 W h のエネルギーを, J を単位として書きなおせ。

4.7　電位・電位差・電圧

小中学校理科で, よく「電圧」とか「ボルト」というのが出てきた。しかし実は, 電圧の定義は, 小学生や中学生が理解できるようなものではないのだ。あのときは電圧は「水路の高さ」とか「その差」とかいう喩え話で教えられたが, ここで本当の定義を君に教えよう。その前に以下の問題をやって欲しい:

● **問** 72　原点に電荷 Q を持つ物体 1 があり, 位置 x に, 電荷 q を持つ物体 2 があるときの, クーロン力によるポテンシャルエネルギー $U(x)$ は次式になることを示せ:

$$U(x) = \frac{kQq}{x} \tag{4.57}$$

ただし, 無限遠を基準点とする。k は式 (2.14) に現れる定数である。

前問のように, 電気的な力（クーロン力）によるポテンシャルエネルギーは, 電荷に比例する。そこで, 電気的なポテンシャルエネルギーについては, それをその場所の電荷で割った値で表現することが多い。それを電位と呼ぶ。つまり, 電位とは「その場所の単位電荷あたりのポテンシャルエネルギー」と定義するのだ。

電位の単位は, SI 単位系では J C^{-1} である。これを V と書き, 「ボルト」と呼ぶ。

空間の 2 点の間の, 電位の差を電位差という。電位差の SI 単位は電位と同じく V である。

● **問** 73　問 72 の続き。

(1)　物体 1 が位置 x に作る電位を式であらわせ。
(2)　100 年ほど前の理論（ボーア模型という; 後述）では, 水素原子は, 陽子から 0.529×10^{-10} m の付近に電子があると考えられていた。その付近の電位は何 V か?

空間の 2 つの点の間を仮想的に荷電粒子を移動させるとき, かかる仕事を電荷で割ったもの（単位電荷あたりの仕事) を, その 2 点間の電圧とか起電力という（定義)。電圧や起電力の SI 単位も V である。

多くの場合, 電位差と電圧（起電力）は同じだ。ただし, 電位差と電圧が異なることもある。それは, 電気的な力がクーロン力だけでなく, 磁場の時間的変化によってももたらされる場合である。その場合は, 電気的な力は保存力ではなくなる（経路によって仕事が変わる)。その詳細については, 諸君の現在の数学力ではちょっと手に余るかもしれないので, 本書では述べない。とりあえず, そういう場合は, 電位差よりも電圧や起電力という言葉が用いられる, ということを頭の片隅に置いておこう。

● **問** 74

(1)　電位とは何か?
(2)　電圧とは何か?
(3)　電位の単位を SI 単位系で述べよ。
(4)　2.0 V の電位に 0.30 C の電荷があるときのポテンシャルエネルギーを求めよ。

[*7] 正確には, 仕事率を時刻で積分したものが仕事になる。

(5)　1.0 V の電位に電子が 1 個あるときのポテンシャルエネルギーを求めよ。

問 74(5) で考えた，1 V の電位にある電子 1 個のポテンシャルエネルギーの絶対値である $1.602176634 \times 10^{-19}$ J は，1 eV と呼ばれる。eVはエレクトロン・ボルトという新たな単位であり，電子や原子や分子の様々な形のエネルギーを表現するのによく使う。特に化学でよく使う。

4.8　電流・電力・電力量

P.19 で，電荷とは何かを学んだ。ここでは「電流」を学ぼう。導線の中などで，ある場所を多くの荷電粒子が次々と通り過ぎるとき，通り過ぎた荷電粒子の電荷の総量を，それにかかった時間でわったものを電流という（定義）。すなわち，単位時間あたりに通り過ぎる電荷が電流である。

定義から，電流は，C/s（クーロン毎秒）という単位で表現できることがわかる。C/s という単位を A（アンペア）という[*8]。

電気的な力によって行われる仕事の仕事率（単位時間あたりの仕事) を電力という（定義)。特に，電圧 V の 2 点間を電流 I が流れているときの仕事率は VI となる。なぜか? 電荷 q が電圧 V の 2 点間を移動するときの仕事は qV である（それが電圧の定義!）。それを時間 Δt で行ったなら，仕事率は $qV/\Delta t$ だ。ところが，$q/\Delta t$ は，移動した電荷を時間で割ったものだから，それは電流 I である。従って，仕事率は VI。

V の単位は V，つまり J/C であり，I の単位は A だから，VI の単位は J A/C である（ここで出てきた，斜字体の V と立体の V は，互いに意味が違うことに君は気づいているだろうか? SI 単位系の規定では，斜字体は変数，立体は単位を表す約束だった!)。ここで，C=A s であることを思い出すと，J A/C は結局，J/s，つまり W（ワット）になる。うまくつじつまがあっているではないか!

電気的な力によって行われる仕事を電力量という。電力量を時間で微分したもの（単位時間あたりの電力量; つまり電気的な力によって行われる仕事率) が電力である。電力を時間で積分すると電力量になる。電力量は仕事なので，その SI 単位は J（ジュール）である。しかし，一般社会では，先述の W h（ワットアワー）という単位がよく使われる。

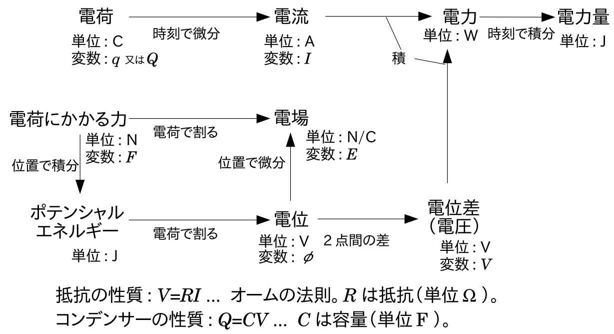

図 4.7　電気に関する概念の関係図。斜字体と立体の区別に注意せよ。斜字体は変数を，立体は単位を表す。変数には，よく使われる記号を示すが，人によって例外もあることに注意せよ。単位の読み方は，A: アンペア，C: クーロン，F: ファラド，J: ジュール，N: ニュートン，V: ボルト，W: ワット，Ω: オーム

● **問** 75　電流・電力・電力量を，それぞれ簡潔に説明せよ。また，それぞれの SI 単位を述べよ。

● **問** 76　電池の容量（電荷）を表すのに，A h という単位がよく使われる。ある自動車のバッテリー（8000 円くらい）は，36A h の容量だった。

(1)　このバッテリーが流すことのできる電荷の総量を求めよ。
(2)　このバッテリーができる仕事の総量を求めよ。ただし，このバッテリーも含めて，自動車のバッテリーはほとんどが電圧 12 V である。
(3)　ある車はこのバッテリーを積んでいる。この車のヘッドランプは LED（発光ダイオード）であり，片方が 23 W の消費電力である。左右両方のヘッドランプをつけっぱなしにしたら，どのくらいの時間でバッテリーは空っぽになるか?

演習問題 3　昔は水田に水を入れるのに，足踏み水車というものを使った。足踏み水車を使って，灌漑水路から水田 (面積 1 a) に水を入れようと思う。灌漑水路の水面と水田の間には畦があり，畦は水路水面よりも 50 cm 高い。この水田に，水深 5 cm になるまで水を 5 時間で汲み上げる場合の仕事率を求めよ。

[*8] A は SI 基本単位のひとつなので，本来は C=A s が C の定義なのだが，君は A=C/s が A の定義だと思っておくほうがわかりやすいだろう。

演習問題 4 頂角 60 度の円錐があり, その中腹に質量 100 g の糸の輪が水平にかぶさっている。糸にかかる張力の大きさを求めよ。ただし円錐表面と糸の間には摩擦は無い（つるつるしている）とする。重力加速度は g=9.8 m s^{-2} とする。

演習問題 5 1 辺の長さが L のピラミッド（正八面体の上部半分）を地表付近に建設するのに必要最小限のエネルギー E を求めよう。ピラミッドを構成する石の密度を ρ とする。ピラミッドは隙間なくびっちりと石が詰まってできているものとする。ピラミッドの自重などで石は変形したりしないとする。求める精度は有効数字 2 桁程度とする。(1) ピラミッドの高さ H を L を用いて表わせ。(2) 高さ h から $h+dh$ にある部分の体積 dV を, H, h, dh を用いて表わせ（$h<H$ とし, dh は微小量とする)。(3) その部分の質量 dM を求めよ。(4) その部分を地表面から持ち上げるのに必要な仕事 dE を求めよ。(5) 前小問の結果を, $h=0$ から $h=H$ まで積分して, E を L, g, ρ を用いて表わせ。

4.9 解答

答 50 (1) 力と, その力が働く点が力と同じ向きに動いた距離との, 積。(2) J = N m=kg m^2 s^{-2}。(3) 力がつりあっている系では, 仮想的な微小変位に伴って外力のなす仕事の総和は 0 である。

答 51

(1) 略（ヒント: 直角三角形の高さを三角関数で表す)。
(2) 物体 1 について, 重力は鉛直下向きで m_1g である。その重力が働く点である物体 1 の, 重力方向（鉛直下向き）への変位[*9]は h_1 であり, それは前問より $l_1\sin\theta$ である。従って, 重力が物体 1 にした仕事は $m_1gh_1=m_1gl_1\sin\theta$。

物体 2 については, 重力は鉛直下向きで m_2g である。物体 2 の重力の方向（鉛直下向き）への変位は $-h_2$ である（マイナスがつくのは, 重力とは逆向きだから)。それは前問より $-l_2\sin\theta$ である。従って, 重力が物体 2 にした仕事は $-m_2gh_2=-m_2gl_2\sin\theta$。
(3) 仮想仕事の原理より, 前問の 2 つの仕事の和は 0 だから, $m_1gl_1\sin\theta-m_2gl_2\sin\theta=0$。従って,
$m_1l_1=m_2l_2$。

答 52

(1) ハンドルをまわす距離は $2\pi r$。ハンドルを回す力は, ハンドルの移動（回転）の方向と常に一致しており, その大きさは F。したがって, ハンドルを 1 回転させるときに回す手がなす仕事は, $2\pi rF$。
(2) ハンドルが 1 回転するときに, 上載物は Δy だけ持ち上がる。このとき, 上載物にかかる重力は, 下向き（上載物の移動とは逆方向）に mg の大きさでかかるから, 重力のなす仕事は, $-mg\Delta y$ となる。
(3) ハンドルが 1 回転することを微小な変位とみなせば, 仮想仕事の原理より, ハンドルを回す手がなす仕事と重力がなす仕事の和は 0 である。従って与式が成り立つ。
(4) 前小問の式を $F=$ のように変形すればよい。
(5) 前小問の式に各数値を代入して, 23 N。これは約 2 kg の物体にかかる重力, つまり, 2 リットル入りのペットボトルを直接持ち上げる程度の力である。ジャッキを使えば, それで 1000 kg の上載物を持ち上げることができるのだ。

答 53 仕事が形を変えた量, もしくは仕事に形を変えることができる量。

答 54

(1) 略。
(2) $k=6.0$ N/m, $x_0=0$ m, $x_1=3.0$ m として, 上の式に代入すると, -27 J。
(3) $k=6.0$ N/m, $x_0=0$ m, $x_1=-3.0$ m として, 上の式に代入すると, -27 J。

(2) と (3) はともに負の値になることに注意せよ。バネは, 引き延ばす時も押しこむ時も,「移動の方向」と「バネが発揮する力の方向」は逆向きだからである。

答 55 (2), (3) は有効数字 2 桁で考える。

(1) （略）
(2) $m=0.14$ kg, $h_0=50$ m, $h_1=0$ m として, $W=mg(h_0-h_1)=0.14$ kg×9.8 m=s^{-2} × (50 m−0 m)=69 kg m^2 s^{-2}=69 J。
(3) $m=60$ kg, $h_0=0$ m, $h_1=3800$ m として, $W=mg(h_0-h_1)=60$ kg×9.8 m=s^{-2} × (0 m−3800 m)=-2.2×10^6 J。

(3) が負の量になることに注意。重力の向きと移動の向きが逆だからである。なお, 富士山登山は, 実際は鉛直上下方向ではなく斜めに移動するが, そのうち水平方向の移動は重力に対して直交する向きなので, 重力のなす仕事には関係しない。このことは後の章で学ぶ。

[*9] 位置の変化量のことを変位（displacement）という。

答 57 （略解) (1) $f(x)=1/(1+x)$ として, $f(0)=1$, $f'(x)=-(1+x)^2$, 従って $f'(0)=-1$。線型近似の式（ライブ講義数学入門参照）: $f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x$ に入れると, $f(x)\fallingdotseq 1-x$。(2) $y=(1/a)\{1/(1+x/a)\}$ と変形し, x/a を前小問の x に相当するものとみなすと, $y\fallingdotseq(1/a)(1-x/a)=(1/a)-(x/a^2)$。(3) 前小問で $a=r$, $x=h_0$ または $x=h_1$ のときを考えて,

$$\frac{GMm}{r+h_0}\fallingdotseq\frac{GMm}{r}-\frac{GMm}{r^2}h_0 \tag{4.58}$$
$$\frac{GMm}{r+h_1}\fallingdotseq\frac{GMm}{r}-\frac{GMm}{r^2}h_1 \tag{4.59}$$

これらを式 (4.28) に代入すると,

$$\begin{aligned}W_{h_0\to h_1}&=\frac{GMm}{r+h_1}-\frac{GMm}{r+h_0}\\&\fallingdotseq-\frac{GMm}{r^2}h_1+\frac{GMm}{r^2}h_0=\frac{GMm}{r^2}(h_0-h_1)\end{aligned}$$

これは（m を分数の右に移せば）式 (4.29) に一致する。(4) ここで式 (2.7) より, $GM/r^2=g$ なので, 式 (4.29) は $W_{h_0\to h_1}\fallingdotseq mg(h_0-h_1)$ となる。これは等号と近似等号の違いを除けば, 式 (4.24) と一致する。つまり, 式 (4.24) は式 (4.26) の近似式である。

答 58 （略解)

(1) $E_1=mgh$, $E_2=GMm\{1/R-1/(R+h)\}$
(2) $h=100$ m のとき, $E_1=9.82\times10^3$ J, $E_2=9.82\times10^3$ J（有効数字 3 桁では同じ）。$h=10$ km のとき, $E_1=9.82\times10^5$ J, $E_2=9.81\times10^5$ J。$h=1000$ km のとき, $E_1=9.82\times10^7$ J, $E_2=8.49\times10^7$ J。
(3) （略）

答 59

(1) シリンダーの内部は, 底面積 A, 高さ h の筒形の空間である。従ってその体積は $V=Ah$。
(2) 気体は圧力 P でピストンを押し上げようとする。一般に, 一定の圧力がかかる面には, 圧力かける面積という大きさの力がかかる。従って, この場合は気体はピストンを PA という力で押し上げようとする。いま, 座標軸を鉛直上向きにとっているので, 上向きが正。従って, $F_1=PA$。
(3) ピストンは静止しているので, ピストンにかかる力はつりあっていなければならない。従って F_1 を打ち消す力が外から働いているはずである。従って外力は $F_2=-F_1=-PA$。
(4) ピストンの移動がゆっくり（つまりほとんど静止しているということ）なので, 力のつりあいは維持されると考えてよい。外力がなす仕事 dW は, 力 F_2 と変位 dh の積である。従って,

$$dW=F_2\,dh=-PA\,dh \tag{4.60}$$

(5) 変化前の気体の体積は $V=Ah$, 変化後の気体の体積は $V+dV=A(h+dh)$ である。これらの式より, $dV=A\,dh$ を得る。
(6) 略。
(7) 略。（式 (4.34) の両辺に $\int$ をつけて積分すればよい。）
(8) 状態方程式より, $P=nRT/V$。これを前小問の結果に代入すれば与式を得る。
(9) 温度一定なので, 前小問の式より,

$$\begin{aligned}W_{V_1\to V_2}&=-nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}=-nRT\Big[\ln|V|\Big]_{V_1}^{V_2}\\&=-nRT\ln\frac{V_2}{V_1}=nRT\ln\frac{V_1}{V_2}\end{aligned} \tag{4.61}$$

注: 体積 V_1, V_2 はいずれも正なので, 対数の中の絶対値記号は結局は不要になる。

(10) $n=1\,\mathrm{mol}$, $R=8.31$ J mol^{-1} K^{-1}, $T=273$ K, $V_1/V_2=2$, $\ln 2=\log_e 2\fallingdotseq 0.693$ を前小問に代入し, $W_{V_1\to V_2}=1570$ J。（有効数字 3 桁）

答 60 ある基準点から任意の位置 x まで物体を運ぶときの仕事を $W(x)$ とするとき, $U(x)=-W(x)$ で定義される関数 $U(x)$ をポテンシャルエネルギーという。位置エネルギーと同じ。

答 62 式 (4.21) で, $x_0=0$, $x_1=x$ とおきなおせば,

$$U(x)=-W_{0\to x}=\frac{1}{2}kx^2 \tag{4.62}$$

グラフは図 4.8 のようになる。

答 63 式 (4.26) で, $R_0=\infty$, $R_1=R$ とおきなおせば,

$$U(R)=-W_{\infty\to R}=-\frac{GMm}{R} \tag{4.63}$$

グラフは図 4.9 のようになる。

答 64

(1) 式 (4.41) において, $m=2$ kg, $g=9.8$ m s^{-2}, $h=10$ m とすれば, $U=196$ J $\fallingdotseq$ 200 J
(2) 問 44(3) より, バネ定数 k は, $k=6.2\times10^4$ kg s^{-2}。また, $x=0.001$ m として, これらを式 (4.42) に代入すれば, $U=0.031$ J。

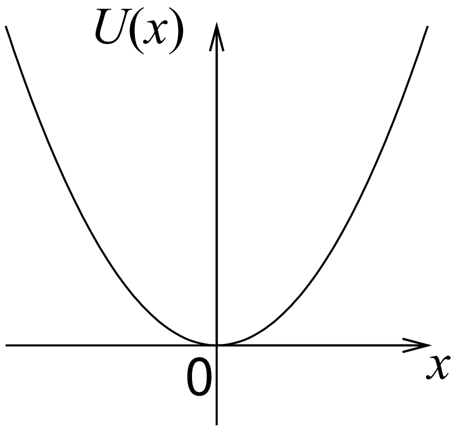

図 4.8　バネのポテンシャルエネルギー

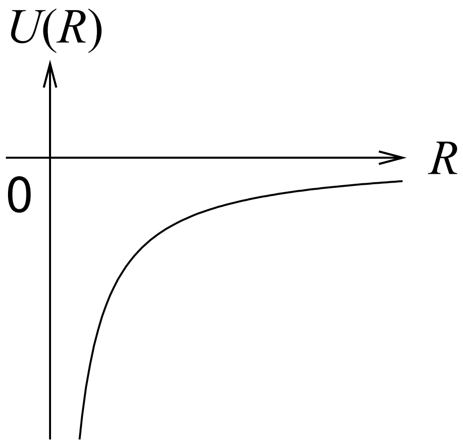

図 4.9　万有引力のポテンシャルエネルギー

(3) 地球の質量を M, 月の質量を m, 地球と月の距離を x とすれば,

$$G = 6.7 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}$$
$$M = 6.0 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$$
$$m = 7.3 \times 10^{22}\ \mathrm{kg}$$
$$x = 4.0 \times 10^{8}\ \mathrm{m}$$

これらを式 (4.45) に代入して, $U = -7.3 \times 10^{28}$ J。

答 65 物体にかかる重力を, 斜面に垂直な方向と, 斜面に平行な方向に分解して考える。前者は斜面から受ける垂直抗力と釣り合って打ち消しあう。後者は

$$mg\sin\theta \tag{4.64}$$

となる (θ は傾斜角)。誰かがこれと等しい大きさの力を斜面に平行で上向きにかけることで物体が斜距離 L だけ移動する。そのとき「誰か」が行った仕事は,

$$mgL\sin\theta \tag{4.65}$$

となる。これはポテンシャルエネルギーの変化にも等しい。

答 66 保存力とは, 物体をある位置から別の位置に運ぶときにその力がなす仕事が, 移動の経路によらずに一定である, というような力である。

答 68 (1) 物体を位置 x_0 から位置 x_1 に運んで位置 x_0 に戻す, という移動も, 物体を位置 x_0 に置いたまま動かさない, というのも, ともに,「物体を位置 x_0 から位置 x_0 に移動する」経路である。前者の仕事は $W_{01} + W_{10}$ であり, 後者の仕事は 0 である（移動距離が無いから)。従って, もし力が保存力なら, $W_{01} + W_{10} = 0$ である。
(2) 動摩擦力の大きさを F_m とし, x_0 と x_1 の間の距離を X とすると, $W_{01} = -F_\mathrm{m}X$ である。ここでマイナスがつくのは, 力の向きが移動方向と逆だからである。同様に, $W_{10} = -F_\mathrm{m}X$ である。従って, $W_{01} + W_{10} = -2F_\mathrm{m}X$ となり, 前小問の式は成り立たない。従って摩擦力は保存力でない（背理法)。

答 69 問 65 とほぼ同様だが, この場合, 物体には, 斜面平行・下向きに, $\mu' mg\cos\theta$ という摩擦力もかかる。そのぶん「誰か」はがんばらねばならない。結果的に,「誰か」が斜面に平行で上向きにかける力は,

$$mg\sin\theta + \mu' mg\cos\theta \tag{4.66}$$

となる。物体は斜距離 L だけ移動するので,「誰か」が行った仕事は,

$$mgL\sin\theta + \mu' mgL\cos\theta \tag{4.67}$$

となる。ところが, 摩擦力は保存力ではないので, ポテンシャルエネルギーの増減には関与しない。従って, ポテンシャルエネルギーの増加は, $mgL\sin\theta$。

答 70 式 (4.56) に, $m = 2.0$ kg, $g = 9.8$ m s^{-2}, $v = 3.0$ m s^{-1} を代入すると, 有効数字 2 桁で $P = 59$ W。

答 71 1 W h = 1 J s^{-1} × 3600 s=3600 J

答 72 原点に電荷 Q を固定し, x 軸上に電荷 q を動かす。位置 x に電荷 q があるとき（$0 < x$ とする), それに働く力 F は, 式 (2.14) より, $F = k\,Q\,q/x^2$ である。無限遠（基準点）から位置 x まで電荷 q を動かすときに, この力がなす仕事は,

$$W_{\infty\to x} = \int_\infty^x F\,dx = \int_\infty^x \frac{k\,Q\,q}{x^2}\,dx = \Big[-\frac{k\,Q\,q}{x}\Big]_\infty^x$$
$$= -\frac{k\,Q\,q}{x} \tag{4.68}$$

となる。式 (4.40) より, $U(x) = -W_{\infty\to x} = k\,Q\,q/x$ と

なる（証明終わり）。

注: 式 (4.68) で, 積分変数 x（つまり dx の x）と, 積分区間の上端の x（つまり $\int_\infty^x$ の x）が「かぶっている」が, これは別物と解釈する。すなわち積分変数 x は, ほんとうは X とか s とか, 何か適当に x 以外の記号で置くのが数学的には正しいところだが, それはめんどくさいしわかりにくくなるので, 横着して x のままにしておくのだ。このような書き方は物理学でよく出てくる。

答 73　(1) 式 (4.57) を位置 x における電荷 q で割ればよい:

$$\frac{U(x)}{q} = \frac{k\,Q}{x} \tag{4.69}$$

(2) $x = 0.529 \times 10^{-10}$ m とする。陽子の電荷は電荷素量なので $Q = 1.602 \times 10^{-19}$ C。また, 式 (2.14) より, $k = 8.987 \times 10^9$ N m^2 C^{-2}。これらを式 (4.69) に代入すると, 27.2 V。

答 74

(1) 単位電荷あたりのポテンシャルエネルギー
(2) 空間の 2 つの点の間を仮想的に荷電粒子を移動させるとき, かかる仕事を電荷で割ったもの。多くの場合, 2 点間の電位の差（電位差）。
(3) J C^{-1}, 言い換えると, V。
(4) 0.6 J
(5) 電子の電荷は -1.602×10^{-19} C なので, それが 1 V の電位にあると, -1.602×10^{-19} J。

答 76　(1) 36 A h=36 (C/s)×3600 s=130000 C。(2) 12 V×36 A h=12×36×3600 V A s=1.6×10^6 J。(3) 左右両方で 46 W。12 V の電圧では, 46 W/(12 V)=3.8 A の電流が流れる。36 A h/(3.8 A)=9.4 h。およそ 9 時間で空になる。これが LED でなく, 普通のハロゲンランプなら, もっと短い時間（数時間）で空になってしまう。

よくある質問 92　本当なのかなーって疑いたくなる値が答えだったり, 物理ってなんなんだー... 皆さんの既成概念を壊すために, そういうのを狙って問題を作ってます。

よくある質問 93　代入する値がほしいです。... そのうち, 文字（変数）だけの答えにも慣れますよ。そっちのほうが, いろんな量どうしの関係がわかりやすい。

よくある質問 94　なんとなくわかるけど, 問題解くときにわけわからなくなります。... だから問題演習は大事。しっかり考えて, わからなければ解答を読んで, また考えて下さい。

よくある質問 95　高校の物理の先生が「物理ができるかどうかは絵が上手に描けるかどうかで決まる」と言っていましたがそうなんですか? ... 「決まる」かどうかはわかりませんが（笑）, 絵が上手に描けるのは大きな武器です。絵や文章など, 自分を表現するツールを豊かに持っている人は, 知的に成長しやすいと思います。

第5章

運動の三法則

これから我々は物体の運動に関する物理学を学ぶ。「物体の運動」とは, 物体の位置や向きや形状が時刻とともに変化する様子である。とはいうものの, 当面は「位置」だけに着目し, 「向き」や「形状」については難しすぎるので後回しにする。そのために我々はまず物体を質点としてモデル化し, 質点の運動を考える。

よくある質問 96　ということは, 物体が変形したり回転したりする様子はわからない, ということですか? そんなのしょぼ過ぎません? ... 大丈夫。質点の運動をきっちり理論化できたら, それを使って変形や回転なども理論化できます（そのうち学びます)。物事には順序というものがあるのです。

というわけで, 我々の当面の目標は, 質点の位置を時刻の関数として表すことだ。それには, ベクトル, 微分, 積分という 3 つの数学を駆使する。まずその準備をしよう。

5.1　ベクトルとスカラー

中学校理科で学んだように, 速度や力は, 「向き」と「大きさ」を持つ。このように, 向きと大きさを持つ量のことを「ベクトル」と呼ぶ（定義)。それに対して, 大きさだけを持ち向きを持たない（ただしプラスとマイナスはあってもよい）ような量を「スカラー」と呼ぶ（定義)。例えば力はベクトルだが, 「力の大きさ」はスカラーである。

ベクトルを記号で表すときは, 高校では $\vec{F}$ とか $\vec{v}$ のように, 「アルファベットに上付き矢印」を使っていたが, 大学では, $\mathbf{F}$ とか $\mathbf{v}$ のように, 「アルファベットの太字」を使う（慣習)。それに対して, スカラーは, 上矢印もつけず, 太字でもない, 普通の細字のアルファベットで表す（慣習)。

ベクトルとスカラーをきっちり区別しないと, 数学的な取り扱いで大きなミスをする可能性がある。そこでこのように,

慣習

ベクトルの記号は太字
スカラーの記号は細字

で書き分けるのである。

ベクトルは, 3 次元空間の中の座標軸の方向, すなわち x 方向, y 方向, z 方向のそれぞれの大きさ（の組み合わせ）として表すこともできる。そういうのを「成分」という。例えば, $\mathbf{F}$ を力のベクトルとすると, これは

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) \tag{5.1}$$

のように, 3 つの成分 F_x, F_y, F_z の組み合わせで表すことができる。

ベクトルの成分はスカラーである（向きがあらかじめ決められているので, 大きさしか意味を持たない)。従って成分は細字で書かねばならない。つまり, 式 (5.1) の左辺の $\mathbf{F}$ は太字であり, 右辺の F_x, F_y, F_z は細字である。式 (5.1) を,

$$F = (F_x, F_y, F_z) \qquad \text{と書いてはダメだし,}$$
$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_z) \qquad \text{と書いてもダメ}$$

である。

よくある間違い 5　手書きの太字を, 普通の文字を筆圧高めでぐりぐり濃く書けば太字になると思っている... 印刷物ではそんなかんじに見えますが, 手書きでそれは違います。手書きで太字を書くときは, どこかを二重線にするのです。「ライブ講義 大学 1 年生のための数学入門」P153 参照。

● **問** 77　以下のアルファベットの太字を手書きせよ:
(1) $\mathbf{F}$ ... 力を表す (force) のによく使う。
(2) $\mathbf{a}$ ... 加速度 (acceleration) を表すのによく使う。
(3) $\mathbf{v}$ ... 速度 (velocity) を表すのによく使う。
(4) $\mathbf{r}$ ... 位置ベクトルを表すのによく使う。
ヒント: 筆圧高めでグリグリ書けばよいってことではないよ!! 上の「よくある間違い」参照。

よくある質問 97　力はベクトルなので, 太字で書くべきですよね。でも, P.32 **では,** $F = -kx$ **みたいに, 細字で書いてましたが**...? ... それはバネに関するフックの法則ですね。バネは普通, 1 方向にしか伸び縮みしません。その方向に x 軸をとり, それに垂直な方向に y 軸, z 軸をとれば, 力 $\mathbf{F}$ は

$$\mathbf{F} = (F_x, 0, 0) \tag{5.2}$$

と書けますね（x 軸方向以外の成分はいつもゼロ）。ということは, y 方向や z 方向のことを気にする必要が無いから, 改めて F_x を F と書いて,

$$\mathbf{F} = (F, 0, 0) \tag{5.3}$$

と書いても差し支えありません。で, この x 成分を取り出したのが, $F = -kx$ の左辺の F なのです。すなわち, 常にひとつの方向（ひとつの直線の上）に限定された現象を考える場合は, その方向での成分だけをいきなり取り出して, 細字で書くのが普通です。これは慣習的なことですが, 学生がよく混乱するので, はっきり書いておきましょう:

慣習

直線上に限定した議論では, ベクトルであっても細字記号を使う。

5.2　位置を微分すると速度, 速度を微分すると加速度

物理学では, まず, 質点の位置をベクトルとして表す。すなわち, まず空間のどこかに<u>原点</u>と呼ぶ固定点を設定し, この原点から見た「向き」と「距離」の組み合わせ（つまりベクトル）で, 位置を表す。そう考えるといろいろ便利だからである。

そのようなベクトルを<u>位置ベクトル</u>という。位置ベクトルのことを単に位置ともいう。位置ベクトルは, 慣習的に $\mathbf{r}$ で表すことが多い。

ここで大事な概念を 2 つ定義する:

速度と加速度の定義

<u>速度</u>とは位置を時刻で微分したもの。
<u>加速度</u>とは速度を時刻で微分したもの。

位置, 速度, 加速度は, ニュートン力学の主役である。これらを使って物理法則を数学的に表し, それを解くのがニュートン力学なのだ。というわけで, まずこれらの定義を数式で表現してみよう:

まず, 時刻を t とし, 質点の位置を

$$\mathbf{r}(t) = (x(t),\, y(t),\, z(t)) \tag{5.4}$$

とする。以後, (t) は, 「これは t の関数だ」というしるしであり, **時には省略されることもある**。

また, 質点の速度を

$$\mathbf{v}(t) = (v_x(t),\, v_y(t),\, v_z(t)) \tag{5.5}$$

とし, 質点の加速度を

$$\mathbf{a}(t) = (a_x(t),\, a_y(t),\, a_z(t)) \tag{5.6}$$

とする。そして速度と加速度の定義は以下の式のように表現できる:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) \tag{5.7}$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) \tag{5.8}$$

よくある質問 98　この $\frac{d}{dt}$ **って何ですか**? ... その後の関数を変数 t で微分する, という意味の記号です。$\mathbf{r}'$ や $\mathbf{v}'$ の肩のダッシュもそうです。

よくある質問 99　ベクトルを微分するのですか? そんなの見たことありません。... 数学の教科書（「ライブ講義 大学 1 年生のための数学入門」10.10 節）に書いてありますが, ここでも説明しておきましょう。変数 t によって決まるベクトル関数 $\mathbf{r}(t)$ について, $t = t_0$ と $t = t_0 + dt$ のそれぞれのときを考えましょう（dt は微小量とします）。つまり, $\mathbf{r}(t_0)$ と $\mathbf{r}(t_0 + dt)$ を考えます。dt は微小量なので, この 2 つのベクトルは互いに近いものどうしでしょう。そこで, この 2 つのベクトルの差を dt で割ったもの, つまり

$$\frac{\mathbf{r}(t_0 + dt) - \mathbf{r}(t_0)}{dt} \tag{5.9}$$

を, $t = t_0$ における, $\mathbf{r}$ の微分（正確には微分係数や導関数）と呼び, $\mathbf{r}'(t_0)$ と書きます（dt は限りなく 0 に近い微小量）。あるいは, 同じことですが,

$$\mathbf{r}(t_0 + dt) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)\, dt \tag{5.10}$$

となるようなベクトル $\mathbf{r}'(t_0)$ が $\mathbf{r}$ の微分です。形式的には, 普通の関数の微分と同じです。ただ, その定義に出てくる足し算や引き算がベクトルの足し算や引き算になるだけです。

よくある質問 100　では $\frac{d^2}{dt^2}$ **って何ですか**? ... 変数 t で微分し, さらにもう 1 回, 変数 t で微分する, という意味です。$\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}$ を縮めて書くとそうなるじゃないですか。

よくある質問 101　それなら $\frac{d^2}{d^2t^2}$ **であるべきでは**? ... 分母の dt は d かける t ではなく, dt でひとつの量です。「t のわずかな変化」を意味します。

ベクトルの微積分は, ベクトルの成分ごとの微積分におきかえて考えればよい。たとえば式 (5.7) を各成分に

わけて書き改めると, 以下のようになる:

$$v_x(t) = \frac{d}{dt}x(t) \tag{5.11}$$

$$v_y(t) = \frac{d}{dt}y(t) \tag{5.12}$$

$$v_z(t) = \frac{d}{dt}z(t) \tag{5.13}$$

また, 式 (5.8) を各成分にわけて書き改めると, 以下のようになる:

$$a_x(t) = \frac{d}{dt}v_x(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) \tag{5.14}$$

$$a_y(t) = \frac{d}{dt}v_y(t) = \frac{d^2}{dt^2}y(t) \tag{5.15}$$

$$a_z(t) = \frac{d}{dt}v_z(t) = \frac{d^2}{dt^2}z(t) \tag{5.16}$$

ところで, 「速度」は簡単な概念のようでいて, 実はきちんと理解している人は多くはない。

まず, 「速度」と「速さ」を混同している人が多い。速さは速度の絶対値であり, 従って向きを持たない。小学校で習う「距離割る時間」は速さであって, 速度ではない（距離は向きを持たない)。

そこで中学校や高校では「速度」を「速さと向きをあわせたもの」のように教わるが, それは定義ではない。なぜなら「向き」や「あわせる」ということの定義が欠けているからである。

よくある質問 102 「向き」なんて自明じゃないですか? ... ある物体が動いているとき, その向きをあなたはどう判断しますか? 物体を目で追って, ちょっと前にあった位置と今ある位置を比べていますよね。つまり, ちょっと前の位置から今の位置へ, 頭の中で矢印を引いている。つまりベクトルの引き算で「動きの向き」を定義できるのです。それを自明というならそれでもよいですが, 「自明」というだけではそこから先の議論が進みません。たとえば物体の運動をコンピュータで解析するとき, コンピュータに「向き」を理解させ計算させるには, コンピュータでもわかる定義が必要です。ベクトルの引き算はコンピュータでもできますからね。

よくある質問 103 速度と速さを区別しなければならない具体例ってありますか? ... 時計の針の先のように, いつも同じ「速さ」で円上をぐるぐる回る運動を考えましょう。そういうのを「等速円運動」と言います（後で学びます)。この「等速」は「等しい速さ」であって,「等しい速度」ではありません。上述したように「等しい速度」の運動は必ず直線上の運動です。

5.3 「解析学の基本定理」で加速度から速度を, 速度から位置を求める

前節では, 位置から速度を, そして速度から加速度を定義した。要するに, それぞれ時刻で微分すればよい。本節では逆に, 加速度から速度を, そして速度から位置を求める数学的方法を述べる。これは, 今後もいろんなところでよく使う考え方である。

「解析学の基本定理」（数学の教科書参照）によれば, 微分可能な関数 $f(t)$ について,

$$\int_a^x \frac{d}{dt}f(t)\,dt = f(x) - f(a) \tag{5.17}$$

が成り立つ。ここで, $a = 0$ とおいて変形すると,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \frac{d}{dt}f(t)\,dt \tag{5.18}$$

となる。ここで, x を形式的に t と置き直す。つまり, 積分区間の上端の t と積分変数の t が「かぶる」ことになる（これが気持ち悪いという人は, P.52 答 72 の解説を参照しよう)。すると,

$$f(t) = f(0) + \int_0^t \frac{d}{dt}f(t)\,dt \tag{5.19}$$

となる。

さて, 式 (5.19) で f を x で置き換えれば（これは式 (5.17) で出てきた x とは無関係),

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(t)\,dt \tag{5.20}$$

となる。ここで式 (5.11) を使ったことに注意。

同様に, 式 (5.19) で f を v_x で置き換えて考えれば,

$$v_x(t) = v_x(0) + \int_0^t a_x(t)\,dt \tag{5.21}$$

となる。ここで式 (5.14) を使ったことに注意。

$\mathbf{r}$ や $\mathbf{v}$ の y 成分と z 成分についても同様に考えれば,

$$y(t) = y(0) + \int_0^t v_y(t)\,dt \tag{5.22}$$

$$z(t) = z(0) + \int_0^t v_z(t)\,dt \tag{5.23}$$

$$v_y(t) = v_y(0) + \int_0^t a_y(t)\,dt \tag{5.24}$$

$$v_z(t) = v_z(0) + \int_0^t a_z(t)\,dt \tag{5.25}$$

が成り立つ。式 (5.20), 式 (5.22), 式 (5.23) をまとめて,

ベクトルの記法を用いて書けば,

$$(x(t), y(t), z(t)) = (x(0), y(0), z(0)) + \Big(\int_0^t v_x(t)\,dt, \int_0^t v_y(t)\,dt, \int_0^t v_z(t)\,dt\Big) \quad (5.26)$$

となるが,

$$\Big(\int_0^t v_x(t)\,dt, \int_0^t v_y(t)\,dt, \int_0^t v_z(t)\,dt\Big) \quad (5.27)$$

を

$$\int_0^t (v_x(t), v_y(t), v_z(t))\,dt \quad (5.28)$$

と書き, さらに, 式 (5.4), 式 (5.5) を思い出せば, 式 (5.26) は次のように簡潔に書ける:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t)\,dt \quad (5.29)$$

これは, 各時刻の速度が分かっている状況で, 各時刻の位置を求めるときに使う式である。

同様に, 式 (5.21), 式 (5.24), 式 (5.25) をまとめて, 次のように簡潔に書ける:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{a}(t)\,dt \quad (5.30)$$

これは, 各時刻の加速度が分かっている状況で, 各時刻の速度を求める式である。

式 (5.29), 式 (5.30) は, あらゆる運動について成り立つ, 一般性の高い式である。なぜならばこれらは物理学の式ではなく, 数学（微積分学）の式だからである。

よくある質問 104 x を t で置き換えて, また f を x で置き換えて, って, そんな勝手なことしていいのですか? ... いいのです。これらは形式的な置き換えに過ぎません。

よくある質問 105 いきなり微分と積分とベクトルがガンガン出てきてびっくりです。これ物理じゃなくて数学じゃないですか。数学は使わないで欲しいです... だから言ったでしょ, 物理は数学をガンガン使うって。「数学を使わない物理」の方が苦行です。数学を使うほうが, 本質的に, 正確に, 楽に物理を表現できるのです。

よくある質問 106 もっと直感的なイメージで説明して欲しいです。... もちろんイメージは大事だし有用です。しかし, 物理学は, **たとえ直感でイメージできるようなことであっても, わざと数学の言葉や数式を使って定義・導出する**のです。速度は我々にとって, 直感的にイメージしやすい量ですので, そのイメージをそのまま言葉にしようとしがちですが, 物理学はあえてそういうことはやらないのです。なぜかというと, 物理学は「自然の法則は数学で記述できる」という世界観であり, 自然現象を数学で表現し, 数学で解明するのです。速度を「位置を時刻で微分したもの」と定義した瞬間, 微積分の数学を使って, 位置と速度が結びつき, 「速度を積分することで位置が求まる」ことも自明になるのです（式 (5.29)）。そういうアプローチの積み重ねが, 物理学に自然現象を解明・予測・制御する強い能力をもたらしたのです。

よくある質問 107 私は高校生物学の教員免許が欲しいだけです。数学は勘弁して欲しいのです。... 「高校生物学の教員免許」というものはありません。あるのは「高校理科の教員免許」であり, それには漏れなく物理が付いてくるのです。「物理はできない高校生物の先生」というのは制度上, 許されないのです。そして物理を学ぶには数学は必要なのです。

よくある質問 108 高校物理では微積分は使わないのだから, 高校理科の教員免許のためならば, 物理で微積分を使う必要は無いのでは? ... 何かを教える人は, 教える内容よりも深くしっかり理解していなければならないのです。それが教育者です。横着言わずに頑張って学んで, 良い先生になってください。

● **問** 78 ある質点が, 時刻 t で, 位置 $x(t)$, 速度 $v(t)$ で直線上を移動している。v_0, k を定数として, $x(0) = 0$, $v(t) = v_0 \exp(kt)$ が成り立つ時, $x(t)$ を v_0, k, t で表わせ。ヒント: いきなり難しそう!! とか思う必要はない。この問題は見掛け倒しである。各時刻での速度がわかっている場合に, 速度から位置を求めるには, どの式を使えばよかっただろうか?

5.4 等速度運動（等速直線運動）

ではこれから, これらの式を駆使して, いくつかの典型的・限定的な運動を調べていく。本節では, まず最もシンプルな運動を考えよう。

速度 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ が（向きも含めて）一定であるような運動[*1]を等速度運動とか等速直線運動という（定義）。この場合, v_x, v_y, v_z は t によらない定数である。

[*1] ここではあえて教育的に「向きも含めて」と書いたが, そもそも速度は, 大きさと向きを持つベクトルなので, 「速度が一定である」と言えば, 向きも含めて一定であることを自動的に意味する。

すると, 式 (5.20) の積分は簡単にできて,

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t v_x\,dt \\ &= x(0) + [v_x\,t]_0^t \\ &= x(0) + v_x\,t \end{aligned} \tag{5.31}$$

となる。同様のことを式 (5.22), 式 (5.23) についても行うと, 以下のような 3 つの式が得られる:

$$x(t) = x(0) + v_x t \tag{5.32}$$
$$y(t) = y(0) + v_y t \tag{5.33}$$
$$z(t) = z(0) + v_z t \tag{5.34}$$

となる。ベクトルの記法を使えば, これらをまとめて, 以下のように簡潔に書くことができる:

$$(x(t), y(t), z(t)) = (x(0), y(0), z(0)) + (v_x, v_y, v_z)t$$

式 (5.4), 式 (5.5) を思い出せば, これは次式のように書くことができる:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}\,t \tag{5.35}$$

この式から, 質点 $\mathbf{r}(t)$ は, 固定点 $\mathbf{r}(0)$ を通り, 方向ベクトルが $\mathbf{v}$ であるような直線を描くことがわかる。すなわち, 速度が一定の運動（等速度運動）は, 必ず直線の上での運動である。従って, 等速度運動をわざわざ等速「直線」運動という必要は無い。

よくある質問 109　なら, なぜわざわざ等速「直線」運動って言ったりするのですか?... なぜか, 高校の物理学ではそう言う慣習のようです。等速度であれば必然的に直線上に限定された運動になるのですが, そのことは上で見たように数学, 特に微積分を使わねば証明できませんので, 高校生にはハードルが高い, というわけで, 蛇足っぽいけど「直線」とつけるのでしょう。その名残で, 大学の物理の教科書でも等速「直線」運動と書いている本は多いです。

さて, 速度が $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ で一定である状態を静止という。静止も「速度一定」なのだから当然,「等速度運動」である（動いていないのに「運動」というのも妙な気がするが笑)。

よくある質問 110　速度 $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ は, 単位をつけなくてよいのですか? 「0」じゃなくて「0 m/s」じゃないですか? ... 単位をつけたければつけてもよいですが, 0 には単位は不要です。物理量は数値 × 単位です。単位に 0 がかかるのだから単位も消えて 0 です。それに, 0 m/s も 0 cm/s も 0 km/h も同じでしょ? なら, 単位をつける意味, ないですよね?

5.5　等加速度運動

次にシンプルな運動は, 速度は変わるが加速度は一定, という運動である。そのような運動を等加速度運動という（定義)。

この場合, a_x は t によらない定数であり, 式 (5.21) の積分は「定数の積分」だから簡単にできる。その結果は,

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_x(0) + \int_0^t a_x\,dt = v_x(0) + [a_x\,t]_0^t \\ &= v_x(0) + a_x\,t \end{aligned} \tag{5.36}$$

となる。これを式 (5.20) に代入すると,

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t v_x(t)\,dt \\ &= x(0) + \int_0^t (v_x(0) + a_x\,t)\,dt \\ &= x(0) + \Big[v_x(0)\,t + \frac{1}{2}a_x\,t^2\Big]_0^t \\ &= x(0) + v_x(0)\,t + \frac{1}{2}a_x\,t^2 \end{aligned} \tag{5.37}$$

となる。すなわち, 加速度一定の運動は, 時刻の 2 次関数で表されるのだ。この具体例を, 後ほど学ぶ。さて上の式と同様のことが y 成分, z 成分でも言えるので, まとめて,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \mathbf{a}\,t \tag{5.38}$$
$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}(0)\,t + \frac{1}{2}\,\mathbf{a}\,t^2 \tag{5.39}$$

と書くこともできる。これらの式は, 高校物理でも出てくるが, 実は「しょぼい」式である。なぜならば, **これらは「加速度が一定」という特殊な条件でしか使えない**のだ。普遍性・一般性に乏しいのだ。

ではもっと複雑な運動はどういう式になるだろう? それは加速度が時間とともに変わるような運動である。それを理解するには, 次節の話が欠かせない。

よくある質問 111　高校物理では, 式 (5.36) と式 (5.37) を公式として記憶させられました。やっぱ覚えるべきでしょうか? ... こんなしょぼい式を暗記しても仕方ないし, どうせ忘れます。それよりも, 微積分の考え方を理解して, この式を自力で導けるようにする方が重要です。

● **問** 79　以上の解説を参考にして, 式 (5.36), 式 (5.37) の導出を再現せよ。

よくある質問 112　等加速度運動は等加速度「直線」運動と言ったりはしないのですか? ... 直線上に限定された等加速

度運動をそのように呼ぶことはあります。しかし, 等速度運動と違って, 等加速度運動は, 直線上ではない運動になることがあります。たとえば地上で野球ボールを斜めに投げ上げると, ボールの運動は直線ではなく放物線を描きます（空気抵抗を無視し, 地球の曲率を無視し, ボールにかかる重力が場所によって同じと仮定すれば)。このとき, ボールにかかる加速度は, 鉛直下向きで常に一定, つまり等加速度運動です。この運動については後で詳しく検討します。

5.6　運動の三法則

第 2 章で, 力に関する法則について述べた。ではそもそも力とは何なのだろうか? 力は自然界に何をもたらすのだろうか? 端的に言えば, 力は, 物体の運動に変化をもたらすものだ。それを支配するのが以下の, ニュートンの「運動の三法則」だ。これらは必ず記憶しなければならない。

運動の三法則

- 第一法則：質点に働く合力が $\mathbf{0}$ のとき, 質点は等速度運動をする。(慣性の法則)
- 第二法則：質量 m の質点に合力 $\mathbf{F}$ がかかると, 質点は次式に従って運動する（運動方程式）：

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{5.40}$$

  ここで, $\mathbf{a}$ は質点の加速度である。
- 第三法則：2 つの質点 A, B において, A が B に力を及ぼすとき, A は B から, 同じ大きさで逆向きの力を及ぼされる。(作用・反作用の法則)

この「運動の三法則」も, 物理学における基本法則 (根源的な原理) であり, なぜ成り立つのかは, 誰も知らない。しかし, 運動の三法則は, 歴史的にも理論体系としても, 科学の根幹である。運動の三法則が発見されたとき, 人類は科学の扉を大きく開いたのだ。これは知識人の教養である。

よくある質問 113　**これは覚えなきゃいけないのですか? 物理の公式は, 理解すれば暗記なんかしなくていいって, 先生, 言ってませんでした?** ... そんな乱暴なこと言っていませんよ。基本法則から導出できるこまごまとした公式まで闇雲に暗記する必要はない, と言ってるだけです。この「運動の三法則」は「こまごまとした公式」ではなく,「基本法則」です。物理学の主役です。これを覚えなかったら, 何も始まりません。

よくある質問 114　**どれが基本法則で, どれが「こまごまとした公式」なのか, どうやって見分けるのですか?** ... テキストをしっかり読んで, 物理の理論体系を丁寧に追っていけば, 自然にわかります。逆にいうと, それがわからないならば, 勉強のやり方がどこかおかしいのです。

5.7　慣性の法則（第一法則）

「質点に働く合力が $\mathbf{0}$ のとき, 質点は等速度運動をする」という慣性の法則は中学校で習うが, これを正確に理解するのは実は簡単ではない。まず, 多くの人は, 物体は力がかかってこそ運動すると思い込んでいる。ところが, 慣性の法則は, 力がかかっていない（合力が $\mathbf{0}$）であっても物体は「等速度運動」という運動をするというのだ。つまり,

「力がかからなくても物体は動く」 .... (*)

のだ。これには多くの人が驚いた顔をする。

しかしこれは多分に言葉の解釈の問題である。というのも,「動く」には,

- 「(止まっていたものが）動き始める」
- 「動いている状態にある」

という 2 つの解釈がある。前者の意味に解釈すると, 確かに (*) はおかしい, 間違った命題だ。止まっている物体が動き始めるには, 力が必要だ。慣性の法則が言っているのは, 後者の意味だ。既に運動状態にある物体は, さらに押したり引いたりしてあげなくても, 放っといてもその運動状態（それは等速度運動）を続けるのだ。

第一法則は, その対偶をとって「質点が等速度運動以外の運動をするとき, 質点に働く合力は $\mathbf{0}$ ではない」と言い換えることもできる（対偶とは何かがわからない人は, 数学の教科書で調べよ)。

例 5.1　質点が, ある円の周上を, 一定の速さ (速度ではない!) でまわるような運動を考える（それを「等速円運動」という)。そこでは, 速度の大きさ（つまり速さ）は一定でも速度の方向が時々刻々と変化するので,「等速度運動」ではない。従って, 等速円運動では, 必ず何らかの力 ($\mathbf{0}$ でない合力) が質点にかかっている。後に学ぶので今は理解できなくてよいが, それを「向心力」という。(例おわり）

● **問** 80　エスカレーターで「手すりにおつかまり下さい」と言われるのはなぜか? 慣性の法則の観点で説明せよ。ヒント: 手すりを持たないと, 上りよりも下りの方

が危ない。

ところで第 2 章では,「物体に働く力（合力）が $\mathbf{0}$ であるとき, 静止している物体は静止し続ける」と学んだ。前述のように「静止」は「速度 $\mathbf{0}$ の等速度運動」である。従ってこれは慣性の法則の特別な場合である。

ところが, これを以下のように誤解する人がいる。

誤解 1: 「物体に働く力（合力）が $\mathbf{0}$ であれば物体は静止する」... 合力がゼロの物体は等速度運動をするのであり, その速度は $\mathbf{0}$ でなくても構わない。従って, 静止していなくてもかまわない。例えば, 宇宙空間を飛んでいる隕石は, 何かに引かれたり押されたりして飛んでいるわけではなく, それにかかる力が $\mathbf{0}$ でありながら, そのまま飛び続ける。そのように,「働く力が $\mathbf{0}$」でも物体が運動するケースがあるのだ。

誤解 2: 「物体の速度が $\mathbf{0}$ のとき, 物体に働く力（合力）は $\mathbf{0}$ である」... 「速度 $\mathbf{0}$」は「静止」とは限らない。静止は「速度 $\mathbf{0}$ が続く」という状態である。一瞬だけ「速度 $\mathbf{0}$」が実現するような運動は静止ではない。例えばボールを鉛直上向きに投げ上げたら, 最高到達点でボールは一瞬だけ速度 $\mathbf{0}$ になる。しかしその直前や直後は速度は $\mathbf{0}$ ではない。そしてこのような運動では, ボールには鉛直下向きの力（重力）がかかり続けている。つまり, 最高到達点で速度 $\mathbf{0}$ になったボールにも, $\mathbf{0}$ でない力がかかっているのである。

● **問** 81 「物体が静止している」を条件 A,「物体が等速度運動をしている」を条件 B,「その物体に働く力（合力）は $\mathbf{0}$ である」を条件 C とする。

(1) A は C の必要条件? 十分条件?
(2) B は C の必要条件? 十分条件?
(3) B は A の必要条件? 十分条件?

ヒント: 必要条件や十分条件がわからない人は, 数学の教科書を見よう!

5.8 運動方程式（第二法則）はすごい大事!

さて, 等速度運動以外の運動も扱うのが次の第二法則だ。第二法則（運動方程式）は, **君が大学 1 年次の物理学で学ぶべき最も重要な基本法則**だ。この法則の意味を今から丁寧に読み解いていこう:

式 (5.40), すなわち $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ という式において, $\mathbf{F}$ と $\mathbf{a}$ はベクトルである。つまり大きさと方向を持つ。成分で書いて,

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) \tag{5.41}$$

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) \tag{5.42}$$

とすれば, 方程式 (5.40) は,

$$F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y, \quad F_z = ma_z \tag{5.43}$$

という 3 つの方程式と同じことだ。

よくある質問 115 **なぜ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ なのですか? なぜこの式は成り立つのですか?** ... それは「聞かないお約束」です。これも含めて「運動の三法則」は, とにかく成り立つものとして受け入れるのです。それが「ニュートン力学というゲームのルール」です。

式 (5.40) は, 左辺と右辺を入れ替えて次式のように表されることもあるが, 正直, どちらでもよい:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \tag{5.44}$$

よくある質問 116 **高校の先生は, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ではなく $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ だ, と言っていましたが。。。** ... そういう人はいます。「物理学では等号の左辺と右辺で意味は違うのだ」という考え方です。でもそれはその人が自分の世界観や物理観をもとに作ったものであり, 広く認められているような一般的な約束ではありません。むしろ, 等号は左右を入れ替えても成り立つと数学では約束されていますし（等号の公理）, 物理学の法則は数学で記述されるのですから, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ と $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ は厳密に同じであり, どちらも正しいのです。

方程式 (5.40) は, 式 (5.8) を使って, 以下のように表されることも多い:

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{5.45}$$

$$\mathbf{F} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \tag{5.46}$$

式 (5.40) から, 力は質量（SI 単位は kg）と加速度（SI 単位は $\mathrm{m\ s^{-2}}$）の積と同じ単位を持たねばならぬ。だから, 力の SI 単位が $\mathrm{kg\ m\ s^{-2}}$ になるのであり, この単位を N （ニュートン）と呼ぶのだ。

さて, 式 (5.45)(5.46) を見ると, 運動方程式は, 位置や速度に関する, 微分方程式（関数の微分を含む方程式）だとわかる。一般に, 微分方程式は, 未知の関数の方程式であり, それを「解く」ことによって未知だった関数が具体的に求まる。今の場合は, 力 $\mathbf{F}$ と, 初期値（ある時刻における位置と速さ）が具体的にわかれば, 運動方程式が解ける。そしてその結果, 速度 $\mathbf{v}(t)$ や位置 $\mathbf{r}(t)$

という, 時刻 t に関する関数（ベクトル値関数）が, 全ての時刻 t において具体的に求まる。つまり, **質点の運動の全てが数学的に決まってしまう**。つまり, 運動方程式は, あらゆる質点の運動を予測する能力を秘めているのだ[*2]。

ところで, 式 (5.40) で $\mathbf{F}=\mathbf{0}$ と置いてみよう。すると, $\mathbf{0}=m\mathbf{a}$ となる。質量 m が 0 でなければ, 結局, $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ だ。$\mathbf{a}$ は速度の微分なので, それが $\mathbf{0}$ ということは, 速度が（向きも含めて）時刻によらず一定, ということだ。つまり, 働く力がゼロなら質点は等速度運動をする, ということだ。これは第一法則（慣性の法則）と整合する。つまり, 質点に力がかかる場合とかからない場合のどちらの場合も, 第二法則で表現することができるわけだ。ということは, 第 1 章で学んだ「オッカムの剃刀」に従って, 第一法則は削ってしまうべきではないだろうか?（運動の"二"法則の方が, "三"法則よりシンプルだ！）いや, それでもなお, 第一法則は削ってはならないのだ。このあたりは, いずれ「慣性系」という概念を学ぶときに詳述する[*3]。

また, 第三法則（作用・反作用の法則）は, 既に述べた。

運動の三法則や万有引力の法則は, ニュートンが発見した。これらの法則から導かれる物理学（力学）を, ニュートン力学という。

以上で, 力学の根源的な法則は終わりだ。あとは, これらの法則から導出される派生的な法則である。

● **問** 82　運動の三法則を 3 回書いて記憶せよ。（それぞれの名前だけでなく内容を! $\mathbf{F}$ と $\mathbf{a}$ は太字であることに注意!)

● **問** 83　運動の三法則について, 以下の記述それぞれについて, 正しいか, 正しくないか, 理由もつけて述べよ。

(1) 質点 A が質点 B に力を及ぼすとき, A は B から, 同じ力を受ける。
(2) 質点が等速度運動をしているとき, 質点にかかる合力は $\mathbf{0}$ である。
(3) 質量 m の質点に合力 F がかかるとき, 質点の加速度を a とすると, $F=ma$ が成り立つ。

よくある質問 117　**作用・反作用の法則を述べよとの問題で,「質点 A が質点 B に作用したら, 質点 B は質点 A に...」と書いたらダメ出しされました。なぜですか**? ... 「力を及ぼす」を「作用する」と言い換えてはダメです。物理学では「作用」は別の意味の言葉として定義されています。 詳細は述べませんが, 「解析力学」という高度な物理学で使う言葉です。

よくある質問 118　**なら,「作用・反作用の法則」という言葉の中の「作用」はいいのですか**? ... 個人的には, この「作用・反作用の法則」という呼び方はイケてないと思います。この法則は力のかかり具合を述べるものであり, 決して上述の解析力学的な「作用」を述べるのではありませんから, 誤解を招きかねない表現だと思います。「力をかける・かけられるの法則」とかの方がぴったり来ます。しかし物理学ではなぜかこの法則を「作用・反作用の法則」と呼ぶ慣習なのです（泣)。というわけで, 物理学では「作用」という言葉は不用意に使わないように気をつけましょう。

5.9　質量と速度の積を運動量という

ところで, 唐突だが, ここで<u>運動量</u>というものを以下のように定義する:

運動量の定義

m を質点の質量, $\mathbf{v}$ を質点の速度とすると,

$$\mathbf{p}:=m\mathbf{v} \tag{5.47}$$

を質点の運動量と呼ぶ。

すると, m を定数とみなせば, 運動方程式 (5.40) は,

$$\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{5.48}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{F} \tag{5.49}$$

などともあらわされる。これらはもちろん, 全て互いに同じ方程式である[*4]。運動量という概念は, 後に大変重要な働きをする。

● **問** 84　運動量の定義を 5 回書いて記憶せよ。($\mathbf{p}$ と $\mathbf{v}$ は太字であることに注意!)

よくある質問 119　**サッカーで,「長友佑都選手の驚異の運動量」とかよく言いますが, あれのことですか**? ... 長友選手は

[*2] そのため, 運動方程式は人類に運命論的な世界観を突きつけることになった。
[*3] 藤原邦男「物理学序論としての力学」東大出版, p. 36-37 参照。
[*4] ただし, m が一定でないような場合（光速に近い高速運動など）は, $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ は成り立たなくても $\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt$ は成り立つ。従って, $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ より $\mathbf{F}=d\mathbf{p}/dt$ のほうが, より一般性の高い記述である。

疲れ知らずでよく走り回る, という意味ですね。でも, 違います。物理学用語の「運動量」は, それとは全く違うことを意味します。

よくある質問 120　運動量の定義について。「$\mathbf{p}$ を運動量, m を質量, $\mathbf{v}$ を速度とする。$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ が成り立つ」と書いたら, なんかダメっぽいことを言われました。なぜですか? ... これは,「が成り立つ」がダメなのです。そこを「とする」とか「と定義する」と書けばＯＫでした。

「成り立つ」は「そうなる」ということです。ところが, ここでは定義を述べています。$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ は「そうなる」のではなく,「そうする」「そう決める」「そう約束する」「そう定義する」ものなのです。運動量 $\mathbf{p}$ の意味や正体が, この式によって初めて定まるのです。

こういうところで「成り立つ」を使ってしまうと, あたかも運動量 $\mathbf{p}$ が別のところで別の意味として定義され, そしてそれが, 何かの理論や奇跡によって, $m\mathbf{v}$ と等しいことが確かめられた! みたいに受け取られます。

言葉尻を捉えているように思うかもしれませんが, これは大事なことです。科学を体系的に理解する時, 定義（約束）, 基本法則（理由なく認めざるを得ない自然現象のルール）, 定理（定義や基本法則から理論的に導かれるもの）を, はっきりと区別しなければなりません。その際, まず重要なのは, それが「成り立つ」ようなもの（だとしたら基本法則か定理）なのか, それとも「そう約束する」ようなものなのか（だとしたら定義）, です。

よくある質問 121　「$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ となる $\mathbf{p}$ を運動量という」と書いたら, またなんかダメ出しされたのですが。 ... これは全くダメとは言えないけれど, 稚拙な表現です。「となる」にあなたはどのような意味を込めましたか? 上の質問の「が成り立つ」という表現を, ちょっとぼやかしてそれっぽく言い換えただけではないでしょうか（笑）? そういうのは, 読み手に好意的な解釈を暗に要求している, ずるい解答です。

5.10　力が一定なら等加速度運動

これからしばらく, 具体的な運動について運動方程式を解いてみよう。なお, この章で出てくる問はすべて一直線上の運動なので, 力や位置や速度や加速度はスカラーと考えてよい（あえて 3 成分のベクトルとして考える必要はない）。次章以降ではベクトルとして考える必要が出てくる。

まず本節では, 力が時間と共に変わったりせず, 常に一定であるような状況で起きる運動を考えよう。その場合, 第二法則から, 加速度も一定であるということがわかる。そのような運動は, P.63 で学んだ「等加速度運動」になる。

その最も身近な例は, 重力に任せて落ちていく運動, すなわち自由落下である。

● 問 85　地表付近で重力だけを受けて上下運動をする, 質量 m の質点の運動を考える。重力加速度を g, 時刻を t とする。地表から鉛直上向きに x 軸をとる。時刻 t における質点の位置, 速度, 加速度を, それぞれ $x(t), v(t), a(t)$ とする。初期条件は

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0 \tag{5.50}$$

とする。空気抵抗は考えない。

(1) この質点に関する運動方程式は,

$$-mg = ma \tag{5.51}$$

となることを示せ。

(2) 式 (5.51) より, 鉛直方向の加速度は, $-g$ という一定値をとる。従って, この運動は, 等加速度運動である。次式を示せ:

$$v(t) = v_0 - gt \tag{5.52}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{g}{2}t^2 \tag{5.53}$$

ヒント: 式 (5.36), 式 (5.37)

(3) 特に, 初期位置 0, かつ初速度 0 の場合,

$$v(t) = -gt \tag{5.54}$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{5.55}$$

となることを示せ。

この結果は, 質点の質量 m に無関係であることに注意せよ。つまり, 重力による力を受けて行う運動は, 質点の質量には依存しない。

よくある質問 122　直感的には, 重い物の方が早く落ちる気がしますが... それは, 石のようなぎゅっと詰まった物体と, 綿菓子のようにふわっとした物体をイメージして, 後者はゆっくり落ちる気がするからであって, それは後者に空気抵抗が働いていることを忘れているからかもしれませんね。でも, 小石の質量が 10 g で, 綿菓子の質量が 11 g ならどうでしょう? 空気抵抗があれば, やはり綿菓子の方がゆっくり落ちそうじゃないですか? そっちのほうが重いのに!! だから, その直感は, 直感の中で既に矛盾しているのです。つまりそれは「直感」ではなく「ちゃんと考えていない」だけなのです。

よくある質問 123　重力の大きさは, 式 (2.1) で表されるの

で, 地球中心と質点との距離が小さいほど大きいはずです。ということは, 質点が落ちていくと, だんだん重力は強くなっていくはずです。なのに重力は一定, とみなしていいのですか? ... 良い質問です。だから, 問題の最初に「地表付近で」という但し書きがついているのです。「地表付近」の定義は微妙ですが, 例えば高い方は旅客機が飛ぶあたり（高度 10 km 程度）から, 低い方は最も深い海底のマリアナ海溝（深さ 10 km 程度）としましょう。地球半径を 6400 km としたとき, $r = 6410$ km のときと $r = 6390$ km でどのくらい式 (2.1) が違うか計算してご覧。違いは 0.6 %くらいしかありません。従って, 有効数字 2 桁程度の精度の議論なら, この範囲では「重力は高さによらず一定」とみなしても差し支えないのです。

● **問** 86　地表付近で, 初速度 0 で質点を投下し, 自由落下させる。空気抵抗は働かないとする。地面と質点の間には十分な空間があって, いま考える範囲では質点は地面には激突しないとする。

(1)　投下の 10 秒後には, 質点はどれだけの距離を落ち, どのくらいの速度になっているか?

(2)　投下後, 何秒たったら質点の速度は音速（1 気圧, 常温で約 340 m s^{-1}）を超えるか? そのとき, 質点は初期位置からどのくらいの距離を落下しているか?（実際はそうなる前に空気抵抗がだいぶ働くが）

(3)　高度 10 km を飛ぶ旅客機のエンジンが突然故障し, 旅客機が自由落下を始めた。地表に激突する前に, パイロットは機体を立てなおさねばならない。パイロットに与えられた時間的猶予はどのくらいか?

● **問** 87　野球投手がボールを真上に投げ上げる。鉛直上向きに x 軸をとり, ボールの初期位置を $x = 0$ とし, 初速度を $v_0 = 40\ \mathrm{m\ s^{-1}}$（約 140 km h^{-1} に相当）とする。ボールの運動を, 横軸 t, 縦軸 $x(t)$ のグラフに描け。ボールは最大でどのくらいの高さまで届くか? ヒント：$x_0 = 0$ m, $v_0 = 40\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ として, 式 (5.53) を考え, この $x(t)$ の最大値を求める。t に関する二次関数とみなして平方完成すればよい。

● **問** 88　地表近くで質量 $m = 1$ kg のボールを手放したら, (1) ボールにはどのくらいの大きさの加速度が働くか? (2) 地球にはどのくらいの大きさの加速度が働くか? なお, 地球の質量は $M = 6.0 \times 10^{24}$ kg とせよ。

次の問題は自由落下ではないが, 同様に等加速度運動である。

● **問** 89　カーリングというスポーツでは, 目標地点にうまく停止するように氷の上で石（ストーン）を滑らせる。いま, 君は氷の上で, 質量 m のストーンを初速度 v_0 で滑らせて手放そうとしている。ストーンを手放す位置を原点とし, ストーンの進行方向に x 軸をとる。時刻を t とし, ストーンを手放す時点を $t = 0$ とする。ストーンは質点とみなしてよい。

(1) ストーンと氷の間に働く動摩擦力の大きさを F_m とし, ストーンの位置 $x(t)$ に関する運動方程式を立てよ。

(2) その運動方程式を解いて, 関数 $x(t)$ を求め, グラフにかけ。動摩擦力は位置や速度によらず一定とする。注：速度が 0 になった時点でストーンは停止する。

(3) $v_0 = 1.5\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ のとき, ストーンは 20 m 進んで停止した。ストーンの質量は 20 kg であった。F_m の大きさを求めよ。

(4) このときの動摩擦係数の値を求めよ。

(5) 次に, ストーンを $x = 25$ m の位置で停止させたいと思う。そのためには v_0 をどのくらいにすればよいか?

(6) 同じ氷上で質量 30 kg のストーン（ただし 20 kg のストーンと同じ底面材質のもの）を同様に $x = 25$ m の位置で停止させるには, v_0 をどうすればよいか?

以上の例や問題は, 等加速度運動の公式, すなわち式 (5.37) を覚えておけば解ける。そして, 高校物理で出てくるのはせいぜいこの程度の話である。だから, 高校物理を学んだ人は, $F = ma$ よりも式 (5.37) の方をよく覚えていたりする。しかし, 世の中には, もっともっと複雑で多様な現象がある。それを次節で見てみよう。

5.11　等速度でも等加速度でもない直線運動

● **問** 90　質量 2.0 kg の質点があり, 時刻 0 では原点にあって速度 0 だとする。この質点に, 時刻に比例する力が x 軸の正方向にかかる。時刻 2.0 s のとき質点にかかる力は 6.0 N である。この質点の時刻 4.0 s での位置を求めよ。計算式には単位を埋め込むこと。ヒント: この問題では, 式 (5.37) は使えない。式 (5.37) が使えるのは加速度が変化しないときだけ。この問題では加速度は変化する。

● **問** 91　質量 m の物体（質点とみなす）が, 速度 v_0

で x 軸上を正の向きに等速度運動している。しかし突然, この物体にとりつけられたパラシュートが開き, 物体は空気から受ける力（空気抵抗）のために減速をはじめた。その力を $-\alpha v$ とする。α は適当な定数である。パラシュートが開いた位置を原点（$x=0$）とする。時刻を t とし, パラシュートが開いた時点を $t=0$ とする (図 5.1)。

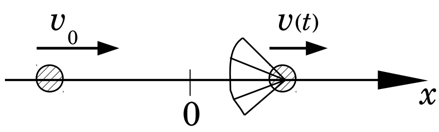

図 5.1　等速度運動している物体に突然空気抵抗がかかる。

(1)　$t<0$ では, 次式が成り立つことを示せ：

$$0 = m\frac{dv}{dt} \tag{5.56}$$

(2)　$0<t$ では, 次式が成り立つことを示せ：

$$-\alpha v = m\frac{dv}{dt} \tag{5.57}$$

(3)　上の式は, 関数 $v(t)$ に関する微分方程式だ。数学の教科書を参考にして, この微分方程式を解け。結果は次式のようになるはずである：

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \tag{5.58}$$

(4)　関数 $v(t)$ のグラフを描け。

このように, 空気や水などの流体[*5]の中で物体が速度に比例して受ける抵抗を<u>粘性抵抗</u>という。しかしながら, 物体が大きかったり速度が速いとき, 速さの 2 乗に比例する抵抗をより強く受ける。それを<u>慣性抵抗</u>という[*6]。

● **問** 92　粘性抵抗とは何か? 慣性抵抗とは何か?

● **問** 93　問 91 において, パラシュートによる空気抵抗が粘性抵抗でなく慣性抵抗ならどうなるだろう? いま, 空気抵抗が $-\beta v^2$ であるとする（β は適当な定数)。

(1)　パラシュートが開いてから物体が停止するまでの間, 次式が成り立つことを示せ：

$$-\beta v^2 = m\frac{dv}{dt} \tag{5.59}$$

(2)　上の微分方程式を変数分離すると, 次式のようになることを示せ：

$$\beta\, dt = -\frac{m dv}{v^2} \tag{5.60}$$

(3)　これを不定積分すると, 次式のようになることを示せ (C は積分定数)：

$$\beta\, t = \frac{m}{v} + C \tag{5.61}$$

(4)　以下の式が成り立つことを示せ。

$$C = -\frac{m}{v_0} \tag{5.62}$$

(5)　以下の式が成り立つことを示せ。

$$v(t) = \frac{m v_0}{v_0 \beta\, t + m} \tag{5.63}$$

(6)　関数 $v(t)$ のグラフを描け：

よくある質問 124　**問** 91 **で, なぜ最初は力** 0 **なのですか? 力がないと進まないのでは?**　... 物体は, **力がなくても動き続けるのです**。等速度運動をするのです。それが慣性の法則です。「力がないと物体は進まない」というのは間違いです。思い込みです。止まっている物体を動き出させるためには, 確かに最初に力をかけてやる必要がありますが, いったん動き出せば, 力をかけなくても物体は勝手に動き続けるのです。

よくある質問 125　**物体が力を受けなくても等速で動くのなら止まっている物体は力を受けて止まっているのですか?** ... いいえ。「止まっている」も「等速で動く」ことの一種で, 働く力は 0 です。

● **問** 94　雨粒の落下を考えよう。雨粒は重力を受けて加速しながら落下するが, 同時に空気抵抗も受けるので, 際限なく加速することはあり得ない。また, 雨粒が十分小さければ, 空気抵抗は粘性抵抗とみなすことができる。いま, 鉛直上向きに座標軸をとる。質量 m の雨粒が鉛直方向に直線的に落下するとし, 時刻 t における雨粒の落下速度を $v(t)$ とする。$v(0)=0$ とする。雨粒にかかる空気抵抗（粘性抵抗）を $-\alpha v$ とする（α は適当な正の定数)。注：落下は下向きだから v は負であり, 空気抵抗"$-\alpha v$"は v にマイナスがかかっているから正, つまり

[*5] 気体と液体をまとめて流体と呼ぶ。
[*6] このあたりの法則は, 流体力学という物理学で説明されるが, 流体力学のほとんどはニュートン力学を基本法則とする。

上向きである。

(1) 雨粒に関する運動方程式は以下のようになることを示せ：

$$-mg-\alpha v=m\frac{dv}{dt} \tag{5.64}$$

(2) これを変数分離すると次式になることを示せ：

$$\frac{dv}{g+\alpha v/m}=-dt \tag{5.65}$$

(3) これを両辺を積分すると次式になることを示せ（C は積分定数）：

$$\frac{m}{\alpha}\ln\left|v+\frac{gm}{\alpha}\right|=-t+C \tag{5.66}$$

(4) これを v について解き, 特に $v(0)=0$ に注意して, 次式を示せ：

$$v(t)=\frac{mg}{\alpha}\left\{\exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)-1\right\} \tag{5.67}$$

(5) $v(t)$ のグラフを描け。

(6) 時間が十分にたって速度が一定になったときの速度を<u>終端速度</u>という。この場合, 終端速度は

$$v=-\frac{mg}{\alpha} \tag{5.68}$$

となることを示せ。

雨が降る時, 雨粒は地表面に衝撃を与える。地表を植生が覆っていれば, 葉やリター（落ち葉等）で雨滴衝撃を吸収してくれるが, 地表に植生が無い場合は, 雨滴衝撃で土壌侵食を起こすことがある。これは農地や, 間伐が不十分なスギ・ヒノキ人工林などで問題になっている。

粘性抵抗を受ける落下の問題は, 微粒子（穀物の粉とか, 大気汚染源の粉塵など）の運動を議論する上で基礎的なものだ。また, 微粒子の大きさを計測する上でもこの理論がよく利用される。

5.12 運命は決まっているのか?（ラプラスの悪魔）

本章の最後に, ちょっと哲学っぽいことを考えよう。運動の三法則は, 物体の運動を正確に予測することができる, ということを世界に示した。それは, 未来を占うのにオカルト的な力が必要だと信じていた人に, ちょっとしたショックを与えただろう。そこで生まれたのが「ラプラスの悪魔」という概念である。

● **問** 95　「ラプラスの悪魔」とは何か? それは近代の宗教や思想にどのような影響を与えただろうか? それは物理学的にはどのように反駁（はんばく）されたか?

演習問題 6　質量 m の質点に, x 軸の正の方向に $F=Ae^{-kt}$ という力がかかっている。ここで, A, k は正の定数であり, t は時刻。質点の速度 v を t の関数として表せ。ただし初速度を 0 とする。

演習問題 7　2 つの質点 A, B が, 質量を持たないバネでつながれている。質点 A を水平方向にひっぱることで, これらを摩擦の無い水平直線上で, 加速度 0.50 m s^{-2} で等加速度運動をさせる。質点 A, B の質量はそれぞれ 2.0 kg と 3.0 kg とし, バネ定数は 4.5 N/m とする。バネの伸びを求めよ。ヒント: 2 つの質点のそれぞれについて運動方程式を立てる。

演習問題 8　ジャンボジェット機（ボーイング B747-400）が, 成田空港の, 幅 60 m の滑走路に, その中心線を目指ざして着陸しようとしている。あと 5 秒で車輪が滑走路につくというとき, 突然, 横から $v=10$ m/s の突風が吹いてきた。この飛行機は無事に滑走路内に着陸できるか? 根拠と共に示せ。ただし, 物体が風から受ける力 (慣性抵抗) の大きさ F は, $F=\rho v^2 SC_{\mathrm{D}}/2$ と表せることが知られている。ここで ρ は空気の密度であり, S は風の方向に投影した物体の面積である。C_{D} は「抗力係数」と呼ばれる無次元の数で, 物体の形状や風の性質に依存するが, おおよそ 0.5 から 2 程度の値である。また, ジャンボジェットの質量は乗客も含めて約 300 t, ジャンボジェットの胴体は全長 70 m, 直径 8 m 程度である。

演習問題 9　（慣性抵抗を受ける落下運動）君は高い崖の上からパラシュートで降下しようとしている（図 5.2）。君は重力を受けて加速しながら落下するが, 同時に空気抵抗も受けるので, 際限なく加速することはあり得ない。また, このような場合, 君が受ける空気抵抗は慣性抵抗とみなすことができる。いま, 鉛直上向きに座標軸をとる。質量 m の君が鉛直方向に直線的に落下するとし, 時刻 t における君の落下速度を $v(t)$ とする。君にかかる空気抵抗（慣性抵抗）を βv^2 とする（β は適当な正の定数）。注：落下は下向きだが, 空気抵抗は上向き, つまり空気抵抗の符号は正である。

(1) 君に関する運動方程式は以下のようになることを

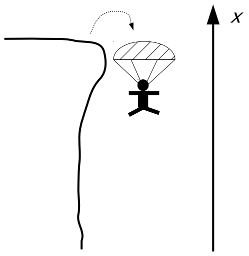

図 5.2　崖からパラシュートで降下する。詳しくは問 9 参照。

示せ：

$$-mg + \beta v^2 = m\frac{dv}{dt} \tag{5.69}$$

(2)　時間が十分にたつと, 空気抵抗と重力がつりあって, 速度は一定値になるはずだ。そのとき, 上の式で $dv/dt = 0$ となる。それを利用して, 終端速度の大きさ v_∞ は,

$$v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{\beta}} \tag{5.70}$$

となることを示せ。(ただし, もし向きまで考えるならばこの式にマイナスが付く。ここでは向きは考えず, 大きさだけを考えている。)

(3)　v_∞ を使うと, 上の方程式は次式のように書き換えることができることを示せ：

$$m\frac{dv}{dt} = \beta(v^2 - v_\infty^2) \tag{5.71}$$

(4)　これを変数分離して部分分数分解（数学リメディアル教材参照）すると, 次式になることを示せ：

$$\Big(\frac{1}{v - v_\infty} - \frac{1}{v + v_\infty}\Big)\frac{dv}{2v_\infty} = \frac{\beta}{m}dt \tag{5.72}$$

(5)　両辺積分すると次式になることを示せ（ここで C は積分定数）

$$\frac{1}{2v_\infty}\ln\Big|\frac{v - v_\infty}{v + v_\infty}\Big| = \frac{\beta}{m}t + C \tag{5.73}$$

(6)　初速度 $v(0)$ を 0 とすると, 次式のようになることを示し, $v(t)$ のグラフを描け。

$$v = -v_\infty \tanh\Big(v_\infty\frac{\beta}{m}t\Big) \tag{5.74}$$

ただし, $\tanh x$ は「双曲線関数」と呼ばれる関数の一種であり, その定義は,

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{5.75}$$

である。tanh を「ハイパボリック・タンジェント」と呼ぶ (「ライブ講義 大学生のための応用数学入門」参照)。

実験 2　空気抵抗を実感する簡単な実験をしてみよう。適当な本（A4 サイズで 200〜300 ページくらいがよい; 大事な本はやめておこう）を用意する。それを水平に持って, その上にティッシュペーパーを載せよう。そして手を話すと本は床に落ちるが, そのとき, ティッシュペーパーはどうなるだろうか? こんどは本無しで, ティッシュペーパーを落としてみよう。どうなるだろうか? この 2 つの実験の違いを説明せよ。

実験 3　体重計に乗って, 立ち姿勢からしゃがんだり, しゃがみ姿勢から立ち上がったりしてみよう。体重計の指す値が変わるだろう。どのようなタイミングどのように変わるだろうか? それを運動の法則で説明してみよう。ヒント: たったりしゃがんだりを, 重心の運動として考える。かかる力は「重力」と「体重計からの垂直抗力」である。

5.13　解答

答 78 式 (5.20) より,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(t)\,dt = \int_0^t v_0 \exp(kt)\,dt$$
$$= \frac{v_0}{k}\{\exp(kt) - 1\} \tag{5.76}$$

答 81 (1) A は C の十分条件。必要条件ではない。静止していれば合力はゼロだが, 合力がゼロであっても静止していない場合 (**0** 以外の速度での等速度運動) があり得る。(2) B は C の必要条件であり十分条件でもある (必要十分条件)。(3) B は A の必要条件。十分条件ではない。静止は等速度運動の一種（速度 **0** での等速度運動)。

答 83　(1) 間違い。「A は B から, 同じ**大きさで逆向きの**力を受ける」(2) 正しい。質点が等速度運動をしているとき, 加速度 $\mathbf{a}$ は **0** である。従って, 第二法則より, 物体にかかる合力 $\mathbf{F}$ は **0** である。(3) 直線方向の運動 (1 次元の運動) に限定すれば正しい。しかし一般には, 力も加速度もベクトルなので, F と a のかわりに $\mathbf{F}$ と $\mathbf{a}$ と書かねばならない。

答 85 (1) 式 (2.4) より, 質点には鉛直下向きに大きさ

mg の重力がかかる。座標系は鉛直上向きを正にとっているので, この重力 F は $F=-mg$ と書ける[*7]。重力以外の力は働いていない。従って運動方程式より, $-mg=ma$ となる。(2) 式 (5.36), 式 (5.37) で, a_x を $-g$, v_x を v とすれば, 与式を得る。(3) $x_0=0$, $v_0=0$ とすればよい。

答 86 初期位置を原点とし, 鉛直上向きに x 軸をとる。時刻 t における位置と速度をそれぞれ $x(t)$, $v(t)$ とする。(1) 式 (5.54), 式 (5.55) で $t=10$ s とすれば, $v=-98\ \mathrm{m\ s^{-1}}$, $x=-490$ m。従って落下距離は 490 m。(2) 加速度が $-g$ の等加速度運動なので $v(t)=-gt$。従って $t=-v(t)/g$。いま, $v(t)=-340\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ なので, $t=340\ \mathrm{m\ s^{-1}}/(9.8\ \mathrm{m\ s^{-2}})$ =35 s。従って約 35 秒後。式 (5.55) で $t=35$ s とすれば, $x=-6000$ m。従って, 約 6000 m 落下する。

答 87　式 (5.53) で, $x_0=0$ とすれば,

$$x(t)=v_0t-\frac{1}{2}gt^2=-\frac{1}{2}g\Big(t^2-\frac{2v_0}{g}t\Big) \tag{5.77}$$

$$=-\frac{1}{2}g\Big(t-\frac{v_0}{g}\Big)^2+\frac{v_0^2}{2g} \tag{5.78}$$

従って, $t=v_0/g$ のとき, 最高高度 $v_0^2/(2g)$ に到達する。ここで $v_0=40\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ とすると, 最高高度は,

$$\frac{(40\ \mathrm{m\ s^{-1}})^2}{2\times 9.8\ \mathrm{m\ s^{-2}}}=82\ \mathrm{m} \tag{5.79}$$

すなわち, 約 80 m の高さまで届く。(グラフは省略。)

答 89　(1) 手放された後のストーンに働く力は, 重力と氷面からうける動摩擦力 F_m, そして氷面から受ける垂直抗力である。重力は垂直抗力と打ち消し合う。また, 摩擦力 F_m は x 軸の逆方向に働く。従って, ストーンに働く力の総和 F は, $F=-F_\mathrm{m}$ となる。加速度を a とすると, 運動方程式は, $-F_\mathrm{m}=ma$

(2) 前小問より, $a=-F_\mathrm{m}/m$ となるが, これは時刻によらない一定値。すなわちこれは等加速度運動である。式 (5.36), 式 (5.37) で, a_x を $-F_\mathrm{m}/m$, 速度 v_x を v とすれば,

$$v=v_0-\frac{F_\mathrm{m}}{m}t, \qquad x=v_0t-\frac{F_\mathrm{m}}{2m}t^2 \tag{5.80}$$

となる。ここで $x(0)=0$, $v(0)=v_0$ を用いた。グラフは図 5.3 のようになる。

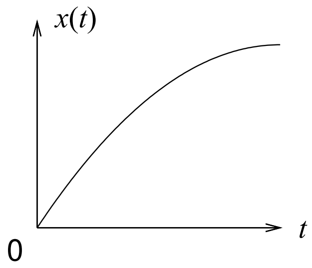

図 5.3　カーリングのストーンの運動。

(3) ストーンが停止した時刻を t, そのときの位置を x とすると, そのとき速度 dx/dt は 0 になるから, 式 (5.80) の第 2 式より,

$$0=-\frac{F_\mathrm{m}}{m}t+v_0 \tag{5.81}$$

従って, $t=mv_0/F_\mathrm{m}$。これを式 (5.80) の第 1 式に代入すると,

$$x=\frac{mv_0^2}{2F_\mathrm{m}} \tag{5.82}$$

従って,

$$F_\mathrm{m}=\frac{mv_0^2}{2x} \tag{5.83}$$

ここで, $x=20$ m, $m=20$ kg, $v_0=1.5\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ とすれば, $F_\mathrm{m}=1.1$ N。

(4) クーロンの摩擦法則 (式 (3.13)) より, 動摩擦係数 μ' について,

$$F_\mathrm{m}=\mu' N \tag{5.84}$$

が成り立つ。ここで N は垂直抗力(ストーンが氷の接触面から垂直上向きに受ける力)であり, 今の場合は $N=mg$ である。従って, $F_\mathrm{m}=\mu' mg$ である。従って, 上の結果から, $\mu'=F_\mathrm{m}/(mg)=5.7\times10^{-3}$。(無次元なので単位は不要)

(5) 式 (5.82) より, 停止するまでの距離 x は, 初速度 v_0 の 2 乗に比例する。x を 20 m から 25 m にするとき, x は 1.25 倍になるが, そのためには v_0 が $\sqrt{1.25}=1.12$ 倍になればよい。従って, v_0 は $\sqrt{1.25}\times1.5\ \mathrm{m\ s^{-1}}$=1.68 $\mathrm{m\ s^{-1}}$。つまり, 約 1.7 $\mathrm{m\ s^{-1}}$ にすればよい。

(6) 式 (5.82) と式 (5.84) で F_m を消去し, $F_\mathrm{m}=\mu' mg$ を使えば,

$$x=\frac{v_0^2}{2\mu' g} \tag{5.85}$$

となる。従って x は質量に依存しない。従って, 30 kg だろうが何 kg だろうが, 摩擦の条件 (氷の表面状態とス

[*7] 式 (2.4) は力の向きは考えず力の大きさだけを考えていたことに注意せよ。

トーンの底面材質) が同じなら, 前小問で求めた初速度 (約 1.7 m s^{-1}) でよい。

よくある質問 126　**問** 89(6) **に驚きました。重い物体が, 軽い物体と同じ初速度で同じ距離で止まるのですか**? ... そうです。不思議ですね。これは, 力が摩擦力だからです。この場合の摩擦力は, 重力に比例します。重い物体にはそのぶん, 垂直効力が大きくなるため, 大きな摩擦力がかかるのです。つまり $F = ma$ の左辺の F が m に比例するため, 右辺の ma の m と打ち消し合って, 結果的に質量の影響は無くなるのです。

答 90 質量を m, 時刻を t, 力を $F(t)$ とする。力は時刻に比例するので,

$$F(t) = bt \tag{5.86}$$

と書ける（b は適当な定数)。運動方向に x 軸をとり, 位置を $x(t)$, 速度を $v(t)$, 加速度を $a(t)$ とする。運動方程式より, $F(t) = ma(t)$。これに式 (5.86) を代入して変形すると,

$$a(t) = \frac{bt}{m} \tag{5.87}$$

となる。式 (5.21) のように考えて (a_x, v_x はここでは a, v),

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t)\,dt \tag{5.88}$$

である。ここで $v(0) = 0$ と, 式 (5.87) を代入して,

$$v(t) = \int_0^t \frac{bt}{m}\,dt = \frac{bt^2}{2m} \tag{5.89}$$

また, 式 (5.20) のように考えて,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)\,dt \tag{5.90}$$

である。ここで $x(0) = 0$ と, 式 (5.89) を代入して,

$$x(t) = \int_0^t \frac{bt^2}{2m}\,dt = \frac{bt^3}{6m} \tag{5.91}$$

さて, 式 (5.86) で t =2.0 s のときを考えると, 6.0 N= b×2.0 s だから, b = 3.0 N/s。これと, m=2.0 kg, t =4.0 s を式 (5.91) に代入すると,

$$x(4.0\ \mathrm{s}) = \frac{(3.0\ \mathrm{N/s})(4.0\ \mathrm{s})^3}{6 \times 2.0\ \mathrm{kg}} = 16\ \mathrm{m} \tag{5.92}$$

答 91

(1) $t < 0$ では等速度運動をしているから, 慣性の法則より, 働く力（の総和）は 0 である。従って, 運動方程式より, 式 (5.56) が成り立つ。
(2) $0 < t$ ではパラシュートによる空気抵抗力 $F = -\alpha v$ がかかる。従って, 運動方程式より, 式 (5.57) が成り立つ。
(3) 式 (5.57) を変数分離すると以下のようになる:

$$-\alpha\,dt = m\frac{dv}{v} \tag{5.93}$$

この式を両辺, 積分すると（C は積分定数）,

$$\int -\alpha\,dt = \int m\frac{dv}{v} \tag{5.94}$$

$$-\alpha t = m \ln |v| + C \tag{5.95}$$

従って次式のようになる:

$$\begin{aligned} v &= \pm \exp\Big(-\frac{\alpha}{m}t - C\Big) \\ &= \pm \exp(-C)\,\exp\Big(-\frac{\alpha}{m}t\Big) \end{aligned} \tag{5.96}$$

ここで $t = 0$ のとき $v = v_0$ だから,

$$\pm \exp(-C) = v_0 \tag{5.97}$$

従って,

$$v = v_0 \exp\Big(-\frac{\alpha}{m}t\Big) \tag{5.98}$$

(4) 図 5.4 のようになる。

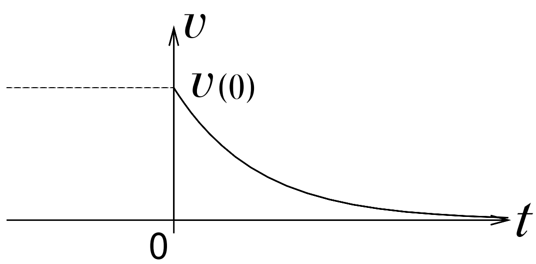

図 5.4　粘性抵抗を受けて減速する物体の運動。

答 93 (1) $0 < t$ ではパラシュートによる空気抵抗力 $F = -\beta v^2$ がかかる。従って, 運動方程式より, 式 (5.59) が成り立つ。(2), (3) 略。(4) 式 (5.61) で, $t = 0$ とすれば, $0 = m/v(0) + C$。従って $C = -m/v(0)$。(5) 式 (5.62) を式 (5.61) に入れて v についてとけば, 式 (5.63) が成り立つ。（各自, 計算してみよ）(6) 図 5.5 のようになる。

答 94

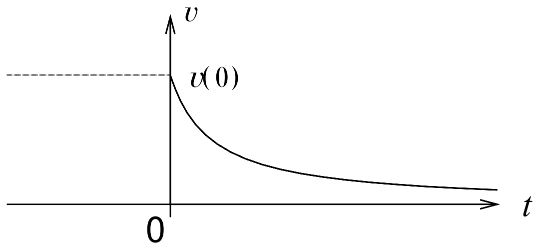

図 5.5　慣性抵抗を受けて減速する物体の運動。

(1) 雨粒にかかる力は, 重力 ($-mg$) と粘性抵抗 ($-\alpha v$) の和。従って, 運動方程式より, 式 (5.64) が成り立つ。

(2) 式 (5.64) の両辺を m で割ると,

$$-g - \frac{\alpha v}{m} = \frac{dv}{dt} \tag{5.99}$$

両辺に dt をかけ, さらに両辺を $g+\alpha v/m$ で割ると,

$$-dt = \frac{dv}{g + \alpha v/m} \tag{5.100}$$

この左辺と右辺を入れ替えると, 式 (5.65) を得る。

(3) 式 (5.65) の両辺に積分記号 $\int$ をつける:

$$\int \frac{dv}{g + \alpha v/m} = -\int dt \tag{5.101}$$

この左辺の不定積分は,

$$\int \frac{dv}{(\alpha/m)(v + gm/\alpha)} = \frac{m}{\alpha}\int \frac{dv}{v + gm/\alpha} = \frac{m}{\alpha}\ln\left|v + \frac{gm}{\alpha}\right| + C_1$$

となる (C_1 は積分定数)。右辺の不定積分は, $-t + C_2$ となる (C_2 は積分定数)。これらをまとめて,

$$\frac{m}{\alpha}\ln\left|v + \frac{gm}{\alpha}\right| + C_1 = -t + C_2 \tag{5.102}$$

となる。C_1 を右辺に移項し, $C_2 - C_1 = C$ とおけば, 式 (5.66) を得る。

(4) 式 (5.66) より,

$$\ln\left|v + \frac{gm}{\alpha}\right| = -\frac{\alpha}{m}(t - C) \tag{5.103}$$

従って,

$$v + \frac{gm}{\alpha} = \pm\exp\left[-\frac{\alpha}{m}(t - C)\right] \tag{5.104}$$

従って,

$$v = \pm\exp\left[-\frac{\alpha}{m}(t - C)\right] - \frac{gm}{\alpha} \tag{5.105}$$

ここで $t = 0$, $v = 0$ とおけば,

$$0 = \pm\exp\left[\frac{\alpha}{m}C\right] - \frac{gm}{\alpha} \tag{5.106}$$

従って,

$$\pm\exp\left[\frac{\alpha}{m}C\right] = \frac{gm}{\alpha} \tag{5.107}$$

となる (左辺の $\pm$ も含めて右辺のように決まる)。これを式 (5.105) に代入して,

$$v = \frac{gm}{\alpha}\exp\left[-\frac{\alpha}{m}t\right] - \frac{gm}{\alpha} \tag{5.108}$$

これを整理すると式 (5.67) を得る。

(5) 図 5.6 のようになる。

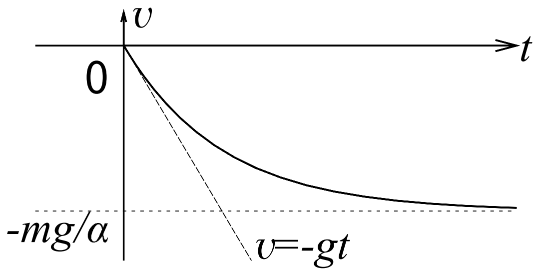

図 5.6　粘性抵抗を受ける落下 (実線の曲線)。$v = -gt$ は粘性が無い場合 (自由落下)。

(6) 式 (5.67) において t の ∞ への極限で, v は $-mg/\alpha$ に近づく。あるいは, 終端速度では速度は時間とともに変わらないから, 式 (5.64) の右辺を 0 とおけば, 同じく $v = -mg/\alpha$ を得る。

答 95
略 (各自, 調べよ)。

よくある質問 127　摩擦のない面に 10 t くらいの物体がのって静止しているとします。摩擦がなければ, この物体を面と平行な方向に動かし始めるには, ほんの少し力をかけてやるだけで良いのでしょうか。イメージできない。 ... はいそうです。実際, 小惑星探査機「はやぶさ」は 500 kg ほどですが, それを動かすイオンエンジンは 1 円玉を持ち上げるくらいの力しかなかったらしいですよ。

よくある質問 128　解答をみるとわかるんですけど, 一から自分で解答を作り出せません。 ... 基本から丁寧に理解することが重要で, 必ずしも「一から作り出す」ことにはこだわらなくていいです。受験勉強じゃないんだし, 新しいことを学んでいるのだから。

第6章

さまざまな運動

注: この章を理解するには, 三角関数を理解していることが必要である。

6.1　単振動

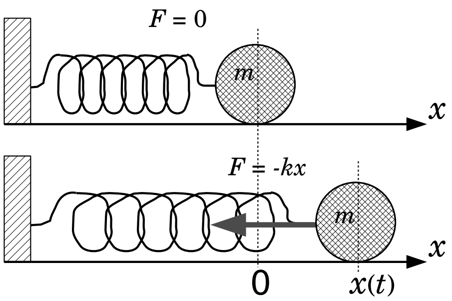

図 6.1　バネにつけられて振動する物体

図 6.1（上）のように, 壁に一端が固定されたバネがあり, もう一端に質量 m の物体（質点）がとりつけられて床に静止している系を考えよう。バネ定数を k とし, バネ自体の質量は無視する。

この物体を, 図 6.1（下）のように少し動かしてから離したり, 右か左から指で弾いたりすると, 物体は左右に振動しはじめるだろう。日常経験で考えると, この振動運動は次第にゆっくりになり, いつかは止まってしまうように思われる。ところがそれは, 「物体と床面の間の摩擦」や「空気抵抗」のせいである。今, 床は十分につるつるしているので「物体と床面の間の摩擦」は無視できるとし, かつ, この実験を空気の薄い高地や真空実験室で行うことを想定して, 空気抵抗も無視する。すると, この振動運動は永遠に続くだろう。この運動を物理的に考えよう。

バネが自然長にあるときの物体の位置を原点とし, 左右方向に沿って x 軸をとる。バネの伸びる方向を x 軸の正の方向とする。バネはこの図の左右方向にのみ伸び縮みし, 物体もこの図の左右方向にしか動かないとする。時刻 t での物体の位置を $x(t)$ とする。

物体の運動を考えるときは, いつでも運動方程式 (5.40) から出発する。運動方程式は, 質量 m が一定であれば, 力のベクトルと加速度のベクトルの関係式だ。従って, 運動方程式を考えるということは, x 方向, y 方向, z 方向の各方向について, 力と加速度の関係を考えるということだ。

ところが, いま考えている物体は左右方向しか動かないので, 上下方向や奥行き方向について運動方程式を考える必要はない[*1]。そこで, 左右方向の運動方程式だけを考える: いま, バネが自然長にある状態 (伸びも縮みもない状態）では, バネが物体に及ぼす力は 0 だ（図 6.1 の上図)。このときの物体は原点にある。物体が座標 x にあるとき, バネの伸びも x なので, フックの法則により, 物体にはバネから $-kx$ の力がかかる（図 6.1 の下図。k はバネ定数)。従って, x 方向の運動方程式は以下のようになる：

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{6.1}$$

ただし t は時刻である。式 (6.1) を変形すれば,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\,x \tag{6.2}$$

となる。

この微分方程式 (6.2) を数学的に解けば, 関数 $x(t)$, すなわち「時刻 t における物体の位置」が得られる。つまり物体の運動が決まるわけだ。ただし, それには大学レベルの数学力[*2]が必要だ。残念ながら, 我々の数学の勉

[*1] とは言うものの, 念のため, 上下方向の運動も考えておこう: 物体に上下方向（鉛直方向）に働く力は, 重力（下向き）と, 床からの垂直抗力（上向き）だ。これらは同じ大きさで逆向きだから互いに打ち消しあう。従って, 物体に働く上下方向の力（合力）は 0 だ。従って, 最初, 物体が上下方向に動いていなければ, 慣性の法則に従って, 物体は床（高さ 0）にあり続ける。従って上下方向の加速度は 0 だ。従って, 上下方向の運動方程式は, $0 = 0$ となるにすぎない。

[*2] 「二階の線型常微分方程式」の理論。複素関数, 行列, テーラー展開などの数学が必要。「ライブ講義 大学生のための応用数学

強は, まだそこまで進んでいない。

しかし我々は, この物体が振動運動するということを体験的に知っている。そこで, この物体の運動が, 次式のように書けると仮定しよう：

$$x(t) = A\cos\omega t \tag{6.3}$$

ここで A と ω は適当な（未知の）正の定数である。ω はギリシア文字の「オメガ」の小文字であり, ダブリュー w ではないことに要注意。この式 (6.3) のグラフは, 図 6.2 のようになる。いかにも振動してそうなグラフではないか! このグラフを見ると, A は振動の幅（振幅）を表している。また, 振動は, 時間が $2\pi/\omega$ だけ経過するごとに同じパターンで繰り返す。この ω を角速度とか角振動数と呼ぶ[*3]。また, 繰り返しの時間間隔を周期と呼んで T と表すことが多い。両者の関係はよく出てくるので, 覚えておこう:

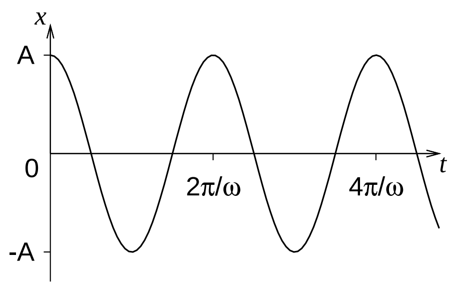

図 6.2 式 (6.3) のグラフ。

角速度 ω と周期 T の関係

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{6.4}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{6.5}$$

角速度は時間の逆数の次元を持ち, 通常, s^{-1}, つまり「毎秒」という単位であらわされる。「毎秒」のことを「ヘルツ」とよび, Hz と書くこともある（記憶せよ)。

さて, 式 (6.3) が式 (6.2) を満たすのではないかという希望を持って, 式 (6.3) を式 (6.2) に代入してみよう。すると, 式 (6.2) の左辺は

$$-A\omega^2\cos\omega t \tag{6.6}$$

となり, 右辺は

$$-A\frac{k}{m}\cos\omega t \tag{6.7}$$

となる。これらが任意の時刻について一致する（つまり式 (6.2) が恒等的に成り立つ）には, $A = 0$ か, $\omega^2 = k/m$ であればよい[*4]。

$A = 0$ のときは, 式 (6.3) が恒等的に 0 となる, つまり物体は原点でじっと静止したままだ。今は振動運動を考えているのでこれは除外しよう。

$\omega^2 = k/m$ のときは,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6.8}$$

となる（A の値はなんでも構わない)。式 (6.8) が成り立てば, 式 (6.3) は運動方程式 (6.2) の解になる, つまり「運動の法則」を満たすのだ。従って, 式 (6.3) はこの系で実現可能な運動（のひとつ）である。

式 (6.8) が成り立つならば, 式 (6.3) 以外にも, 以下のような関数もそれぞれ式 (6.2) の解であることは, 代入してみれば簡単にわかるだろう:

$$x(t) = A\sin\omega t \tag{6.9}$$
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{6.10}$$
$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \tag{6.11}$$
$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{6.12}$$

(A, B, ϕ は任意の定数で, 各々の式で違ってかまわない。)

式 (6.2) の解として, こんなにたくさんの関数があることはわかったが, よく考えると, 現実の運動は単純な振動運動のはずだから, 解としてそんなに多くの可能性は無いはずだ。実は, これらの関数は互いに完全に別物というわけではなく, 「重複」があるのだ。

実際, 例えば, 式 (6.12) で $B = 0$ とおけば式 (6.3) になるし, 式 (6.12) で $A = 0$ とおいて改めて B を A と置き変えれば式 (6.9) になる。つまり, 式 (6.3) や式 (6.9) は, 式 (6.12) の特殊なケースに過ぎない。

また, 式 (6.10) において, $\phi = \phi' - \pi/2$ とおけば, cos の性質[*5] から,

$$x(t) = A\cos\Big(\omega t + \phi' - \frac{\pi}{2}\Big) = A\sin(\omega t + \phi')$$

入門」参照。

[*3] 角速度の正確な定義は, 「単位時間あたりに進む位相」である。

[*4] ほかにも, $\cos\omega t = 0$ となるときにも式 (6.2) は成り立つが, それは t が特定の値, 例えば $t = \pi/(2\omega)$ や $t = 3\pi/(2\omega)$ などをとるときに限られるので, 式 (6.2) が**恒等的に**成り立つとは言えない。

[*5] 任意の角 θ について, $\cos(\theta - \pi/2) = \sin\theta$

となって, ϕ' を改めて ϕ と置けば式 (6.11) の形になるし, 式 (6.11) において, $\phi = \phi' + \pi/2$ とおけば, sin の性質[*6] から,

$$x(t) = A\sin\Big(\omega t + \phi' + \frac{\pi}{2}\Big) = A\cos(\omega t + \phi')$$

となって, ϕ' を改めて ϕ と置けば式 (6.10) の形になる。つまり, 式 (6.10) と式 (6.11) は, 同じ関数を違った形で表現しているに過ぎない。

また, 式 (6.12) に「三角関数の合成」(数学の教科書を参照せよ) を適用すれば, 式 (6.11) の形に式変形できるし, 逆に式 (6.11) や式 (6.10) に三角関数の加法定理を適用すれば式 (6.12) のように式変形できる。つまり, 式 (6.10), 式 (6.11), 式 (6.12) の 3 つは, 数学的には互いに等価である (もちろん, 各々で A や ϕ の値は違う)。

式 (6.9) から式 (6.12) のいずれかのように表現できる現象のことを, 単振動とか調和振動という。

ここで, 代表的に, 式 (6.12) に着目し, これで単振動を統一的に表現することを試みよう。まず, 時刻 $t = 0$ での位置は $x(0)$ なので, 式 (6.12) より,

$$x(0) = A \tag{6.13}$$

である。また, 式 (6.12) を微分すると,

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t \tag{6.14}$$

である。時刻 $t = 0$ での速度は $x'(0)$ なので,

$$x'(0) = B\omega \tag{6.15}$$

である。従って, 式 (6.12) は,

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{x'(0)}{\omega}\,\sin\omega t \tag{6.16}$$

となる。この式は, 図 6.1 のような系で起きる, あらゆる振動運動を, 初期条件 (つまり $x(0)$ と $x'(0)$ の値) だけで統一的に表現する (ただし ω は式 (6.8) を満たさねばならない)。

さて, 式 (6.2) は, 式 (6.8) を使うと, 次式のようになる:

単振動の微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{6.17}$$

このような方程式で表される現象は, どんなものであっても, 単振動である。その例は,「バネについた物体」以外にも, 以下のように様々である:

- 振り子 (振幅が十分に小さいとき)
- コイルとコンデンサーからなる電気回路 (電波を受けるアンテナ)
- 安定した大気の中で発生する, ブラント・バイサラ振動
- 大気よりも遥か上空の電離層で起きるプラズマ振動

今のところ君はこれらの中身を詳しく知る必要は無い。単振動という現象は, いろんなところにある, という実感を持ってくれたら, とりあえずそれで十分だ。

● **問 96** 図 6.1 のような系で, 物体の質量を 2 倍にすると, 角速度は何倍になるか? 振動の周期は何倍になるか?

● **問 97** 図 6.1 のような系で, $t = 0$ で物体を $x = X_0$ の位置に持ってきて, 静かに (初速度 0 で) 離すと, どのような運動になるか? その解を書き, そのグラフを描け。ヒント: 式 (6.16)。

● **問 98** 図 6.1 のような系で, $t = 0$ で物体を $x = 0$ の位置のままで, 指でピンと弾いて初速度 V_0 を与えたら, どのような運動になるか? その解を書き, そのグラフを描け。

ここで, 微分方程式 (6.17) について, もうすこし考えてみよう。これは, t に関する二階微分を含む方程式 (二階微分方程式) だから, それを解く, つまり微分を含まない形の関数 (方程式) を得るには, 微分の逆操作である, 不定積分に相当することを 2 回やらねばならない。普通, 不定積分を 1 回やると, 積分定数と呼ばれる「任意の定数」が 1 つ現れる。従って, 不定積分を 2 回やると, 積分定数に相当する「任意の定数」が 2 つ現れるはずだ。従って, 二階微分方程式を解くと, その一般解 (どんな解もその形式で表されるような解) は, 任意の定数を 2 つ含む。微分方程式 (6.17) の場合は, それが式 (6.12) における A, B である。で, それは (6.16) でわかったように, 初期条件, つまりある時刻における位置と速度を与えることで, 具体的に決まる。

もっと一般的に言うと, 運動方程式 $F = ma$ は, 位置 x に関する二階微分方程式なので, その一般解は 2 つの任意定数を含む。任意定数の値は, 位置と速度に関する

[*6] 任意の角 θ について, $\sin(\theta + \pi/2) = \cos\theta$

初期条件によって定まる[*7]。

6.2　斜め投げ上げ

これまでは, ほとんど直線上に限って運動を考えてきた。しかし, 運動の法則は平面的な運動や空間的な運動にも成り立つ。といっても難しいことは何もない。座標系を適切に設定して, x, y, z の各方向について運動方程式を考えるだけだ。

次のような状況を考えよう： 君は地表のある点から空にむかって, 斜め方向に質量 m のボールを投げ上げる (図 6.3)。空気抵抗は無視する。

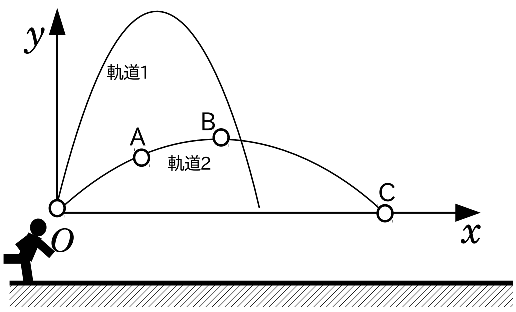

図 6.3　ボールの斜め投げ上げ

軌道 1 のようにかなり上向きに投げ上げたら, 高くは上がるものの, 遠くには飛ばない。軌道 2 のように, 若干水平ぎみに投げ上げたら, 高くは上がらないが, そこそこ遠くに飛ぶ。

● **問** 99　軌道 2 で, A, B, C のそれぞれの位置にボールが来た時を考える。

(1)　速さが最も大きいのは, A, B, C のうちどの位置のときか?

(2)　A, B, C の各位置で, ボールにかかる合力を, 矢印で図に描き込め。矢印の長さは適当でよいが, 複数の矢印どうしで長さはつじつまがあっていなければならない（大きい力は長く, 小さい力は短く）。

(3)　A, B, C の各位置で, ボールの加速度を, 点線矢印で図に描き込め。矢印の長さは適当でよいが, 複数の矢印どうしで長さはつじつまがあっていなければならない（大きい加速度は長く, 小さい加速度は短く）。

(4)　加速度の大きさが最も大きいのは, A, B, C のうちどの位置のときか?

[*7] このように, 初期条件を適切に与えることで, 微分方程式の解を一意的に定めることを, 「微分方程式の初期値問題」という。

● **問** 100　どのような角度で投げ上げたら, 最も遠くまでボールを飛ばせるか, 考えよう。君の位置を原点 O とし, 水平方向に x 軸, 鉛直方向に y 軸をとる。 時刻を t とし, 君がボールを手放した瞬間を $t=0$ とする。$t=0$ のときにボールの速度は x 軸から角 θ の方向で, その大きさは v_0 であったとする。

時刻 t におけるボールの位置と速度をそれぞれ $\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)$ とする。重力加速度を g とする。

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

とする。

(1)　$\mathbf{r}(0) = (0, 0)$, $\mathbf{v}(0) = (v_0 \cos\theta, v_0 \sin\theta)$ であることを示せ。

(2)　ボールが手を離れてから地上に落ちるまでのボールの運動方程式は, 次式のようになることを示せ：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \tag{6.18}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \tag{6.19}$$

(3)　上の微分方程式 (6.18), (6.19) を解くと, 解はそれぞれ次式のようになることを示せ：

$$x = (v_0 \cos\theta)t \tag{6.20}$$

$$y = (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{6.21}$$

(4)　前問の結果から t を消去して次式を示せ：

$$y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 \tag{6.22}$$

(5)　前問の結果を, 横軸 x, 縦軸 y のグラフに描け。これがボールの軌跡だ。

(6)　投げ上げたボールが着地する場所の x 座標を X とすると, 次式を示せ：

$$X = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \tag{6.23}$$

(7)　v_0 が一定の時, 投げ上げの角 θ がどのくらいのとき, X は最大になるか?

● **問** 101　ハンマー投は, ハンマー（ワイヤーの先に質量 7.26 kg の金属球がついたもの）を振り回して投げ上げ, 飛ばした距離を競うスポーツである。世界記録は 86.7 m である。投げ上げの角度が, 前問で求めた角に一致していたと仮定して, 世界記録樹立時の, ハンマーが空中に放たれた瞬間の速さを推定せよ。

よくある質問 129　ボールを真上に投げ上げると, いずれ最高到達点に到達して, その後, 落ちてきますよね。最高到達点ではボールの速度はどうなっているのですか? ...　速度 0 です。

よくある質問 130　速度 0 ということは止まっているのですか? 静止状態にある物体に働く合力は 0 だって言ってましたよね。でも, ボールには下向きの重力がかかっているじゃないですか。矛盾していませんか? ...　「速度 0」は静止とは限りません。「速度 0」が続く状態が静止です。今, 論じている運動は, 一瞬だけ速度 0 になりますが, そのすぐ前後は 0 でない速度を持ちますから静止ではありません。

6.3　円運動

一定の速さで円周上を一方向に動く運動のことを, 等速円運動という。世の中には等速円運動はたくさんある。一定の速さで走る自転車の車輪は等速円運動している。太陽のまわりを地球がまわるのは等速円運動である (厳密にはちょっと違うが)。

どのようなときに等速円運動は実現するのか, 調べてみよう。とりあえず平面内の等速円運動を考える。xy 座標系ので質量 m の質点が, 原点を中心とする半径 r の円周上を等速円運動しているとする (図 6.4)。

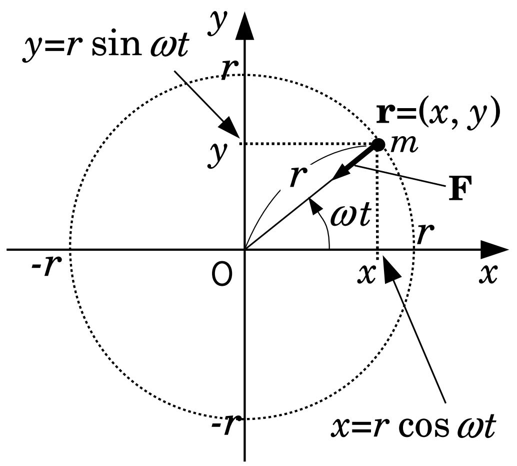

図 6.4　等速円運動

時刻 t における質点の位置, 速度, 加速度をそれぞれ

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \tag{6.24}$$
$$\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t)) \tag{6.25}$$
$$\mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t)) \tag{6.26}$$

とし[*8], $t=0$ で質点は x 軸上の点 $(r, 0)$ にあるとする。すなわち,

$$\mathbf{r}(0) = (x(0), y(0)) = (r, 0) \tag{6.27}$$

である。

● **問** 102 (1)　質点が実際にこの円周上を一定の角速度 ω で回転するならば次式が成り立つことを示せ (ヒント: 極座標) :

$$\mathbf{r}(t) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t) \tag{6.28}$$
$$\mathbf{v}(t) = (-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t) \tag{6.29}$$
$$\mathbf{a}(t) = (-r\omega^2\cos\omega t, -r\omega^2\sin\omega t) \tag{6.30}$$
$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2\mathbf{r}(t) \tag{6.31}$$

(2)　時刻 t のとき質点に働く力を $\mathbf{F}(t) = (F_x(t), F_y(t))$ とすると, 次式が成り立つことを示せ :

$$\mathbf{F}(t) = -m\omega^2\mathbf{r}(t) \tag{6.32}$$
$$F_x(t) = -mr\omega^2\cos\omega t \tag{6.33}$$
$$F_y(t) = -mr\omega^2\sin\omega t \tag{6.34}$$

(3)　$F = |\mathbf{F}|$, $v = |\mathbf{v}|$ とする。次式を示せ。

$$F = mr\omega^2 \tag{6.35}$$
$$v = r\omega \tag{6.36}$$

(4)　式 (6.35) は, 次式のようにもできることを示せ :

$$F = \frac{mv^2}{r} \tag{6.37}$$

(5)　質量と半径はそのままで, 速度の大きさ v が 2 倍になると, 力は何倍になるか?

(6)　質量と速度はそのままで, 半径 r が 1/2 倍になると, 力は何倍になるか?

等速円運動している物体には, 式 (6.32) を満たすような**何らかの力**が働いている必要がある。このように等速円運動を実現する式 (6.32) のような力を<u>向心力</u>という。なぜ「向心」というかといえば, この $\mathbf{F}$ は円運動の中心から質点へのベクトル $\mathbf{r}$ とは真逆の向き, つまり質点から「中心への向き」だからである。

向心力は, これまで出てきた「重力」「電磁気力」「弾性力」「摩擦力」などの, 何か特定の力を意味する言葉ではない。向心力は, 等速円運動を実現するために必要な力という, むしろ「役割」を意味する言葉である。その

[*8] 前章でも述べたが, 位置ベクトルは, $\mathbf{r}$ と書くことが多い。

役割を務めるのは, 時によって重力だったり, 時によって電磁気力だったりする。

● **問** 103　以下の等速円運動（厳密にはそうとは言えないものもあるが, それも近似的に等速円運動とみなす）において, 向心力となっている力は何か?

(1)　太陽の周りを地球がまわること。
(2)　君が糸の先におもりをつけて, それをひゅんひゅんと回すこと。
(3)　水平の広場で君が自転車を円形に走らせること。

● **問** 104　車を運転する時に, なぜカーブの手前で減速せねばならないか, 述べよ。

「向心力」に似た言葉に「遠心力」がある（多くの人は, 向心力より遠心力の方が馴染み深いだろう）。両者は明確に別々の概念である。「遠心力」は P.86 で学ぶまで不用意に使わないようにしよう。

さて, 実は, 単振動と円運動は, 密接な関係がある。等速円運動の方程式のひとつである式 (6.31) を考えよう:

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t)$$

この左辺は $d^2\mathbf{r}/dt^2$ であり, さらに, $\mathbf{r} = (x, y)$ とおけば, 上の式は,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{6.38}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y \tag{6.39}$$

となる。これらは, 式 (6.17) と同じ形, すなわち単振動の微分方程式だ。従って, 等速円運動は, 2 つの単振動（x 軸方向と y 軸方向）の組み合わせと考えることができる。実際, 等速円運動

$$\big(x(t), y(t)\big) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t) \tag{6.40}$$

について, その x 座標だけを取り出した関数

$$x(t) = r\cos\omega t \tag{6.41}$$

は, 式 (6.3) にそっくりだし, y 座標だけを取り出した関数

$$y(t) = r\sin\omega t \tag{6.42}$$

は, 式 (6.9) にそっくりだ。従って, 角速度, 周期などの概念は, 円運動と単振動で共通だ。ただし,「角速度」の「角」は, 円運動の場合は幾何学的な意味が直感的にわかりやすい。

● **問** 105　ハンマー投の世界記録樹立時 (問 101 参照) に, 投擲者の腕にはどのくらいの力がかかっただろうか? それは何 kg の物体を持ち上げる力に相当するだろうか? 回転の半径を 1.5 m と仮定せよ（有効数字 2 桁で十分）。ヒント：式 (6.37)。m や v の値は問 101 から流用する。

● **問** 106　太陽のまわりをまわる地球の円運動を考えよう。地球を質点とし, 地球の公転軌道を半径 r の円とし（厳密には楕円だが）, その中心に太陽があるとし, 太陽は動かないと仮定する。太陽と地球の質量をそれぞれ M, m とする。万有引力定数を G とする。
(1) この円運動を維持するために地球が太陽から受ける力の大きさを, r, ω, m であらわせ。
(2) この力は万有引力によって実現される。このことから, 次式を示せ。ただし ω は角速度である。

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \tag{6.43}$$

(3) この円運動の周期 T は, 次式になることを示せ：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \tag{6.44}$$

(4) r, G, M に具体的な数値を代入して ω の値を求め, 周期を求めよ。それは何日に相当するか?（計算に必要な数値は, 各自, 調べよ）

● **問** 107　以下の宇宙飛行体は, それぞれ何時間で地球のまわりを一周するか? 地球の半径を 6400 km とし, 地球や以下の飛行体を質点とみなす。() 内は地表から飛行体への距離である。

(1)　国際宇宙ステーション（約 400 km）
(2)　気象衛星ひまわり（約 36000 km）

気象衛星ひまわりは, 赤道上空の宇宙空間を, 地球の自転と同じ角速度で地球のまわりをまわっているので, 常に地表の同じ場所の雲の様子を時々刻々と観測できる。

よくある質問 131　自然界には, 円運動だけでなく楕円運動もあるのですか? もしあるなら, やはり運動方程式で表せるのですか? ...　はい。惑星の公転は, 一般には円ではなく楕円で

あり, やはり運動方程式に従います。特に火星の楕円軌道は,「天体は真円運動をする」というオカルト的な中世の思い込みから脱皮してニュートン力学が生まれるための, 重要な手がかりでした。また, GPS 衛星を補完して測量精度を上げるための「みちびき」という日本の人工衛星（その信号が農地のトラクターの自動運転などで使われている）は, 気象衛星ひまわりの近くだけど楕円の軌道を動いています。

よくある質問 132　**公式がごちゃごちゃになってしまいます。。。** ... どの式がどの法則から派生するのか, という体系性を意識することが重要。物理学は公式の羅列ではなく, 法則の体系ですから。

よくある質問 133　**そもそも物の動きとか, わかって何が嬉しいのですか? そういうのって, 病気を治す薬とか, バイオ燃料を作る微生物とか, 乾燥に強い植物とかの研究開発に関係あるのでしょうか?** ... そう短絡的に考えてはダメです。薬の働き方はタンパク質の構造や, それが酸性度や温度でどう変わるか, などで決まります。それを知るには, 結局は分子を構成する原子の「動き」が大事なのです。微生物の中の生体反応も同じ。植物が水を吸い上げるときは, 結局は水分子が「どう動くか」が大事でしょ。結局, 科学の本質は「動き」に代表される物理現象に帰着するのです。ここで学んでいるのは, それらの基礎中の基礎です。

よくある質問 134　**そんなの屁理屈にしか聞こえませんが** ... 屁理屈ではありません。実際, 薬の分子の動態を, 物理学と数学を使って膨大な数の方程式で表してコンピュータで解析することが, 既に行われています。そうすることで, 試験管で実験するよりも効率的に, たくさんの分子を調べることができるのです。

演習問題 10　　以下の問に答えよ。ただし「遠心力」という言葉を使ってはならない（というか, 本来, 使う必要は無いのに使おうとする人が多い... 泣)。
(1) 自転車競技場 (競輪場) のトラックのカーブ部分は斜面になっている。その理由を物理学的に説明せよ。
(2) 飛行機（旅客機) が旋回するとき, 機体を傾けるということを知っているだろう。飛行機が左に旋回するとき, 左の翼は上げるか, 下げるか? その理由を物理学的に説明せよ。(1) とは違う理由であることに注意!
(3) 無重力だが空気はある, という環境 (国際宇宙ステーションの中など）で紙飛行機を飛ばしたら, どのような運動をするか?

6.4　解答

答 96 $\omega=\sqrt{k/m}$ より, 質量 m が 2 倍になると, 角速度 ω は $1/\sqrt{2}\fallingdotseq 0.71$ 倍になる（つまり振動はゆっくりになる)。また, 周期を T とすると, $T=2\pi/\omega$ だから, T は $\sqrt{2}\fallingdotseq 1.4$ 倍になる。

答 97 式 (6.16) で, $x(0)=X_0$, $x'(0)=0$ とすると, $x(t)=X_0\cos\omega t$。グラフは図 6.5 のようになる。

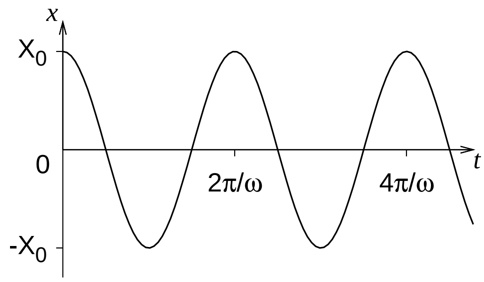

図 6.5　単振動する質点の位置の経時変化

答 98 式 (6.16) で, $x(0)=0$, $x'(0)=V_0$ とすると,

$$x(t)=\frac{V_0}{\omega}\sin\omega t \tag{6.45}$$

となる。グラフは図 6.6 のようになる。

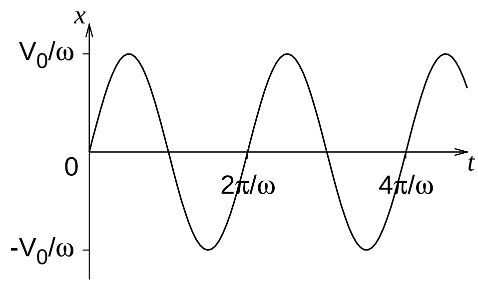

図 6.6　単振動する質点の速度の経時変化

答 99　略。ヒント: 飛行中のボールに働く力は重力のみ（空気抵抗は無視している)。

答 100 $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$, $\mathbf{v}(t)=(x'(t),y'(t))$ となることに注意せよ。(1) ボールは時刻 $t=0$ で原点（君の位置）にあるから $\mathbf{r}(0)=(0,0)$。また, $|\mathbf{v}(0)|=v_0$ で, $\mathbf{v}(0)$ が x 軸からなす角が θ であることから, $\mathbf{v}(0)=(v_0\cos\theta, v_0\sin\theta)$。(2) x 方向には力が働かないので, 式 (6.18) が成り立つ。y 方向には重力つまり $-mg$ が働くので, 式 (6.19) が成り立つ。(3) 式 (6.18) を 2 回積分すると, $x(t)=C_1t+C_2$ となる。ここで C_1, C_2 は積

分定数。$x(0)=0$ より $C_2=0$。$x'(0)=v_0\cos\theta$ より，$C_1=v_0\cos\theta$。従って，$x(t)=(v_0\cos\theta)t$。式 (6.19) を 2 回積分すると，$y(t)=-gt^2/2+C_3t+C_4$ となる。ここで C_3, C_4 は積分定数。$y(0)=0$ より $C_4=0$。$y'(0)=v_0\sin\theta$ より，$C_3=v_0\sin\theta$。従って，$y(t)=(v_0\sin\theta)t-\frac{gt^2}{2}$。(4) 略（各自計算せよ）。(5) 図 6.7。(6) 略（式 (6.22) で $y=0$ となるのは，$x=0$ と式 (6.23)

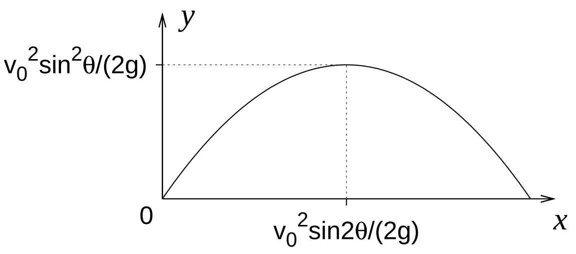

図 6.7 斜めに投げ上げられたボールの軌跡

の場合であり，前者は投げ上げの瞬間，後者は着地の瞬間に対応する。$2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$ に注意せよ。）(7) 式 (6.23) が最大になるのは，$\theta=\pi/4$，つまり 45 度のとき。

答 101 前問より，$\theta=\pi/4$ が，ハンマー投擲の最適角度。このとき式 (6.23) は $X=v_0^2/g$ となる。従って $v_0=\sqrt{gX}$。$X=86.7$ m，$g=9.8$ m s^{-2} とすれば，$v_0=29.1$ m s^{-1}。

答 102 (1) 略（「ライブ講義 大学 1 年生のための数学入門」の極座標の説明を参照。質点は原点から距離 r，x 軸から角 ωt の点にあるから，その極座標を考えて，式 (6.28) が成立。速度はそれを t で微分したものであり，実際に微分をすると式 (6.29) になる。加速度はさらにそれを t で微分したものであり，式 (6.30) になる。それを式 (6.28) を使って書き直したら式 (6.31) になる。）(2) 略（運動方程式 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ に式 (6.31) を代入すると式 (6.32)。それを式 (6.30) を使って成分で書き直したらその次の式）。(3) 略（式 (6.32)，式 (6.29) のそれぞれの大きさを求める）。(4) 略（式 (6.35) と式 (6.36) で ω を消去）。(5) 式 (6.37) より，4 倍。(6) 式 (6.37) より，2 倍。

答 103 (1) 太陽が地球を引っ張る万有引力。(2) 糸がおもりを引っ張る張力。(3) 進行方向横向きにかかる，自転車のタイヤが地面から受ける摩擦力。

答 104 タイヤは高速で転がっていても，地面との接触面は常に地面と噛み合っているので，接触面ではタイヤと地面は静止しているため，摩擦力は静止摩擦力である。

さて，車がカーブに入ると，その回転運動を維持するには，前問の結果から，速さの二乗に比例した横向きの力（向心力）を，車のタイヤと地面の間での摩擦力で実現しなければならない。従って，高速でカーブに入ると，激しく大きな静止摩擦力が要求される。それに耐えきれないと，タイヤと地面の間で滑りが起き，突然，摩擦力は静止摩擦力から，より小さな動摩擦力に代わるので，車はカーブを続けることができなくなる。カーブに入ってから慌てて急ブレーキを踏むと，さらに大変なことになる。ブレーキによってタイヤの回転が急に止まるので，地面とタイヤの間での滑りが，より早い段階（車が減速する前）で起きてしまう。そのような事態になっては遅い。それを避けるには，カーブへ進入する前に十分に減速する必要がある。万一，高速でカーブに入ってしまったら，タイヤがスリップしないように気をつけてブレーキをじんわり踏みながら，幸運を祈るしかない。

答 105 投擲者がハンマーを手放す直前まで，ハンマーは回転運動している。その速度を v とすると，式 (6.37) より，$F=mv^2/r$ の力が投擲者の腕にかかったはずである。問 101 の問題文と結果より，$m=7.26$ kg，$v=29.1$ m s^{-1}。$r=1.5$ m とすると，$F=4100$ N。これに相当する重力を受ける物体の質量は，この値を $g=9.8$ m s^{-2} で割って，約 420 kg。つまり約 420 kg の物体を地上で持ち上げるのに必要な力に相当する。

答 106 (1) 式 (6.35) より，$mr\omega^2$。(2) 万有引力は GMm/r^2。従って，$mr\omega^2=GMm/r^2$。これを ω について解けば与式を得る。(3) $T=2\pi/\omega$ より与式を得る。(4) $G=6.67408\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}，$M=1.9891\times10^{30}$ kg，$r=1.4960\times10^{11}$ m とすると，$\omega=1.99125\times10^{-7}$ Hz。周期は，$2\pi/\omega=3.15539\times10^7$ s$=365.207$ 日=365.21 日。注: 実際の公転周期 365.25 日と少しずれたのは，地球は厳密には楕円軌道をしているため。これを補正するには r の値に修正が必要。注: 与えられた数値は有効数字 5 桁であっても，途中計算は 1 桁余分にとって行い，最後に 5 桁に丸める。

答 107 式 (6.44) において M を地球の質量とすればよい。(1) $r=6800$ km とすると，$T=5580$ s$\fallingdotseq 1.6$ 時間。(2) $r=42000$ km とすると，$T=87000$ s$\fallingdotseq 24$ 時間。

よくある質問 135 ラプラスの悪魔にびっくりしました。… 私も若い頃，ラプラスの悪魔を知って，自分の人生はもう決まってるのかと，一瞬，凹みました。

第7章

慣性系と慣性力

車がカーブする時には搭乗者は回転の外側にひっぱられる力を感じる。エレベーターが動き始めたり止まったりするときに, 中にいる人は身体が重くなったり軽くなったり感じる。このような力を慣性力という。慣性力は, 地球の気象を司る「コリオリ力」の源であり, 農業機械の自動運転に欠かせない「慣性計測装置」の原理でもある。この章では, 慣性力について学ぼう。

7.1　慣性の法則は慣性系の舞台設定

質点の位置 (x, y, z) とは, どこかにある「原点」$(0, 0, 0)$ と, どちらかに向かう座標軸 (x 軸, y 軸, z 軸) の組み合わせ, つまり座標系を定めることによって初めて定量的に定まる概念だ。つまり, 座標系が無ければ位置は定まらない。位置の（時刻による）微分が速度であり, 速度の（時刻による）微分が加速度なのだから, 位置が定まらなければ速度も加速度も定まらない。加速度が定まらねば運動方程式は意味を持たない。すなわち, 座標系が無ければ運動の法則も無いのだ。

では, 「座標系」というのは, どのようにして与えられるのだろうか? 例えばつくば市のどこかの地点を「原点」と定めて, そこから東西南北と上下に座標軸を張れば, それはひとつの座標系だが, それ以外にも座標系はあり得る。ハワイやフランクフルトあたりに原点を置くこともできるだろう。あるいはつくばエクスプレスの, 走行中の快速電車の先頭車両の真ん中に原点を定めて, 進行方向に x 軸, 右方向に y 軸, などと定めることもできるだろう。そんなのありか!?と思うかもしれないが, 座標系は静止していなくてもよいのだ。そもそも「静止」という考え方が, 何か特定の座標系を基準にしたときにのみ成り立つ概念であり, どれかの座標系で見れば静止している質点も, 別の座標系で見れば動いている, ということは十分にありえるのだ。

そういうわけで, 座標系の与え方には任意性があるし, 座標系の与え方によって運動の様子も違って見える。実は, 我々がこれまで学んだ「運動の 3 法則」が成り立つように見えるのは, そのような多種多様な座標系の中でも一部の, 特別な座標系である。そのような座標系を, **慣性系**という。

よくある質問 136　えっ!? 運動の 3 法則が成り立たないなんてことがあるのですか!? なら運動の 3 法則は「基本法則」とは言えないじゃないですか! ... 運動の 3 法則は, 「慣性系で考える」ことが前提条件です。慣性系でない座標系で運動の 3 法則が成り立たないことがあっても, それは運動の 3 法則が不完全であるとか, 間違っているとか, 普遍性に欠けるということではなく, 単に前提条件を満たしていないだけです。

よくある質問 137　でも運動の 3 法則には, 「慣性系で考えるなら...」みたいな前提条件は無かったように思いますが... いえ, ちゃんと入っていますよ。第 1 法則, つまり「慣性の法則」がそれです。「前提条件」でなく「法則」という形で入っているので読み取りにくいですけどね。もう少しこの続きを読んでみて下さい。

実は, 運動の 3 法則の中でも, 慣性の法則が成り立つかどうかが鍵である。つまり,

慣性系の定義

「力がつりあっていれば, 質点が等速度運動をする」ように見える座標系, つまり, 慣性の法則が成り立つ座標系を慣性系と呼ぶ。

後に示すように, 慣性の法則が成り立たない座標系も存在する。それを非慣性系と呼ぶ。

慣性の法則は, この世の中には, どこかに慣性系が存在する, ということを保証する法則なのだ。つまり, 「力がつりあっていれば, 質点が等速度運動をする」ように見える座標系が, この世のどこかに必ず存在する, というのが, 慣性の法則の本当の意味（物理学における位置づけ）なのだ。そして, そういう座標系で見れば, あとの 2 つの法則 (運動方程式・作用反作用の法則) も成り

立つよ, ということを言っているのだ。そういう意味で, 慣性の法則は, 運動の 3 法則の「舞台」を設定する法則だと言えよう。

7.2　慣性系は複数ある

君は幼いころ,「走っている電車の中でジャンプしたら, 自分が空中にいる間に電車が進むから, 自分は電車の後ろのほうに着地するんじゃないか?」と思わなかっただろうか? 実際に試すと, そうはならない。等速で走る電車の中では, ジャンプしても, あたかも電車が動いていないときと同じように, 飛び上がったときと同じ場所に着地する。不思議なことだ。

電車の外にいる人から見れば, 君はジャンプする直前まで, 電車と同じ速度で水平に動いている。そこで君が電車内でジャンプすれば, 確かに君は電車内の空中に浮くのだが, 君の体は単に垂直方向に上がって下がるのではなく, 同時に水平方向にも動いている。その結果, 君の体の軌跡は, 斜めに投げ上げられたボールと同じように放物線を描く。で, 君が着地するとき, 電車の床も同じタイミングでそこに来ている, というわけだ。

このように, 電車の中で起きていることを電車の外で見れば, 違って見えるのだが, それらはそれぞれでつじつまが合っており, いずれも運動方程式で説明できる。電車の中での立場（電車とともに動く座標系）では, 君の体は鉛直の投げ上げの運動として運動方程式を満たすのであり, 電車の外の立場（地面に貼り付いてる, 動かない座標系）では, 君の体は斜めの投げ上げの運動として運動方程式を満たすのだ。

このように, ひとつの物理現象が, 異なる座標系で見れば互いに違って見えるかもしれないが, いずれの見え方も, 運動方程式を満たすことがある。それは, それぞれの座標が慣性系である場合だ。この例では, 電車の外の座標系（地面に貼り付いた座標系）と電車の中の座標系（電車の床かどこかに貼り付いた座標系）がそれぞれで慣性系である, ということだ。

よくある質問 138　えっ!? 慣性系ってひとつじゃないんですか? ... 違います。慣性系はたくさんあります。非慣性系もたくさんあります。

では, どのような座標系が慣性系なのだろうか? 答えを先に言ってしまえば,「ある慣性系に対して, 別の座標系が, 座標軸の向きを変えずに, 原点が等速度運動をするならば, その座標系も慣性系である」ということが理論的に証明できる。例えば, 地面に貼り付いた座標系は慣性系であり (厳密な意味では違うのだが今はそうだとする）, 地面から見て等速度運動をしている電車内に原点と座標軸が貼り付いた座標系は上の条件を満たすので, それも慣性系である。

では, その証明をしよう。まず, ある慣性系 O を考える（その存在は慣性の法則で保証されている)。いま, O とは別の座標系 O' が存在し, O から見て O' の原点は, 当初（つまり時刻 $t=0$ で）, (p_x, p_y, p_z) にあり, その後は一定の速度 (u_x, u_y, u_z) で等速度運動をしているとする。すると, O' の原点 $(0,0,0)$ は, 慣性系 O では

$$(p_x + u_x t, p_y + u_y t, p_z + u_z t) \tag{7.1}$$

と表せる。

よくある質問 139　式 (7.1) がよくわかりません... 簡単ですよ。O' がつくばエクスプレスに乗っかっており, O' の原点がその先頭車両の真ん中だとしましょう。つくばエクスプレスが速度 (u_x, u_y, u_z) で等速度運動をしているとき,「先頭車両の真ん中」が時刻 t どこにあるかを表すのが式 (7.1) です。要するに単なる等速度運動の式です。

簡単のため, 3 つの座標軸は, 慣性系 O と座標系 O' で互いに同じ向きであるとしよう。

さて, ある質点（質量 m）の位置が, 慣性系 O で,

$$(x(t), y(t), z(t)) \tag{7.2}$$

とあらわされ, 座標系 O' において,

$$(X(t), Y(t), Z(t)) \tag{7.3}$$

とあらわされるとしよう。このとき, 次式が成り立つ:

$$\begin{cases} x(t) = p_x + u_x t + X(t) \\ y(t) = p_y + u_y t + Y(t) \\ z(t) = p_z + u_z t + Z(t) \end{cases} \tag{7.4}$$

よくある質問 140　式 (7.4) がよくわかりません... これも簡単ですよ。さきほどのつくばエクスプレスの例で考えましょう。慣性系の原点は, 研究学園駅のホームとしましょう。研究学園駅からつくば駅に向かって走っている快速電車（快速だから時刻 $t=0$ で研究学園駅を減速せずに素通りした!) の中ほどの座席に座っている A 君の位置は, 座標系 O' すなわち電車に貼り付いた座標系で見れば $(X(t), Y(t), Z(t))$ だとしましょう。A 君が同じ座席にずっと座っているならば, $(X(t), Y(t), Z(t))$ は t によらない一定のベクトルですが, せっかちな A 君はつくば駅につく前に, 少しでも改札口に近い方に移動しようとして, 車内を歩きはじめるかもしれませ

ん。そのときは $(X(t), Y(t), Z(t))$ は t とともに変わっていきます。いずれにせよ, A 君の位置を, 電車の外の世界に貼り付いた座標系 O （たとえば研究学園駅のホームを原点とするような座標系）で表すと $(x(t), y(t), z(t))$ となるとしたら, それは列車自体の位置と, 車内での A 君の位置の合成です。前者は式 (7.1) であり, 後者は式 (7.3) です。その和が式 (7.4) です。

式 (7.4) の各式の両辺を t で 2 階微分すれば,

$$\begin{cases} x''(t) = X''(t) \\ y''(t) = Y''(t) \\ z''(t) = Z''(t) \end{cases} \tag{7.5}$$

となる（p_x や $u_x t$ などは t で 2 階微分すると 0 になって消える）。つまり, 慣性系 O と座標系 O' では, 位置や速度が違って見えても, 加速度は同じに見える。

さて, O は慣性系だから運動方程式が成り立つ：

$$\begin{cases} F_x = mx''(t) \\ F_y = my''(t) \\ F_z = mz''(t) \end{cases} \tag{7.6}$$

ここで, (F_x, F_y, F_z) は質点にかかる力である。ところが式 (7.6) は, 式 (7.5) によって,

$$\begin{cases} F_x = mX''(t) \\ F_y = mY''(t) \\ F_z = mZ''(t) \end{cases} \tag{7.7}$$

とできる。つまり, 座標系 O' でも運動方程式は成り立つ。運動方程式が成り立てば, 力が $\mathbf{0}$ のときに, 加速度は $\mathbf{0}$ だから速度は一定（等速度運動）となるので, 慣性の法則が成り立つ。従って座標系 O' も慣性系である!

7.3 非慣性系では「慣性力」が生じる

では, 非慣性系はどのようなものだろうか? それは, 慣性系に対して加速度運動をする座標系である。例として, ある慣性系 O に対して, 座標系 O'' が, 座標軸の向きを変えずに, 原点が等加速度運動をするときを考えよう。簡単のため, 時刻 $t = 0$ で座標系 O'' の原点は慣性系 O の原点に一致しており, 速度も $\mathbf{0}$ だったとしよう。その場合, 時刻 t での座標系 O'' の原点 $(0, 0, 0)$ は, 慣性系 O では

$$\left(\frac{a_x t^2}{2}, \frac{a_y t^2}{2}, \frac{a_z t^2}{2}\right) \tag{7.8}$$

と表せる（式 (5.39) より）。ここで (a_x, a_y, a_z) は, 座標系 O'' の原点の, 慣性系 O からみた加速度である。また, 簡単のため, 3 つの座標軸は, 慣性系 O と座標系 O'' で互いに同じ向きであるとしよう。

さて, ある質点（質量を m とする）の位置が, 慣性系 O で,

$$\big(x(t), y(t), z(t)\big) \tag{7.9}$$

とあらわされ, 座標系 O'' において,

$$\big(X(t), Y(t), Z(t)\big) \tag{7.10}$$

とあらわされるとしよう。このとき,

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a_x t^2}{2} + X(t) \\ y(t) = \frac{a_y t^2}{2} + Y(t) \\ z(t) = \frac{a_z t^2}{2} + Z(t) \end{cases} \tag{7.11}$$

となる。この各式の両辺を二階微分すれば,

$$\begin{cases} x''(t) = a_x + X''(t) \\ y''(t) = a_y + Y''(t) \\ z''(t) = a_z + Z''(t) \end{cases} \tag{7.12}$$

となる。さて, O は慣性系だから運動方程式が成り立つ:

$$\begin{cases} F_x = mx''(t) \\ F_y = my''(t) \\ F_z = mz''(t) \end{cases} \tag{7.13}$$

ここで, (F_x, F_y, F_z) は質点にかかる力である。ところが式 (7.13) は, 式 (7.12) によって,

$$\begin{cases} F_x = mX''(t) + ma_x \\ F_y = mY''(t) + ma_y \\ F_z = mZ''(t) + ma_z \end{cases} \tag{7.14}$$

となる。これを変形すると,

$$\begin{cases} F_x - ma_x = mX''(t) \\ F_y - ma_y = mY''(t) \\ F_z - ma_z = mZ''(t) \end{cases} \tag{7.15}$$

となる。このように, 座標系 O'' では, 運動方程式は左辺に, 本来の力以外の項（$-ma_x$ など）が生じる。従って, たとえ力がゼロであっても, 座標系 O'' からみた質点は, 加速度を持つ運動（つまり等速度でない運動）をするように見える。従って慣性の法則が成り立たない。従って座標系 O'' は非慣性系である。

ところがここで,

$$(-ma_x,\ -ma_y,\ -ma_z) \tag{7.16}$$

も一種の力であると解釈し,

$$(F_x - ma_x,\ F_y - ma_y,\ F_z - ma_z) \tag{7.17}$$

を合力であると考えてしまえば, 式 (7.15) は, 見掛け上は運動方程式になる。この式 (7.16) は, もともと何かが質点に働きかけて実現した力でなく, 非慣性系 O'' でも運動方程式が成り立つようにみせかけるために, 形式的・仮想的に導入された力（のようなもの）だ。このように, 非慣性系において, 運動方程式が成り立つようにみせかけるために付け加わる仮想的な力を, 慣性力と呼ぶ。

例えば, 電車が駅に近づいて減速を始めたとする。そのときに君がジャンプすると, 君は電車の前のほうに飛んでいくだろう。ジャンプしなくても君は, 減速する電車の中では前方にひっぱられる力を感じる。あるいは加速する電車の中では, 後ろに引かれる力を感じる。これらは慣性力の例である。

このようなことを考えていれば, ただ「電車に乗る」という行為が, 物理の実験に早変わりするのだ。

よくある質問 141　**要するに, 非慣性系でも慣性力を考えれば, 運動の** 3 **法則が成り立つってことですか**? ... 慣性力も「力」のひとつとしてみとめてしまえば, 運動方程式は成り立ちます。従って, 合力（慣性力も含めて）が $\mathbf{0}$ のときは加速度も $\mathbf{0}$ になるので等速度運動になる, つまり慣性の法則も成り立ちます。でも, 作用反作用の法則が微妙です。慣性力には反作用が無いのです。どういうことか, 考えてみたらわかるでしょう!

● **問** 108　日本の H2A 宇宙ロケットは, 打ち上げ後, 約 100 秒間で高度約 50 km に到達する。

(1)　このロケットの運動を等加速度直線運動とみなし, 加速度を求めよ。

(2)　このロケット内の物体には, どのような慣性力がどのくらいかかるか? それは重力の何倍か?

よくある質問 142　**トランポリンの上も無重力らしいですが** ... よく知ってますね。それは, 下りのエレベーターが動き始めた時に, 中にいる人が, 自分の体がふっと軽くなるように感じるのと同じです。トランポリンで跳ねた後に上空に浮かんでいる人は, 重力に引かれて下向きに加速しているのですが, 当人にとってはそれは上向きに引っ張られる力のように感じます。これが慣性力です。それが重力を（見掛け上）打ち消して, 無重力状態のように感じさせるのです。

よくある質問 143　**宇宙ステーションから星出さんがロシアの宇宙船ソユーズで地球に帰ってきたとき, 自分の体重の** 5 **倍の力が体にかかったそうです。いったい体重の** 5 **倍の力が加わったら身体はどうなってしまうのでしょう**? ... 下りのエレベーターが停止する直前に, 乗ってる人は体重が大きくなったように感じますね。あれの激しい場合がソユーズの着陸です。ソユーズは着地の寸前にロケットを点火して, 強い上向きの加速度をかけて減速します。ソユーズの中で直立していると, まさに体重の 5 倍に相当する力が足にかかるわけなので, 60 kg の人が 240 kg の物体を持ち上げているのと同じ状態です。その過酷さを和らげるために, 寝た姿勢で降りてくるわけです。寝ていれば, 例えば後頭部（枕）にかかる力は頭の重さの 5 倍程度なので, せいぜい数 10 kg で, 耐えられないほどではありません。お腹は... メタボな人にはつらいかも。

7.4　回転する座標系の慣性力: 遠心力とコリオリ力

回転する座標系における慣性力を考えよう。いま, 質量 m の質点が, 平面内で運動している。平面内に, ある慣性系 O をとる。O では, 質点の位置と質点にかかる力はそれぞれ,

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \tag{7.18}$$
$$\mathbf{f}(t) = (f_x(t), f_y(t)) \tag{7.19}$$

とあらわされるとする（t は時刻）。この慣性系 O の x 軸と y 軸をそれぞれ実軸・虚軸とするような複素平面を考え, $\mathbf{r}$ と $\mathbf{f}$ をそれぞれ複素数で表現しよう。といっても難しいことではなく, ベクトルの x 成分を実部, y 成分を虚部とするような複素数を考えるだけだ。このとき, ベクトル $\mathbf{r}(t)$ に対応する複素数を $r(t)$, ベクトル $\mathbf{f}(t)$ に対応する複素数を $f(t)$ と書くと次式が成り立つ:

$$r(t) = x(t) + iy(t) \tag{7.20}$$
$$f(t) = f_x(t) + if_y(t) \tag{7.21}$$

複素数はこのように, （2 次元の）ベクトルを代替することができる。なぜわざわざ複素数を考えるかというと, それが以後の計算を楽にしてくれるからだ。

さて, O は慣性系なので運動方程式が成り立つ。すなわち, $\mathbf{f}(t) = m\mathbf{r}''(t)$ である。成分で書くと,

$$\begin{cases} f_x(t) = mx''(t) \\ f_y(t) = my''(t) \end{cases} \tag{7.22}$$

である。複素数で書くと,

$$f(t) = mr''(t) \tag{7.23}$$

である。ここで $r''(t)$ は, $r(t)$ の実部と虚部をそれぞれ時刻で 2 階微分してできる複素数であり, すなわち $r''(t) = x''(t) + iy''(t)$ である。

さて, 慣性系 O に対して, 座標原点は同じだが, 角速度 ω で, x 軸から y 軸に向かって回転する座標系 O' を考える。時刻 $t = 0$ で O と O' の座標軸は一致していたとする。すると時刻 t での O と O' の配置は図 7.1 のようになる（その上で, 質点の座標がそれぞれでどう表されるかも書いてある)。

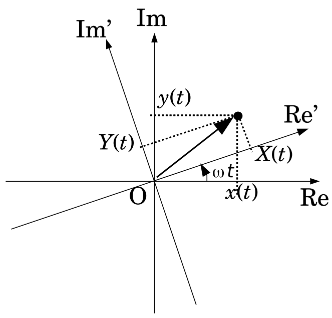

図 7.1　慣性系 O と, それに対して回転する座標系 O'。複素平面で表現する。傾いてるのが座標系 O'。O の実軸・虚軸をそれぞれ Re, Im とし, O' の実軸・虚軸をそれぞれ Re', Im' とする。

さて, 座標系 O' において, 質点の位置と質点にかかる力はそれぞれ,

$$\mathbf{R}(t) = (X(t), Y(t)) \tag{7.24}$$
$$\mathbf{F}(t) = (F_X(t), F_Y(t)) \tag{7.25}$$

と表されるとする。慣性系 O について考えたときと同様に, 座標系 O' でのベクトル $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{F}(t)$ にそれぞれ対応する複素数 $R(t)$, $F(t)$ を考える。すなわち,

$$R(t) = X(t) + iY(t) \tag{7.26}$$
$$F(t) = F_X(t) + iF_Y(t) \tag{7.27}$$

とする。ここで $r(t)$ と $R(t)$ の関係を求めよう。O と O' を別々に描くと図 7.2 のようになる。互いに比べやすいように, O と O' の座標軸（実軸と虚軸）が互いに平行になるように描いた。両方に描かれた矢印は, 図 7.1 ではもともと同じ質点の位置を表す矢印だったものである。ところが座標軸が互いに傾いていたために, 座標軸の向きを揃えると矢印どうしが傾いて見える。つまり, O'（右図）での矢印（複素数 $R(t)$）を左まわりに ωt だけ回転したものが O（左図）での矢印 (複素数 $r(t)$) になる。この回転は, 複素数では $e^{\omega t}$ を掛けることに相当する（ライブ講義 大学 1 年生のための数学入門, 問 217(1) 参照)。

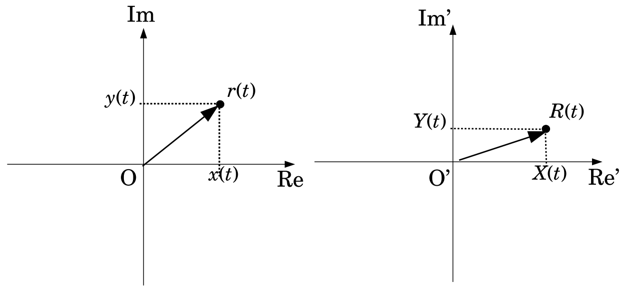

図 7.2　図 7.1 を別々の座標系に分けて描き直したもの。

従って, 次式が成り立つ（$f(t)$ と $F(t)$ の関係も同様に考えればよい）:

$$r(t) = R(t)e^{i\omega t} \tag{7.28}$$
$$f(t) = F(t)e^{i\omega t} \tag{7.29}$$

さて, 式 (7.28) の両辺を t で微分すると,

$$r'(t) = R'(t)e^{i\omega t} + i\omega R(t)e^{i\omega t} \tag{7.30}$$

となる。もういちど両辺を t で微分すると,

$$r''(t) = R''(t)e^{i\omega t} + 2i\omega R'(t)e^{i\omega t} - \omega^2 R(t)e^{i\omega t} \tag{7.31}$$

となる。両辺に m をかけると,

$$mr''(t) = mR''(t)e^{i\omega t} + 2im\omega R'(t)e^{i\omega t} - m\omega^2 R(t)e^{i\omega t} \tag{7.32}$$

$f(t) = mr''(t)$ に注意すると,

$$f(t) = mR''(t)e^{i\omega t} + 2im\omega R'(t)e^{i\omega t} - m\omega^2 R(t)e^{i\omega t} \tag{7.33}$$

となる。式 (7.29) に注意すると,

$$F(t)e^{i\omega t} = mR''(t)e^{i\omega t} + 2im\omega R'(t)e^{i\omega t} - m\omega^2 R(t)e^{i\omega t} \tag{7.34}$$

となる。両辺の全ての項に $e^{i\omega t}$ が掛かっているのでこれを約分する（つまり両辺に $e^{-i\omega t}$ をかける）と,

$$F(t) = mR''(t) + 2im\omega R'(t) - m\omega^2 R(t) \tag{7.35}$$

となる。右辺の第 2 項と第 3 項を左辺に移せば,

$$F(t) - 2im\omega R'(t) + m\omega^2 R(t) = mR''(t) \tag{7.36}$$

となる。この式は, 座標系 O' でも成り立つ「運動方程

式に似たような式」である。ここで,

$$-2im\omega R'(t) + m\omega^2 R(t) \tag{7.37}$$

を慣性力として考えよう。式 (7.37) の最初の項

$$-2im\omega R'(t) \tag{7.38}$$

は, $R'(t)$, つまり座標系 O' での速度に, $-i$ がかかっている。複素平面で $-i$ をかけるということは, y 軸から x 軸に向かう向き（「慣性系 O からみた座標系 O' の回転の方向」の逆向き）に 90 度回転することに相当する。つまりこの慣性力は, 速度に対して直角にかかる。また, その大きさは速度と角速度 ω に比例する。このような慣性力を, コリオリ力と呼ぶ。

式 (7.37) の 2 番目の項

$$m\omega^2 R(t) \tag{7.39}$$

は, $R(t)$, つまり座標系 O' での位置と, 角速度 ω の 2 乗に, それぞれ比例し, $R(t)$ と同じ向き（原点から離れる方向）にかかる。このような慣性力を, 遠心力と呼ぶ。

● **問** 109　慣性系 O に対して一定の角速度 ω で回転する座標系 O' において生じる慣性力を導出し, それぞれがどう呼ばれるかを述べよ（上の議論を再現すれば OK)。

● **問** 110　北極点付近の上空を速さ v で飛ぶ, 質量 m の飛行機 P を考える。地球の自転の角速度を ω とする。
(1) P にかかるコリオリ力の大きさを m, ω, v で表せ。
(2) P にかかるコリオリ力は重力の約何倍か?　ただし v =1000 km h^{-1} とする。
(3) P はまっすぐ飛んだつもりでも, その軌跡はコリオリ力によって横方向にずれる。1 時間の飛行によってどのくらい横にずれるか?

● **問** 111　化学や生物学では, 液体試料の中に懸濁または混合した物質を取り出すために, 遠心分離機というものをよく使う。以下の問題でわからない用語はインターネット等で調べよ。回転半径 r, 単位時間あたりの回転数が f の遠心分離器がある。この遠心分離器で, 試料溶液中の懸濁物を沈降させようと思う。
(1) この遠心分離機の中で振り回される遠沈管のひとつに着目し, それと一緒に動く座標系を考える。この座標系の回転する角速度（それは遠心分離機の回転と同じ角速度）を ω とする。ω を f を使って表わせ。
(2) 遠沈管の中の試料の中に質量 m の微粒子が懸濁しているとする。この微粒子にかかる遠心力の大きさを, ここまでで出てきた量 (記号) で表わせ。
(3) この微粒子にかかる遠心力の大きさは, この試料が遠心分離機の外で静置されているとしたときにこの微粒子にかかる重力の大きさの何倍か? 重力加速度 g などを用いて表わせ。
(4) 回転半径 r=15 cm, 単位時間あたりの回転数 f = 4000 rpm の遠心分離器がある（rpm は rotation per minute, すなわち 1 分間あたりの回転数)。この遠心分離器で, 試料溶液中の懸濁物を沈降させようと思う。このとき, 遠心分離器なしで地上の重力にまかせて 3.0 日かかる沈降は, この遠心分離器を使うとどのくらいの時間に短縮できるか? ただし沈降時の粒子にかかる抵抗力は沈降速度に比例するとする。沈降速度は終端速度とみなして一定と考えてよい。沈降速度は小さいのでコリオリ力（それは速度に比例する）は無視してよい。

● **問** 112　慣性計測装置 (IMU) とは何かを述べ, その利用例（農業機械やゲーム機など）を調べ, その仕組みをわかりやすく自分の言葉で説明せよ。

● **問** 113　台風について考える。
(1) 北半球の台風の渦は, どのような向きに巻いているか? それはなぜか?
(2) 北半球では, 台風の進行方向を向いて右側（多くの場合は東側）は左側より風が強いことが多い。なぜか?
(3) 1991 年の台風 19 号は, 九州に大規模な倒木被害をもたらし, 青森では収穫前のリンゴの多くが落果した。このような大きな被害をもたらした背景を, この台風の進路や勢力で説明せよ。
(4) 台風は熱帯地方で発生するが, 奇妙なことに, 熱帯のど真ん中である赤道付近では台風は発生しない。なぜか? という問に, ある学生は「赤道ではコリオリ力が働かないから」と答えた。それに対して教師は「赤道だって地球の一部だ。地球は回転しているのだから, 赤道でもコリオリ力は働くよね」と指摘した。それをふまえて君は, この問にどう答えるか?

● **問** 114　以下について説明せよ。
(1) 国際宇宙ステーションの中が「無重力」なのはなぜか?
(2) 人工衛星が地球に落ちてこないのはなぜか?

ここで注意。君は「遠心力」という言葉を不用意に

使っていないだろうか? 例えば問 114(2) で, 人工衛星が地球に落ちてこないのは「万有引力と遠心力が釣り合ってるから」だと思っていないだろうか?

これはなんとなく「それっぽい」説明だが, 間違っている。というのも, 慣性の法則によると, もし力どうしが打ち消し合うなら, 物体は等速度運動をするはずであり, 従って人工衛星は地球のまわりを周らずにすっ飛んでいくはずである。つまり, 人工衛星が地球を周るならば, 人工衛星にかかる力が「釣り合」ったり「打ち消し合」ってゼロになってはならないのだ。正しくは, 「万有引力が, 人工衛星の軌道をカーブさせる横方向の加速度を生むため」とか「万有引力が回転運動の向心力となるため」である。

「遠心力」は回転する座標系に「乗ったもの」に働く「見かけの力」(慣性力) である。問 114(1) で, 人工衛星内で宇宙飛行士が重力を感じないのは, 確かに遠心力と万有引力が打ち消し合うからである。しかし, それと人工衛星が円運動をすること (人工衛星が落ちてこないこと) は別である。人工衛星の円運動を論ずる座標系はそもそも回転していないのだから, その議論に遠心力を持ち出すのは筋が悪い考え方である。

よくある質問 144　でも, 人工衛星とともに動く座標系では, 人工衛星に働く遠心力と万有引力が釣り合っていますよね。だから落ちてこない, と言ってもよいのでは? ... では, 地球に向かって自由落下中の人工衛星はどうでしょう? その人工衛星と一緒に動く座標系では, 人工衛星には, 落下運動の加速度とは逆向きの慣性力が働き, それと万有引力は釣り合っています (だから自由落下する人工衛星や飛行機の中は「無重力」になります)。あなたのロジックはこの例と同じです。でもこの例では人工衛星は落ちてきていますよ!!

演習問題 11　つくばエクスプレスのつくば行き快速電車は, つくば駅の 1.0 km 手前から減速し, つくば駅で停車する。減速直前の列車の速度を v =100 km/h とする。減速中の車内で列車後尾に向かって歩く人は, まるで坂道を登っているかのような負荷を感じる。それは傾斜何度程度の坂道に相当するか? 列車は加速度 a の等加速度直線運動をするとみなしてよい。

演習問題 12　夜間や霧の中などで外の景色がほとんどわからない状態では, 操縦士はどちらが上なのかわからなくなってしまうことがあるらしい (空間識失調)。それは慣性力とどのような関係があるだろう?

7.5　解答

答 108 (1) 一定加速度を a とする。打ち上げの瞬間を時刻 0 とする。時刻 t までの飛距離 x は $x = at^2/2$。従って, $a = 2x/t^2$。これに $t = 100$ s, $x = 50000$ m を代入すると, $a = 10\ \mathrm{m\ s^{-2}}$。注意: 実際はロケットの運動は等加速度運動ではない。その理由のひとつは, 燃料消費に伴って, 質量が刻々と減っていくことである。(2) 質量を m とすると, 慣性力は ma。一方, 重力は mg。両者を比較すると, $a = 10\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ と g はほとんど同じなので, 慣性力は (地上付近での) 重力にほぼ等しい。ただし, この慣性力は加速方向 (上向き) とは逆方向 (下向き) にかかるので, 重力と慣性力の合力は, 重力の約 2 倍 (下向き) となる。

答 110 (1) 式 (7.37) の第 1 項より, 飛行機にかかるコリオリ力の大きさは $2m\omega v$。(2) 地球の自転の周期を T とすると, 角速度は

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.14}{60 \times 60 \times 24\ \mathrm{s}} = 7.27 \times 10^{-5}\ \mathrm{s^{-1}}$$

一方, v =1000 km h^{-1} を換算すると,
$v = 278\ \mathrm{m\ s^{-1}}$。従って,

$$\begin{aligned} 2\omega v &= 2 \times 7.27 \times 10^{-5}\ \mathrm{s^{-1}} \times 278\ \mathrm{m\ s^{-1}} \\ &= 0.0404\ \mathrm{m\ s^{-2}} \end{aligned}$$

これは重力加速度の約 0.004 倍。(3) 本来は円運動になるはずだが, 横方向の等加速度運動として近似すると (加速度 a は (2) で求めた値), 時間 $t = 3600$ s の間に横方向の移動距離は $at^2/2$ になるから,

$$\frac{0.0404\ \mathrm{m\ s^{-2}} \times (3600\ \mathrm{s})^2}{2} = 2.6 \times 10^5\ \mathrm{m}$$

すなわち, 約 260 km。

答 111 (1) 1 回転は角にすると 2π ラジアンだから, 単位時間あたりに進む角 (角速度) は, 単位時間あたりの回転数の 2π 倍。従って, $\omega = 2\pi f$。(2) 式 (7.39) より, $m\omega^2 r = 4\pi^2 mrf^2$。(3) 遠心分離機の外で静置されているとしたときにこの微粒子にかかる重力の大きさは mg。従って, $4\pi^2 mrf^2/(mg) = 4\pi^2 rf^2/g$。(4) 略。10 秒から 1000 秒の間の値になるはず。

よくある質問 145　物体の運動をここまで数式で予測できるなんて凄いですが, 実際に自分では思いつける気がしません。やはり私に物理は無理って感じです... 大丈夫。ここまで物理学が発展するのに何千年間もかかったのです。20 歳くらいの

若者がすぐに理解したり思いつけるようなものではありません。先人の業績をもとに, 真理を謙虚に学べばそれでよいのです。

よくある質問 146　**物理が意外にいろんなことに潜んでいて, しかも結構強いということを知り, 驚きました**... 物理学は, コンクリート製の建物の壁の中に埋められた鉄骨のようなものです。普段はその存在は見えないし, 意識されることもありません。しかし, その建物を地震や強風, 洪水や津波が襲ったとき, 最後に頼りになるのがそれらであるように, 順風満帆で「普段通り」が続く日常では物理学をことさら意識しないでもなんとかなるけど, 何か困った時や, なんとかしなければならないときに, 物理は頼りになるのです。

コラム: 問題を解くコツ

物理学の問題を解くには, いくつかのコツがある。

1. 値の代入は最後にやる!

既に述べたが, 答を数値で求める問題も, できるだけぎりぎりまで, 数値ではなく文字の式変形で攻めよう。そして, 求めたい量を既知の量で表す式が求まった段階で, 既知の量の数値を代入して一気にまとめて数値計算をするのである。最初や途中から数値を代入してしまうと, 式変形と数値計算が混在してしまい, ミスを起こしやすく, また, ミスの発見がやりにくくなる。一方, 最後にまとめて計算すれば, 約分の組み合わせがたくさんできるので, 計算が効率よく, 正確にできる。

2. ベクトルかスカラーかを考える。

今扱っている量がベクトル（向きを持つ量）なのかスカラー（向きは持たず, 大きさだけを持つ量）なのかを意識しよう。速度, 加速度, 力, 運動量はベクトル。エネルギー, 仕事, 質量はスカラー。ベクトル＝スカラーみたいな等式（方程式）は絶対に成り立たない。そんな変な式を立てていないかチェックしよう。そのためにも, ベクトルは太字で書く, ということを徹底しよう。

3. 次元をチェック!

式変形の途中や最終結果の次元をチェックしよう。例えば運動方程式を解いて, 質点の速度 v に関する式を得たら, それが速度の次元を持っているかをチェックする。$v=\exp(-\alpha t/m)-mg$ のような式を見たら, 一瞬で「これは違う!」と気づかねばならない（exp は必ず無次元である... わからない人は「大学１年生のための数学入門」を見よう!)。次元をチェックしていれば, 単位を忘れる, ということはありえない。

4. 初期条件をチェック!

運動方程式を解く場合は, たいてい, 初期条件が与えられている。式変形の最後に得た式に, $t=0$ を入れてみよう。それが初期条件が満たすかどうかをチェックしよう。

5. $t\to\infty$ をチェック!

与えられた問題は, 時間が十分たてばどうなるかが常識的にわかることがある。例えば, 摩擦を受けて運動する物体は, いずれ止まったり, 一定速度に落ち着いたりすることが多い。運動方程式を解いて得た式で時刻 t を ∞ にしてみて, 実際にそうなるかどうかを確認しよう。

6. $x=0$ や $t=0$ のまわりで線形近似!

方程式を解いて得た式について, 0 のまわりで線形近似してみよう。それは多くの場合, 得た式よりもシンプルになり, 直感的に解釈しやすい。例えば空気抵抗つきの自由落下の問題では, $t=0$ のまわりでの線形近似は $v=-gt$ のように簡単な式になる。それが君の物理的直感に整合するかを考えよう。

7. 保存則をチェック!

物理は, 運動方程式を解くのが正攻法だが, それを迂回するのが「保存則」である。条件設定によって, 保存する量とそうでない量がある。保存量があれば, それに着目して問題を考えるとシンプルに解けることが多い。運動方程式を立てたり解いたりする前に, 保存則が使えないかを考えよう。

第8章

力学的エネルギー保存則(1)

運動の 3 法則, 特に運動方程式を使えば, 原理的には, どんな物体のどんな運動も予測できる。しかし現実的には, 膨大な計算が必要で手に負えなかったり, 必要な情報が足りなかったりで, 運動方程式を解くのがめんどくさいとか無理ということが多い。そのような場合に便利なのが, ここで学ぶ「力学的エネルギー保存則」である。

この法則は運動方程式が姿を変えたものだが, 場合によっては運動方程式よりもずっと便利であり, 簡単に運動の様子を教えてくれる（ことがある)。

もう少し詳しく説明しよう。本章では話を簡単にするために, 運動を直線（x 軸上）に限定する。運動の第二法則によれば, 質量 m の質点が力 F を受けて運動するとき, その運動は必ず以下のような方程式（運動方程式）を満たす：

$$F = ma \tag{8.1}$$

a は質点の加速度である（力と加速度はベクトルなので本来は $\mathbf{F}$, $\mathbf{a}$ と太字で書くべきところだが, ここでは運動が 1 次元に限定されているので, F と a は細字で書いた。P60 の「慣習」参照)。加速度は速度を時刻で微分したものなので, この式は, 以下のようにも書ける:

$$F = m\frac{dv}{dt} \qquad (t \text{ は時刻}, v \text{ は質点の速度}) \tag{8.2}$$

式 (8.1) と式 (8.2) は, 加速度の表現が形式的に違うだけで, 互いに等価な方程式であり, 式 (5.40) を直線運動（1 次元の運動）に書き直したものだ。以下, 式 (8.2) を議論の出発点としよう。

いま, 直線（x 軸）上を, 質量 m の質点が, 力 F を受けながら, 時刻 $t = t_0$ から $t = t_1$ の間で何らかの運動をしている状況を考えよう。力 F は時刻とともに変化するとしよう。この運動は, もちろん式 (8.2) に従うので, 式 (8.2) を解いて位置と速度を時々刻々と追跡すれば, 運動の全体像が判明する。でも微分方程式を解くのは, たいていめんどくさい。

もっと楽ができないだろうか? 例えば物騒な話だが, ボールを投げてどこかに命中させたい場合は, 「時々刻々」でなくてよいから, 最初と最後だけでの位置（と, できれば速度... 衝撃の大きさを知りたいから!）がわかれば十分である。

そこで, 運動方程式の経過の詳細に立ち入ることなしに, 運動の最初（$t = t_0$）と最後 ($t = t_1$) の間に何らかの関係を見いだせないだろうか? 実は, 式 (8.2) をうまく数学的に変形すれば, そのような関係を見出すことができるのだ。ただしそのためには「運動エネルギー」という概念を導入しなければならない。

8.1 運動エネルギー

というわけで, まず「運動エネルギー」の定義を述べる（その意味とか働きは後でわかる！)：

1 次元運動における運動エネルギーの定義

質量 m の質点が速度 v で運動するとき, 次式をその質点の運動エネルギー (kinetic energy) という。

$$\frac{1}{2}mv^2 \tag{8.3}$$

● **問 115**　式 (8.3) を 5 回書いて記憶せよ。

上の式は速度 v の関数である (質量 m の関数でもあるが, 多くの場合, 質点の質量は不変なので, ここでは m は定数としておこう)。そこで, 慣習的には運動エネルギーを関数 $T(v)$ と表すことが多い：

$$T(v) = \frac{1}{2}mv^2 \tag{8.4}$$

では, この「運動エネルギー」がどう活躍するかを説明しよう。

まず, 質点の位置を x とする。速度 v は位置 x を時刻

t で微分したもの（それが速度の定義!）だから,

$$\frac{dx}{dt} = v \tag{8.5}$$

である。両辺に dt をかけると,

$$dx = v\,dt \tag{8.6}$$

となる。つまり, x の微小変化 dx は, 速度 v に時間の微小変化 dt をかけたものである。

さて, 式 (8.2) の両辺に dx をかけてみよう：

$$F\,dx = m\frac{dv}{dt}\,dx \tag{8.7}$$

この右辺の dx を, 式 (8.6) で書き換えれば, 次式を得る:

$$F\,dx = m\frac{dv}{dt}v\,dt \tag{8.8}$$

ここで, 時刻 t_0 から t_1 までの運動を, たくさんの短い断片に分割し, それぞれの断片で式 (8.8) を考えて足し合わせる。つまり, 時刻 t_0 から t_1 までの間で, 式 (8.8) を積分すると,

$$\int_{x_0}^{x_1} F\,dx = \int_{t_0}^{t_1} m\frac{dv}{dt}\,v\,dt \tag{8.9}$$

となる。$x_0 = x(t_0), x_1 = x(t_1)$ とした。ここで置換積分によって右辺の積分変数を t から v に変換すると[*1],

$$\int_{x_0}^{x_1} F\,dx = \int_{v_0}^{v_1} mv\,dv \tag{8.10}$$

となる。$v_0 = v(t_0), v_1 = v(t_1)$ とした。この左辺は, 質点が x_0 から x_1 に移動する際に力がなす仕事 W_{01} である（わからない人は式 (4.20) を見よ)。一方, 右辺は,

$$= \left[\frac{1}{2}\,mv^2\right]_{v_0}^{v_1} = \frac{1}{2}\,mv_1^2 - \frac{1}{2}\,mv_0^2 \tag{8.11}$$

となる。以上より,

$$W_{01} = \frac{1}{2}\,mv_1^2 - \frac{1}{2}\,mv_0^2 \tag{8.12}$$

である。右辺に運動エネルギーが出てきたではないか!

式 (8.12) を, 式 (8.4) を使って書き換えると,

$$W_{01} = T(v_1) - T(v_0) \tag{8.13}$$

あるいは, 同じことだが,

$$T(v_1) = T(v_0) + W_{01} \tag{8.14}$$

となる。この式は味わい深い。質点にかかる力がなした仕事は, 質点の運動エネルギーの変化に等しい。つまり, 仕事がされるぶんだけ, 運動エネルギーが増えるのだ。そう考えると, 運動エネルギーは仕事と等価な物理量, つまり「エネルギー」の名にふさわしい。運動エネルギーは, 「質量を持つ物体の運動」という姿をまとったエネルギーである。

ここで, 運動エネルギーの定義式 (8.3) を再度よく見よう。速度 v が「2 乗」の形で入っている。従って, 運動エネルギーは, 速度 v の符号（つまり方向）によらず, 速度 v の大きさ, つまり「速さ」だけで決まる。質点がどっち向きに進んでいるかは無関係なのだ。

● **問** 116　式 (8.12) を導出せよ。ヒント: 式 (8.5) 以下の議論を整理して再現すればよい。

さて, 式 (8.12) は, 運動方程式を位置（変位）で積分したものにすぎない（高校物理では式 (8.12) を「エネルギーの原理」と呼ぶらしいが, 大学ではそのような呼び方はほとんどしない)。しかし, その有用性はハンパではない。式 (8.12) を使えば, 運動の過程を気にすることなく, 運動の最初の状態から最後の状態を直接的に導くことができるのだ。以下の例でそれを学ぼう。

● **問** 117　質量 m の質点が, 一定の力 F を受けて, 一定の加速度 a で直線 (x 軸) 上を運動している。時刻 t における位置と速度をそれぞれ $x(t), v(t)$ とする。

(1)　時刻 t_0 から時刻 t_1 の間に, 力 F がなした仕事 W_{01} は次式のようになることを示せ:

$$W_{01} = F\{x(t_1) - x(t_0)\} \tag{8.15}$$

(2)　次式を示せ:

$$W_{01} = ma\{x(t_1) - x(t_0)\} \tag{8.16}$$

(3)　以上と式 (8.12) より, 次式を示せ[*2]：

$$v(t_1)^2 - v(t_0)^2 = 2a\{x(t_1) - x(t_0)\} \tag{8.17}$$

● **問** 118　カーリングの問題（問 89）をもう一度考えてみよう。初速度 v_0 で放されたストーンが距離 x だけ進んで停止したとすると,

[*1] 形式的には右辺の dt を約分することに相当する。

[*2] これは高校物理で「$v^2 - v_0^2 = 2ax$」と言われる公式だ。高校では暗記させられる式だが, 実はこのように簡単に導出できる公式なので, 諸君はもちろん暗記する必要は無い。本当に重要で記憶すべきなのは運動の三法則だ。もしも, 式 (8.17) を覚えていながら運動の三法則を言えないという人がいたとしたら, その人は, 物理学の学びかたをなんか間違えている。

(1) ストーンが放されてから止まるまでの間に摩擦力がした仕事は $-F_{\mathrm{m}}x$ であることを示せ。

(2) ストーンが放されてから止まるまでの間の運動エネルギーの変化は

$$0-\frac{1}{2}mv_0^2 \tag{8.18}$$

であることを示せ。ヒント：止まったとき速度は0。

(3) 以上より, 次式を導け：

$$F_{\mathrm{m}}=\frac{mv_0^2}{2x} \tag{8.19}$$

これは式 (5.83) に一致する。

(4) ストーンの到達距離が, 初速度の 2 乗に比例することを示せ。

● **問** 119　地球のはるか遠方に静止している質量 m の隕石が, 地球の万有引力に引かれて徐々に加速しながら一直線に地球に向かってきたとする。我々は, 隕石を迎撃する計画を立てねばならない。そのためには, 隕石が地球に衝突する直前の速さ v_1 を求めねばならない。地球の質量を M, 半径を R とし, 万有引力定数を G とし, 隕石を質点とみなす。

(1) 隕石が, 無限遠方から, 地球の表面（中心から距離 R）まで, 地球の万有引力に引かれてやってくるとき, 地球の万有引力がなす仕事 $W_{\infty\to R}$ は,

$$W_{\infty\to R}=\frac{GMm}{R} \tag{8.20}$$

となることを示せ。

(2) 隕石が無限遠方から地球表面までやってくるとき, 隕石の運動エネルギーの変化は次式であることを示せ。

$$\frac{mv_1^2}{2} \tag{8.21}$$

ヒント：初速度は 0 である。

(3) このことから, 地球衝突直前の隕石の速さ v_1 は次式のようになることを示せ:

$$v_1=\sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{8.22}$$

(4) 上の式の定数に, 適切な数値を代入し, v_1 の値を求めよ。

8.2　力学的エネルギー保存則

前節の式 (8.13), 式 (8.14) で,「運動エネルギー T は, される仕事のぶんだけ増える」ことを学んだ。さて, ここで以前学んだ, ポテンシャルエネルギーを思い出そう: ある特定の位置（基準点 O）から位置 x まで質点を運ぶときに保存力がなす仕事を $W_{O\to x}$ とすると, ポテンシャルエネルギー $U(x)$ は, $U(x)=-W_{O\to x}$ と定義された。

ここで, 基準点からまず位置 x_0 まで運び, さらに位置 x_0 から位置 x_1 まで運ぶという, 2 段階での操作を考えよう。第一段階での仕事は $W_{O\to x_0}$ であり, 第二段階での仕事を $W_{x_0\to x_1}$ とする。トータルの仕事はこの 2 つの和である。ところが, この 2 つの段階をひとつにまとめて考えると, 中継地点 x_0 を経由するとはいえ, 結局, 基準点から位置 x_1 まで運ぶことに他ならないから, トータルの仕事は $W_{O\to x_1}$ でもある。従って,

$$W_{O\to x_0}+W_{x_0\to x_1}=W_{O\to x_1} \tag{8.23}$$

である。ところが, ポテンシャルエネルギーの定義から,

$$W_{O\to x_0}=-U(x_0) \tag{8.24}$$
$$W_{O\to x_1}=-U(x_1) \tag{8.25}$$

とできるので, 結局,

$$-U(x_0)+W_{x_0\to x_1}=-U(x_1) \tag{8.26}$$

である。すなわち,

$$W_{x_0\to x_1}=-U(x_1)+U(x_0) \tag{8.27}$$

である。これを式 (8.12) に代入すれば（$W_{x_0\to x_1}$ と W_{01} は同じものを意味することに注意),

$$-U(x_1)+U(x_0)=\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_0^2 \tag{8.28}$$

となる。これを整理すると,

$$\frac{1}{2}mv_0^2+U(x_0)=\frac{1}{2}mv_1^2+U(x_1) \tag{8.29}$$

となる。あるいは, 運動エネルギー $T(v)$ を使って書き換えれば,

$$T(v_0)+U(x_0)=T(v_1)+U(x_1) \tag{8.30}$$

となる。これらの式は味わい深い。左辺は質点が x_0 にあるときの, 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和であり, 右辺は質点が x_1 にあるときの, 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和である。これらが等しいということは, つまり,「運動エネルギーとポテン

シャルエネルギーの和」（これを力学的エネルギーという）は運動の始めから終わりまで一定である，ということである（x_0 や x_1 は運動の最中のどこの位置を選んでもよいことに注意せよ）。これを「力学的エネルギー保存則」と呼ぶ。ただし，既に述べたように，仕事とポテンシャルエネルギーの変化がきちんと対応するのは，働く力が「保存力」のときだけだ。摩擦力のような非保存力が働く場合は，仕事とポテンシャルエネルギーの変化が対応しないために，力学的エネルギー保存則が成り立つ保証は無い。まとめると，

力学的エネルギー保存則

保存力だけが働く場合（非保存力が働かない場合），力学的エネルギー（運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和）は運動の初めから終わりまで常に一定である。

● **問** 120

(1)　力学的エネルギーとは何か?
(2)　力学的エネルギー保存則とは何か?
(3)　力学的エネルギー保存則が成り立たないのはどういう場合か?

● **問** 121　鉛直線上を自由落下する質点の運動（空気抵抗無し）を例にとって，力学的エネルギー保存則が成り立つことを確かめよう。問 86 の状況を考える。$t=0$ で $v=0$, $x=0$ とすると，

$$v(t)=-gt \tag{8.31}$$

$$x(t)=-\frac{1}{2}gt^2 \tag{8.32}$$

である。

(1)　時刻 t のときの質点の運動エネルギー T と（重力による）ポテンシャルエネルギー U はそれぞれ，

$$T=\frac{1}{2}mg^2t^2 \tag{8.33}$$

$$U=-\frac{1}{2}mg^2t^2 \tag{8.34}$$

となることを示せ。

(2)　力学的エネルギー保存則を知らなかったことにして，次式が恒等的に成り立つことを示せ：

$$T+U=0 \tag{8.35}$$

● **問** 122　バネにつけられて振動する質点の運動（単振動）を例にとって，力学的エネルギー保存則が成り立つことを確かめよう。前章の図 6.1 の状況を考える。時刻 t での質点の位置と速度をそれぞれ $x(t)$, $v(t)$ とする。$t=0$ で $v=0$, $x=x_0$ とすると，

$$x(t)=x_0\cos\omega t \tag{8.36}$$

である。ここで $\omega=\sqrt{k/m}$ である。

(1)　時刻 t のときの質点の速度 $v(t)$ は次式になることを示せ（ヒント：$x(t)$ を t で微分）：

$$v(t)=-x_0\omega\sin\omega t \tag{8.37}$$

(2)　時刻 t のときの質点の運動エネルギー T と（バネの力による）ポテンシャルエネルギー U はそれぞれ，

$$T=\frac{1}{2}mx_0^2\omega^2\sin^2\omega t \tag{8.38}$$

$$U=\frac{1}{2}kx_0^2\cos^2\omega t \tag{8.39}$$

となることを示せ。ただしポテンシャルエネルギーの基準点として，ばねが自然状態のときの質点の位置（つまり $x=0$）を考える。ヒント：$U=kx^2/2$ の x に $x(t)$ の式を代入。

(3)　力学的エネルギー保存則を知らなかったことにして，次式が恒等的に成り立つことを示せ：

$$T+U=\frac{1}{2}kx_0^2 \tag{8.40}$$

問 121, 問 122 では，力学的エネルギー保存則が成り立った。そうなったのは，これらの問で働く力が保存力だけだったからだ。しかし，以下のように，非保存力が働くような場合は力学的エネルギー保存則は成り立たない（というか適用されない）：

● **問** 123　カーリングの問題，すなわち問 89, 問 118 で，力学的エネルギー保存則が成り立たないことを示せ。成り立たないのはなぜなのだろうか?

8.3　問題の解答の作り方

ところで，物理学の問題で，解答を作るにはルールというかコツがある。それをここで学んでおこう。

例題　某国の弾道ミサイルは，高度 2000 km まで達した後，ほぼ垂直に落下してくる。ミサイルは，地表に到達するときにはどのくらいの速さになると考えられるか? 有効数字 2 桁で答えよ。ただし，ここでは空気抵抗

を無視する。地球の半径を $R = 6400$ km, 重力加速度を $g = 9.8$ m s^{-2} とする。

（解答例）

ミサイルを質点とみなし, 質量を m, 地表近くでの速さを v, 最高到達点の高さを h とする。G を万有引力定数, M を地球質量とする。万有引力によるポテンシャルエネルギーを, 最高到達点と地表のそれぞれで, U_h, U_0 とする。（必要な記号を定義した!)

最高到達点で速さ 0 とすると, 力学的エネルギー保存則から,

$$U_h = U_0 + \frac{1}{2}mv^2, \qquad \text{従って,} \qquad U_h - U_0 = \frac{1}{2}mv^2$$

となる (1)。無限遠を基準点とすると, 万有引力の法則より,

$$U_h = -\frac{GMm}{R+h}, \qquad U_0 = -\frac{GMm}{R} \qquad \text{と書ける。}$$

（必要な法則を, この問題に合わせて書き出した！）[*3]

ここから, $U_h - U_0 = \frac{GMmh}{R(R+h)}$ となる。ところで地表での万有引力は $\frac{GMm}{R^2}$ だが, これはほぼ mg に等しい。従って, $\frac{GM}{R} = gR$。これを使うと, $U_h - U_0 = \frac{gRmh}{R+h}$ となる。これと (1) より, $\frac{gRmh}{R+h} = \frac{mv^2}{2}$。従って, $v^2 = \frac{2ghR}{h+R}$, 従って,

$$v = \sqrt{\frac{2ghR}{h+R}}$$

（値の代入はせずに, 欲しい量をギリギリまで他の記号で表す努力をした！）

これに $R = 6400$ km, $g = 9.8$ m s^{-2}, $h = 2000$ km を代入すると,（ここでようやく一気に代入!)

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 9.8 \text{ m s}^{-2} \times 2000 \text{ km} \times 6400 \text{ km}}{2000 \text{ km} + 6400 \text{ km}}}$$

（単位換算などはせずに, そのまま数値と単位を放り込んだ！）

$$= \sqrt{\frac{2 \times 9.8 \times 2000 \times 6400 \text{ m s}^{-2} \text{ km}^2}{8400 \text{ km}}}$$

（数値は数値, 単位は単位で寄せて整理した。）

$$= \sqrt{\frac{2 \times 9.8 \times 2000 \times 16 \text{ m s}^{-2} \text{ km}}{21}}$$

（数値と単位のそれぞれで, 約分可能なものは約分した。）

$$= \sqrt{\frac{2 \times 9.8 \times 2000 \times 16 \text{ m s}^{-2} \times 10^3 \text{ m}}{21}}$$

（接頭辞 (km の k など）を処理して SI 基本単位に揃えた。）

$$= \sqrt{\frac{2 \times 9.8 \times 2.0 \times 16 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \times 10^6}{21}}$$

（10 のべき乗を整理して位取りを片付けた。単位も再整理。）

$$= \sqrt{\frac{2 \times 9.8 \times 2.0 \times 16}{21}} \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

（10 のべき乗と単位について, 根号の外に出せるものは出した。）

$= 5.5 \times 10^3$ m s^{-1}

（電卓を叩いて数の掛け算と割り算をして根号を外し, 完成!!)

解答のポイント:

- 答案は小さな科学論文。わからないことをぼかしたり印象操作で誤魔化してはダメ（部分点狙いの入試答案とはそこが大きく違う)。
- まず必要な記号を定義する。後から「これも必要だった!」と気づくときに備えて, 多少スペースをとって書くとよい。
- 答えの直前まで, 記号だけの式変形で粘る。値の代入はぎりぎりまで我慢する。
- 上の, $v =$ の後の計算は, 教育的にまわりくどく書いた一例。多少順序が変わったり, 手順を省いたりしても構わない。
- 値を代入するときは**単位も代入**しよう!! まずは素直に与えられた単位で代入し, 後から式の中で単位換算する。
- 数値（有効数字）, 位取り (10 のべき乗), 単位をわけて, それぞれで整理する。ごっちゃにしない。
- 掛け算・割り算の計算は, 最後の最後に一気にまとめて行う。そうすれば有効数字の処理も簡単。
- 答の単位は式変形の結果として自然に出てくる。そうすれば「単位換算のし忘れ」は絶対に起きない。
- 「高さを h [m] とする」のような書き方をする人がいるが, [m] は蛇足である。なぜか? $h = 2000$ km は $h = 2000000$ m と書き換えても構わない。従って「高さを表す記号」で単位まで指定する必然性はない。
- 高校までの参考書等で,「高さを h [m] とする」みたいに書いたり, 単位を式に埋め込まずに数値だけで計算したりするものがあるが, それは科学的に合理的ではない。単位は「その量を数値で表す時」には必要だが,「その量を記号で表す時」は（原則的

[*3]（注: この式は基本法則ではないので答案の中で導出が必要だという考え方もあろう。それについては「正解」は無い。君と読者の間の信頼関係で決まることである。）

に）不要である。なんでもかんでも単位をつければよいというものではない。必要な時につけ, 不要なときにはつけないことが大事。

● **問** 124　夏休みに南の島に行った君は, なぜか筑波大生の勇気を証明するために, バンジージャンプをする羽目になった。深い渓谷の上にかけられた橋から, ゴムバンドが垂れ下がっている。橋から渓谷の底までの高さは 50 m, ゴムバンドの長さ L は 20 m くらいある。ゴムバンドは十分に軽い。ゴムバンドの先端が, 質量 60 kg の君の体につけられたとき, 君の脳裏に, 「こんなにゴムバンドが長ければ, 自分の体は途中で止まらずに渓谷の底に叩きつけられるのではないか? 」という不安がよぎった。

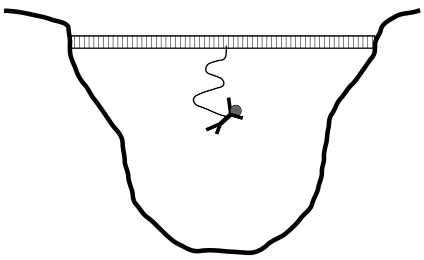

図 8.1　問 124 のバンジージャンプ。

そこで本番前に, 試しに, このゴムバンドを 1.0 m だけ橋から出して, 静かに自分の体を吊り下げてみたら, 0.20 m だけ伸びた。

(1)　この 1.0 m のゴムバンドのバネ定数 k_0 は?

(2)　20 m のゴムバンドは均一の素材・太さであるとすると, 20 m のゴムバンドのバネ定数 k は?

橋から初速度 0 で飛び降りるとき, 君の運動エネルギー T は 0 だ。重力のポテンシャルエネルギー U も 0 であるとする（つまり, 飛び降りる地点を基準点とする）。このとき, 当然ながら力学的エネルギー E_0 は 0 だ。また, 橋から高さ x だけ落ちたとき, 重力のポテンシャルエネルギーは $-mgx$ である。そのときの速度を v とする。

(3)　落下距離 x がゴムバンドの長さ未満のとき, 力学的エネルギー E_1 は,

$$E_1 = \frac{mv^2}{2} - mgx \tag{8.41}$$

であることを示せ。このとき, ゴムバンドには全く力がかかっていないことに注意せよ。

(4)　落下距離 x がゴムバンドの長さを越えたら, 力学的エネルギー E_2 は,

$$E_2 = \frac{mv^2}{2} - mgx + \frac{k(x-L)^2}{2} \tag{8.42}$$

であることを示せ。

(5)　君の体が運よく谷底の手前で停止したとするなら, 停止の瞬間の力学的エネルギー E_3 は

$$E_3 = -mgx + \frac{k(x-L)^2}{2} \tag{8.43}$$

であることを示せ。

(6)　以上を利用し, 力学的エネルギー保存の法則 ($E_0 = E_3$) から, 停止点までの落下距離 x を求めよ。この結果から, 君はこのバンジージャンプを安全と判断するか? （注：実際に実験したいと思った人へ：やめとこう。）

(7)　実際のバンジージャンプのアトラクションでは, 安全のために, 飛ぶ人の体重を事前に測る。なぜか?

8.4　物理学における保存則

力学的エネルギー保存則は保存力だけが関与するような運動に限って成立するが, 実は, 「エネルギー保存則」は, もっと一般的・普遍的な法則である。例えば, 氷上を滑るカーリングのストーンは, 氷とストーンの間の摩擦力（非保存力）の仕事によって, いずれ停止してしまうが, その過程では力学的エネルギーは一定でない。ストーンの運動エネルギーはポテンシャルエネルギーに転換されないのだ。しかし, そのかわりに, ストーンの運動エネルギーは氷とストーンの界面の摩擦によって熱に変わる。熱はエネルギーのひとつの形態だ。そして熱エネルギーとストーンの運動エネルギーの合計は, 運動の最初・途中・最後のどの時点でも一定である。つまり, 力学的エネルギーだけでは一定でないが, 「力学的エネルギー ＋ 熱エネルギー」は一定なのだ。

熱エネルギー以外にも, 化学エネルギーや電気的・磁気的なエネルギーなど, 様々なエネルギーの形態がある。実は質量もエネルギーの形態のひとつだ。ここでは詳述しないが,

$$E = mc^2 \tag{8.44}$$

という式が, 質量とエネルギーの関係を表す（E はエネルギー, m は質量, c は光の速さ）。それらをすべて勘案すれば, エネルギーは決して無くなることはない。

これをエネルギー保存則という。エネルギー保存則は, ニュートン力学だけでなく, 様々な物理法則に対して成り立つ, 普遍的な法則である。

物理学では, エネルギーのように, 様々な複雑な運動や反応の過程で最初から最後まで一定であるような量をとても大切にする。万物流転, 栄枯盛衰の世にあって, 変わらない何かを求めようとするのは人間の普遍的な心理なのかもしれないが, 実際, 自然現象の中には, そのような「総和は変わらない（どこかで減った分はどこかで増えるような）特別な量」（不変量）というものが, いくつか存在する。そのような事実（法則）を「保存則」と呼ぶ。エネルギー保存則はその例だが, それ以外にも, 以下のような例がある（理由や背景は今は理解しなくてもよい。そのようなものがある, ということを頭の片隅に留めておこう）:

- 質量保存則
- 電荷保存則
- 運動量保存則
- 角運動量保存則

ただし, 非保存力が働くときに力学的エネルギー保存則が破れるのと同様に, これら保存則の中には, 条件次第で「破れる」ものもある[*4]。

なぜ物理学では保存則を大切にするのか? それは, 君が勉強を進めて, 保存則の持つ威力を知るに従って, おのずと明らかになるだろう。

● 問 125 自動車の安全運転のために「スピードを控えめに」と言われるが, なぜだろう? ひとつは, 高速での運動は制御が難しいということだ。運転者が危険を察知してからブレーキを踏んだりハンドルを切ったりするまでには時間がかかり, その間にも車は進んでしまうので危険を回避できない。しかしそれだけではない。スピードを控えめにすべき理由を, エネルギー保存則の観点で説明せよ。

● 問 126 原子核崩壊で出る放射線に, α 線, β 線, γ 線というのがある。α 線は ^{4}He（質量数 4 のヘリウム）の原子核（それを α 粒子ともいう）が飛んでくるもの, β 線は電子が飛んでくるもの, そして γ 線は光の一種（ただしとても波長が短い）だ。α 粒子の質量を m_α とし, 電子の質量を m_e とする。

(1) m_α を計算で求めよ。ヒント: 質量数が 4 だから, 1 mol の He の質量は 4 g。^{4}He 原子核は ^{4}He 原子よりも, 電子 2 個ぶん軽いが, その差は無視してよい。

(2) ^{239}Pu（放射性元素プルトニウム 239）の崩壊で発する α 線のエネルギーは, α 粒子 1 個あたり 5.5 MeV である。このときの α 粒子の速さを求めよ。ヒント: MeV ってわからない? M は SI 接頭辞。eV は索引で調べてみよう。

(3) ^{137}Cs（放射性元素セシウム 137）の崩壊で発する β 線のエネルギーは, 電子 1 個あたり 510 keV である。このときの電子の速さを求めよ。なお m_e=9.1×10^{-31} kg である。

ヒント: ここでいう「エネルギー」は運動エネルギーである。

演習問題 13 バネじかけのおもちゃの鉄砲を作った。銃身の中に仕込まれたバネのバネ定数は 40 N/m である。バネを 10 cm だけ縮めて, 4.0 g の砲弾を仕込み, 引き金を引いた。砲弾はどのくらいの速さで鉄砲から飛び出るか? ただし砲身は水平に固定され, バネの質量や, 砲身と砲弾の間の摩擦は無視する。ヒント: バネのポテンシャルエネルギーの式は, 導出せずに使ってよい。

演習問題 14 直径 4.0 mm, 長さ 10 cm の鉄製の釘を, 木材に打ち込む。質量 1.0 kg のハンマーを, 釘の頭から 30 cm だけ高い位置から振り下ろして釘を叩くことを 10 回行ったら, 釘の頭は木の表面まで届いた。このとき, 釘の頭を触ると熱かった。釘の温度は, 当初よりどれだけ上がったか? ただし, ハンマーを振り下ろすとき手は力を加えない（ハンマーの自由落下に任せる）。また, 木の熱伝導率は鉄のそれよりもはるかに小さいので, 生じた熱の全ては釘に蓄えられ, 木には行かないとする。鉄の密度を $\rho = 7.8$ g cm^{-3}, 鉄の比熱を 460 J kg^{-1} K^{-1} とする。

8.5 解答

答 115 式 (8.4) で定義される T のこと（レポートではその式をきちんと書くこと!)。

答 117

[*4] 例えば質量保存則は, 核分裂や核融合等の反応では成り立たない。その過程では質量がエネルギーに変わってしまうのだ。ただし, 質量保存則をエネルギー保存則と組み合わせてしまえば, その場合でも保存則は成り立つ。

(1) 質点が受ける力は一定値 F なので,

$$W_{01}=\int_{x(t_0)}^{x(t_1)}Fdx=\Big[Fx\Big]_{x(t_0)}^{x(t_1)}=F\{x(t_1)-x(t_0)\}$$

(2) $F=ma$ を上の式に代入すればよい。
(3) 式 (8.12) を用いて W_{01} を消去する:

$$\frac{1}{2}mv(t_1)^2-\frac{1}{2}mv(t_0)^2=ma\{x(t_1)-x(t_0)\}$$

両辺を 2 倍して m で割れば, 与式を得る。

答 118 注意：手放されて滑っているストーンにかかる力は, 重力と, 氷面から受ける垂直抗力, そして動摩擦力だ。このうち, 重力と, 氷面から受ける垂直抗力は互いに逆向きで同じ大きさであり, 打ち消しあう。従って, ストーンの運動には, 動摩擦力だけを考えれば良い。

(1) 摩擦力（動摩擦力）はストーンの動く向きと逆方向で, $-F_{\mathrm{m}}$。これを F として問 117(1) の結果に入れれば, 仕事は $-F_{\mathrm{m}}x$。
(2) ストーンが放たれた直後の運動エネルギーは $mv_0^2/2$ であり, 停止時には 0。従って与式が成り立つ。
(3) 式 (8.12) によれば, 小問 (1) の式と小問 (2) の式は互いに等しい。従って与式を得る。
(4) 小問 (3) の結果から,

$$x=\frac{mv_0^2}{2F_{\mathrm{m}}}\tag{8.45}$$

従って, x は v_0^2 に比例する。

答 119

(1) 式 (4.26) で, $R_0=\infty$, $R_1=R$ とすればよい。
(2) 略。
(3) 式 (8.13) より, 式 (8.20) と式 (8.21) が等しい。従って,

$$\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}mv_1^2\tag{8.46}$$

従って,

$$v_1=\sqrt{\frac{2GM}{R}}\tag{8.47}$$

(4) $G=6.67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2},
$M=5.97\times10^{24}$ kg,
$R=6.38\times10^6$ m とすると,
$v_1=1.12\times10^4$ m s^{-1}。これは約 40000 km/h。

注：これを第二宇宙速度という。

答 120

(1) 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和を力学的エネルギーという。
(2) 力学的エネルギーは運動の初めから終わりまで一定である, という法則。ただし, 力は保存力に限る。
(3) 例えば摩擦力は保存力ではないから, 摩擦力が関与する運動では力学的エネルギー保存則は成り立たない。

答 121

(1) 式 (8.4) に式 (8.31) を代入すると, 式 (8.33) を得る。また, 式 (4.41) で, h を x と書き換えると, $U(x)=mgx$ である。この式に式 (8.32) を代入すると, 式 (8.34) を得る。
(2) 式 (8.33) と式 (8.34) の辺々を加えると与式を得る。

答 122

(1) 略（式 (8.36) を t で微分するだけ)。
(2) 式 (8.4) に式 (8.37) を代入すると, 式 (8.38) を得る。また, 式 (4.42) に式 (8.36) を代入すると, 式 (8.39) を得る。
(3) 式 (8.38) と式 (8.39) の辺々を加えると,

$$T+U=\frac{1}{2}mx_0^2\omega^2\sin^2\omega t+\frac{1}{2}kx_0^2\cos^2\omega t$$

ここで, 問題より $\omega=\sqrt{k/m}$ なので, 上の式は,

$$T+U=\frac{1}{2}kx_0^2\sin^2\omega t+\frac{1}{2}kx_0^2\cos^2\omega t$$

となる。これを変形すると,

$$T+U=\frac{1}{2}kx_0^2(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)=\frac{1}{2}kx_0^2$$

となり, 与式を得る。

答 123 ストーンが放たれた直後とストーンが停止したときのそれぞれで, 運動エネルギーは $mv_0^2/2$ と 0 である。一方, ポテンシャルエネルギーは, 摩擦力については存在せず, 重力についてはストーンが放たれた直後とストーンが停止したときで互いに等しい（どちらも水平面にあるから)。従って, 力学的エネルギーは, ストーンが放たれた直後の方が, ストーンが停止したときよりも $mv_0^2/2$ だけ大きい。従って, 力学的エネルギー保存則は成り立たない。それは, ストーンの運動に関与する力が

摩擦力であり, 摩擦力は非保存力であり, 非保存力が関与する場合は力学的エネルギー保存則は成り立たないからである。

答 124 君の質量（体重）を m, 重力加速度を g とする。(1) ゴムバンドの弾性力と重力が釣り合う（合力が 0）から, $-k_0\delta + mg = 0$ である（ここで δ はゴムバンドの伸びで, 0.2 m)。従って,

$$k_0 = \frac{mg}{\delta} = \frac{60 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m s}^{-2}}{0.2 \text{ m}} = 2940 \text{ N/m}$$

(2) バネ定数はバネの長さに反比例する（それがわからない人は問 43 あたりを復習!)。今の場合, ゴムの長さが 20 倍になるから, $k = k_0/20 = 147$ N/m。(3) 運動エネルギーは $mv^2/2$。ポテンシャルエネルギーは, 重力によるもののみであり, $-mgx$。両者の和から, $E_1 = mv^2/2 - mgx$。(4) ゴムバンドの伸びは $x - L$ である。従って, ゴムバンドの弾性力によるポテンシャルエネルギーは $k(x-L)^2/2$。これを前小問の式に加えれば良い。(5) 停止する瞬間は, 速度が 0。従って, 前小問の式で $v = 0$ とすればよい。(6) $E_0 = E_3$ より,

$$0 = -mgx + \frac{k(x-L)^2}{2} \qquad \text{従って,}$$

$$x^2 - 2\Big(L + \frac{mg}{k}\Big)x + L^2 = 0$$

2 次方程式の解の公式から,

$$x = L + \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\frac{2mgL}{k} + \frac{m^2g^2}{k^2}} \tag{8.48}$$

これに適当な数値を代入すれば, x =37.3 m, 10.7 m となる。このうち, 求める解は少なくともゴムバンドの長さ L =20 m 以上のはずなので, 結局, $x = 37.3$ m となる。谷底までの深さは 50 m あるから, 君の体は谷底までは到達しない。従って, このバンジージャンプは（ゴムがぶちっと切れたりしない限り）安全だろう。

答 125 高速で運動する物体の運動エネルギーは大きい。運動エネルギーは速度の 2 乗に比例するので, 例えば 40 km/h と 60 km/h では速さは 1.5 倍だが, 運動エネルギーは $1.5^2 = 2.25$ 倍にもなる。そして, 事故で急停止したときは, エネルギー保存則のために, その運動エネルギーは車や搭乗者の身体の破壊に使われる。「事故ったときのダメージを小さくする」ためにも, スピードは控えめにすべきであり, また, 高速で運転するときほど, 事故の可能性を（低速での運転時よりも）減らすように心がけるべきなのだ。

答 126

(1) $m_\alpha = 4 \text{ g}/(6.0 \times 10^{23}) = \cdots = 6.7 \times 10^{-27}$ kg。
(2) α 線のエネルギーを E, 速さを v とすると, $\frac{1}{2}m_\alpha v^2 = E$。従って, $v = \sqrt{2E/m_\alpha} = \cdots = 1.6 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$。
(3) β 線のエネルギーを E, 速さを v とすると, 上と同様に, 従って, $v = \sqrt{2E/m_\mathrm{e}} = \cdots = 4.2\times10^8 \text{ m s}^{-1}$。ところが, これは光速 $c = 299792458$ m/s より大きい! 世の中には光より速く動くものは無いということがアインシュタインの特殊相対性理論で明らかにされている。従って, この結果はおかしい。このくらい速い運動になると, Newton 力学は通用しない。特殊相対性理論を使って計算し直すと（その詳細は今はわからなくてよい）, $v = 2.6 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ となる。

注: eV を J に直して計算しないと, 正しい答にはならない。単位を埋め込んで計算すれば, それに気がつくはず!

よくある質問 147 なぜカーリングのときに U が 0 になるのですか? ... まず摩擦力は非保存力なので U は無い。また, ストーンは水平方向に動くので重力のする仕事は 0。したがって, U の変化は 0。したがって, もし重力による U をストーンの出発点で 0 と置けば, U は氷面上のどこに行っても 0。

よくある質問 148 「示せ」という問題は数式だけでなく言葉（文章）も使って説明するのですか? 言葉での説明が苦手です。 ... はい, 適宜, 言葉（文章）でストーリーを組み立てることが必要です。そのためには, まず言葉の定義をしっかり把握しましょう。そして言葉を正確に使いながら, 自分自身が読んで納得できるような説明を組み立ててみましょう。

よくある質問 149 自分の書いた説明・証明が正解なのかわかりません。 ... そう思うならまだ「正解」ではありません。たとえ他の人が「正解です！」と言ってくれたとしても, 自分自身が納得しない限り, それは正解ではないのです。

よくある質問 150 自分の答が正しいかどうかは, よくわかった人に判定してもらうしかないんじゃないですか? ... もちろん他の人の目で見てもらうことも大事です。でないと独りよがりになってしまいますからね。でも, その人が正しいという保証もありません。どんな優秀・高名で権威のある科学者で

も, 間違えるときはあります。その人があなたの答を正しいと言ってもあなたは単純に喜ぶべきではないし, 間違いだと言ってもすぐに凹む必要はありません。科学は, それぞれの参加者が自分なりの正しさを追求し, 互いに対等な立場で自論をぶつけ合うのです。あなたはそれに参加するために, 自分なりの正しさを持つべきなのです。

よくある質問 151　**じゃあ, 「正しい」ってどういうことなのですか**? ... とても良い質問であり, 難しい質問です。時間をかけて自分なりに考えてみて下さい。それだけの価値のある問です。少なくとも, 「権威のある誰かの発言」が正しい, というものではないと私は思います。

よくある質問 152　**じゃあ, 入試の正解・不正解はどうやって保証されるのですか**? ... 入試にだって, 正解・不正解にそんなにちゃんとした保証はありませんよ。実際, 毎年, 入試問題の不備が指摘されて新聞記事になったりするじゃないですか。指摘されない・気づかれないだけで, ツッコミどころのある微妙な問題はたくさんあると思います。スポーツの判定もそうでしょ? 微妙な判定や誤審はよくあるじゃないですか。だからテストは運や偶然にも左右されるものであり, 完璧に実施できるものではないと私は思います。

よくある質問 153　**でも, 志望校に入るために必死で勉強する受験生にとってはシリアスなことですよ**... もちろんそれはそうです。でも, だからといってテストに完璧・無謬を求めるのは非現実的なのです。微妙な採点の揺れやミスを排除しようとすれば, 記述式ではなく選択式の問題が増えるでしょう。でもそれでは学力評価としては偏ってしまうから記述式を増やせと言われる。そうしたら, 複数の採点者で徹底的に時間をかけて作問と採点をするしかありません。その人件費を考えたら, 受験料が何倍にもなりかねないし, 大学の教員は入試の問題作成と採点に追われて, 肝心の学生の教育や研究ができなくなってしまい, 大学の水準は落ちてしまいますよ。

確かに受験生にとっては, テストは人生のかかる大きなものです。でも, スポーツの試合もそうですよね。オリンピックやワールドカップのように, 4 年に 1 回の大舞台で, 誤審や理不尽な条件で, 実力を出しきれずに終わる人はたくさんいます。人が人を評価したり判定することには, 理不尽さは必ず残るのです。

第9章

運動量保存則

前章で学んだ「力学的エネルギー保存則」は, うまく使えば, 運動方程式を解くことをせずに, 多くのことが簡単にわかる。しかしあの法則にも弱点がある。ひとつは, 摩擦力などの非保存力が働いてたら使えないということ。もうひとつは, 物体の運動の「速さ」は教えてくれても「方向」は教えてくれないことである。

そこで, それらを補ってくれるような, もうひとつの保存則をここでは学ぶ。それは「運動量保存則」である。この法則もいくつか弱点があるが, 力学的エネルギー保存則が使えない時にも使える（ことがある）し, 力学的エネルギー保存則と組み合わせることができれば, さらに威力を発揮する。

特に強力なのは, 複数の物体どうしが衝突するような状況である。

9.1　運動量保存則はどう便利なのか?

図 9.1 のような, 2 つの物体 A, B が近づいてきて衝突し, 一体化する運動を考える。衝突の前後ではこれらを質点とみなそう。A, B それぞれの質量を $m_\mathrm{A}, m_\mathrm{B}$ とする。話を簡単にするため, いずれの質点にも重力などの外力（2 つの質点どうしが及ぼし合う力以外の力）は働いていないとする（無重力空間での運動を想像しよう）。

時刻 t_0 のとき（衝突前）, A, B はそれぞれ速度 $\mathbf{v}_\mathrm{A}, \mathbf{v}_\mathrm{B}$ で xy 平面上を別の方向に等速度運動しているとしよう。時刻 t_1 に 2 つは衝突して合体する。そして時刻 t_2 では（衝突後）, 合体した物体が新たな方向に速度 $\mathbf{v}$ で進んでいるとしよう。この速度 $\mathbf{v}$ を求めよ, と言われたらどうすればよいだろう?

極微の世界や高速の世界を除けば, どんな運動も運動方程式に従うので, この件も運動方程式を解けば完璧に予測・解明できるはずだ。しかし, この件に関しては, 運動方程式を正面から解くのは難しい。というのも, そもそも「衝突して合体」は, 時刻 t_1 の「瞬間」で起きるのではなく, 衝突が始まって物体が徐々につぶれて, その

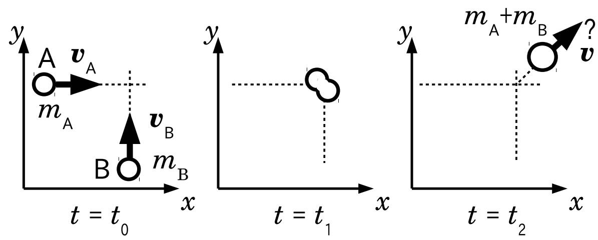

図 9.1　2 つの物体の衝突合体

間, 弾性力や摩擦力が複雑に働き, やがてお互いがくっつきあって一体化するまで, 短い時間だが複雑な現象が起きるのだ（その間は物体 A, B の「大きさ」とか「変形」が重要なので, A, B を質点とみなすことはできない）。その各時刻に, 2 つの物体の間にどのように力が働くのかを解明するのは大変難しい作業だ。

というわけで, この時刻 t_1 付近で起きる「衝突して合体」という複雑な現象（物体を質点とみなすことのできない現象）を運動方程式で直接扱うことは避けたい。君子危うきに近寄らず, と言うではないか。

そこで有用なのが, これから学ぶ, 以下の法則である:

> **運動量保存則**
>
> 外力が働かない質点系では, 全運動量は不変である。

外力はさきほども出てきた言葉だが, 考察の対象になっている物体どうしに働く力（それを内力という）以外の力だ。本件でも外力は働いていない[*1]。質点系とは, 1.11 節で学んだように, 複数の質点からなる系である。全運動量とは, 各質点の運動量を全部足したもの（ベク

[*1] 衝突して合体するまでに生じる複雑な力は, 具体的にその力がどんなものなのかというのは置いといて, 「考察の対象になっている物体どうしに働く力」なので内力である。

トルとしての足し算）である。運動量とは, 式 (5.47) で定義されたように, 質量と速度の積である。

この法則がなぜ成り立つかは, 後で説明するとして, とりあえずこの法則が正しいと信じてみよう。本件では, 時刻 t_0（つまり衝突前）の全運動量は,

$$m_\mathrm{A}\mathbf{v}_\mathrm{A}+m_\mathrm{B}\mathbf{v}_\mathrm{B} \tag{9.1}$$

である。ここで, 添字の A, B は, それぞれ質点 A, 質点 B の属性であることを示す。時刻 t_2（つまり衝突後）では質点はひとつに合体しており, その運動量は,

$$(m_\mathrm{A}+m_\mathrm{B})\mathbf{v} \tag{9.2}$$

である。運動量保存則は, 式 (9.1) と式 (9.2) が等しい, と主張するのだ。すなわち,

$$m_\mathrm{A}\mathbf{v}_\mathrm{A}+m_\mathrm{B}\mathbf{v}_\mathrm{B}=(m_\mathrm{A}+m_\mathrm{B})\mathbf{v} \tag{9.3}$$

が成り立つはずだ。それを認めるなら,

$$\mathbf{v}=\frac{m_\mathrm{A}\mathbf{v}_\mathrm{A}+m_\mathrm{B}\mathbf{v}_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}+m_\mathrm{B}} \tag{9.4}$$

となって, 衝突・合体後の質点の速度が求まる。実際, 実験してみると, 確かにこうなるのだ。

● **問** 127　図 9.1 の問題において, $m_\mathrm{A}=m_\mathrm{B}=1.0\ \mathrm{kg}$ とし, 時刻 t_0 で A は x 軸方向に $1.0\ \mathrm{m\ s^{-1}}$, B は y 軸方向に $1.0\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ で動いているとする。

(1)　衝突合体後の速度 $\mathbf{v}$ を求めよ。

(2)　$|\mathbf{v}|$ を求めよ。

9.2　**運動量保存則の証明**: 1 **つの質点バージョン**

では, 運動量保存則を証明しよう。とりあえず, 1 つの質点について考える。まず運動方程式に戻る（運動の話は全て運動方程式から始まるのだ!)。質量 m の質点が力 $\mathbf{F}$ を受けて運動しているとき, その運動は, どんなものでも以下の運動方程式に従う：

$$\mathbf{F}=m\mathbf{a}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \tag{9.5}$$

t は時刻である。$\mathbf{r},\mathbf{v},\mathbf{a}$ はそれぞれ, 質点の位置, 速度, 加速度。さて, 式 (9.5) は, 以下のように書ける：

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F} \tag{9.6}$$

両辺に dt をかけると次式になる:

$$m\,d\mathbf{v}=\mathbf{F}\,dt \tag{9.7}$$

これを時刻 $t=t_0$ から時刻 $t=t_1$ まで t で積分すれば,

$$\int_{\mathbf{v}(t_0)}^{\mathbf{v}(t_1)} m\,d\mathbf{v}=\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{F}\,dt \tag{9.8}$$

となる（わからない人は積分の定義に戻って考えよう）。左辺は,

$$\Big[m\mathbf{v}\Big]_{\mathbf{v}(t_0)}^{\mathbf{v}(t_1)}=m\mathbf{v}(t_1)-m\mathbf{v}(t_0) \tag{9.9}$$

となるから, 式 (9.8) は,

$$m\mathbf{v}(t_1)-m\mathbf{v}(t_0)=\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{F}\,dt \tag{9.10}$$

となる。この式の左辺は「時刻 t_0 から t_1 の間に運動量がどれだけ変わったか」だ。一方, 右辺は以下で定義される力積（りきせき, と読む）という量である:

力積の定義

時刻を t とする。質点に, 力 $\mathbf{F}(t)$ が働くとき,

$$\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{F}\,dt \tag{9.11}$$

を, 時刻 t_0 から t_1 までに質点に働く力積と呼ぶ。

● **問** 128　力積の定義を 5 回書いて記憶せよ。

すなわち, 式 (9.10) は, 「1 **つの質点の運動量の変化は, 受けた力積に等しい**」と解釈できる。これが 1 つの質点に関する運動量保存則である。そして, この法則をもとに, 質点系の運動量保存則が証明される。

よくある質問 154　**第** 8 **章で学んだ「運動エネルギーの変化は仕事に等しい」という「力学的エネルギー保存則」に似てますね...** 似てるけど違います。両者の違いをきちんと認識しよう。運動エネルギーや仕事は**スカラー**ですが, 運動量や力積は**ベクトル**です。力学的エネルギー保存則は運動方程式を**位置で**積分して得られますが, 運動量保存則は運動方程式を**時刻で**積分することで得られたのです。

9.3　**運動量保存則**: 2 **つの質点バージョン**

次に, 2 つの質点からなる質点系について運動量保存則を証明する。

2 つの質点 A, B が互いに力を及ぼし合いつつ時刻

$t = t_0$ から時刻 $t = t_1$ まで運動する状況を考えよう。質点 A にかかる力 $\mathbf{F}_\mathrm{A}$ は, 質点 B から受ける力（内力）と, 外部から受ける力（外力）の和である：

$$\mathbf{F}_\mathrm{A} = \mathbf{F}_\mathrm{AB} + \mathbf{F}_\mathrm{A}^\mathrm{e} \tag{9.12}$$

ここで $\mathbf{F}_\mathrm{AB}$ は質点 A が質点 B から受ける力とし, $\mathbf{F}_\mathrm{A}^\mathrm{e}$ は質点 A が受ける外力とする（e は external 外部の頭文字)。同様に, 質点 B にかかる力 $\mathbf{F}_\mathrm{B}$ は, 次式のようになる:

$$\mathbf{F}_\mathrm{B} = \mathbf{F}_\mathrm{BA} + \mathbf{F}_\mathrm{B}^\mathrm{e} \tag{9.13}$$

ここで $\mathbf{F}_\mathrm{BA}$ は質点 B が質点 A から受ける力, $\mathbf{F}_\mathrm{B}^\mathrm{e}$ は質点 B が受ける外力とする。

さて, 各質点に関して, 式 (9.10) と同様の式が成り立つはずだ:

$$m_\mathrm{A}\mathbf{v}_\mathrm{A}(t_1) - m_\mathrm{A}\mathbf{v}_\mathrm{A}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_\mathrm{A} dt \tag{9.14}$$

$$m_\mathrm{B}\mathbf{v}_\mathrm{B}(t_1) - m_\mathrm{B}\mathbf{v}_\mathrm{B}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_\mathrm{B} dt \tag{9.15}$$

これらを辺々足し合わせると,

$$\begin{aligned} &m_\mathrm{A}\mathbf{v}_\mathrm{A}(t_1) + m_\mathrm{B}\mathbf{v}_\mathrm{B}(t_1) - m_\mathrm{A}\mathbf{v}_\mathrm{A}(t_0) - m_\mathrm{B}\mathbf{v}_\mathrm{B}(t_0) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_\mathrm{A} dt + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_\mathrm{B} dt = \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{F}_\mathrm{A} + \mathbf{F}_\mathrm{B})\, dt \end{aligned} \tag{9.16}$$

となる。ここで最後の式の積分の中は, 式 (9.12), 式 (9.13) を使うと,

$$\mathbf{F}_\mathrm{A} + \mathbf{F}_\mathrm{B} = \mathbf{F}_\mathrm{AB} + \mathbf{F}_\mathrm{BA} + \mathbf{F}_\mathrm{A}^\mathrm{e} + \mathbf{F}_\mathrm{B}^\mathrm{e} \tag{9.17}$$

となる。ところが作用反作用の法則から, $\mathbf{F}_\mathrm{AB} = -\mathbf{F}_\mathrm{BA}$ である。従って, 式 (9.17) の右辺の中の $\mathbf{F}_\mathrm{AB} + \mathbf{F}_\mathrm{BA}$ は $\mathbf{0}$ である。それも用いて, 式 (9.16) を書き換えると,

$$\begin{aligned} &m_\mathrm{A}\mathbf{v}_\mathrm{A}(t_1) + m_\mathrm{B}\mathbf{v}_\mathrm{B}(t_1) - (m_\mathrm{A}\mathbf{v}_\mathrm{A}(t_0) + m_\mathrm{B}\mathbf{v}_\mathrm{B}(t_0)) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{F}_\mathrm{A}^\mathrm{e} + \mathbf{F}_\mathrm{B}^\mathrm{e})\, dt \end{aligned} \tag{9.18}$$

となる。右辺は,「質点 A, 質点 B のそれぞれに働く外力の総和」を時刻で積分したもの, つまり,「外力の総和による力積」である。従って, この式は,「2 つの質点の運動量の和は, 外力の総和による力積のぶんだけ変化する」と解釈できる。特に, 外力が働いていないときは,「外力の総和による力積」は $\mathbf{0}$ である。従って,「2 つの質点が, 外力を受けずに運動する場合, 全運動量は不変である」ということが示された。(3 つ以上の質点の場合の証明は, 後で述べる)。

● **問** 129　2 つの質点 A, B が, x 軸上を互いに逆向きに等速度運動で運動し, 接近し, いずれ衝突する。質点 A, B の質量はそれぞれ 2.0 kg と 3.0 kg であり, 衝突前の質点 A, B の速度はそれぞれ -4.0 m s^{-1}, 5.0 m s^{-1} である。衝突後, 2 つの質点はくっついて 1 つの質点になる場合, 衝突後のこの質点の速度を求めよ。ただし, 外力は働いていないものとする。ヒント: この場合, 2 つの質点の全運動量は不変。

9.4　重心を考えると簡単になる

本章で扱っているような, 複数の質点（質点系）の運動は, 重心というものを考えるとシンプルになる。そのことを説明しよう。

まず, 重心を定義しよう: n 個の質点について,

$$\mathbf{R} := \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots + m_k\mathbf{r}_k + \cdots + m_n\mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_k + \cdots + m_n} \tag{9.19}$$

を位置ベクトルにとるような点を<u>重心</u>という（定義)。ここで, m_k は k 番目の質点の質量, $\mathbf{r}_k$ は k 番目の質点の位置ベクトルである。要するに, 各質点の位置を, 質点の質量で重み付けして平均したものが重心である。

これを使って, 前節で述べた 2 質点系の運動量保存則を表現してみよう。まず, 2 つの質点（質点 A, 質点 B と呼ぶ）の重心を $\mathbf{R}$ とすると, 式 (9.19) から

$$\mathbf{R} := \frac{m_\mathrm{A}\mathbf{r}_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}\mathbf{r}_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}} \tag{9.20}$$

である。$\mathbf{r}_\mathrm{A}$, $\mathbf{r}_\mathrm{B}$ は質点 A, B のそれぞれの位置ベクトルだ。式 (9.20) の両辺を時刻 t で微分すると,

$$\mathbf{R}' = \frac{m_\mathrm{A}\mathbf{r}'_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}\mathbf{r}'_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}} \tag{9.21}$$

となる。ここで, 位置を時刻で微分すると速度だから, $\mathbf{r}'_\mathrm{A} = \mathbf{v}_\mathrm{A}$, $\mathbf{r}'_\mathrm{B} = \mathbf{v}_\mathrm{B}$ である。また, 重心の位置を時刻で微分したもの（つまり重心の速度）を $\mathbf{V}$ とする。すると式 (9.21) は,

$$\mathbf{V} = \frac{m_\mathrm{A}\mathbf{v}_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}\mathbf{v}_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}} \tag{9.22}$$

となる。ここで右辺の分母は 2 つの質点の質量の合計, つまり質点系の全質量である。それを M と書こう:

$$M := m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B} \tag{9.23}$$

そして, 式 (9.22) の両辺に M を掛けて左右を入れ替え

ると,

$$m_\mathrm{A}\mathbf{v}_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}\mathbf{v}_\mathrm{B} = M\mathbf{V} \tag{9.24}$$

となる。左辺は 2 つの質点の運動量の合計, つまり質点系の全運動量である。一方, 右辺は「質点系の全質量 M」と「重心の速度 $\mathbf{V}$」の積, つまり, 全質量があたかも重心に集中して存在するような（仮想的な）質点の運動量である。これを「重心の運動量」と呼ぼう。ぶっちゃけ言えば, 全運動量は, 重心の運動量に等しいのだ。

これを使うと, 式 (9.18) は次式のように書ける:

$$M\mathbf{V}(t_1) - M\mathbf{V}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{F}^\mathrm{e}_\mathrm{A} + \mathbf{F}^\mathrm{e}_\mathrm{B})\, dt \tag{9.25}$$

つまり, 「重心の運動量（$M\mathbf{V}$）は, 外力の総和による力積のぶんだけ変化する。特に, 外力が無い場合は式 (9.58) の右辺が $\mathbf{0}$ なので, $M\mathbf{V}(t_1) = M\mathbf{V}(t_0)$ となり, 重心の運動量（$M\mathbf{V}$）は不変である。ところが, 全質量 M は普通, 不変なので, 結局, 「外力が無い場合は重心の速度（$\mathbf{V}$）は不変である（重心は等速度運動をする）」と言える。

例 9.1 本章の冒頭で, 2 つの質点の衝突・合体について考えた。衝突・合体後の速度は式 (9.4) で求めることができた。なんとこれは, 式 (9.22) の右辺と同じ, つまり衝突前の 2 つの質点の, 重心の速度ではないか!! そして, 衝突後は 2 つの質点はこの速度 $\mathbf{v}$ で一緒に動くのだから, その重心の速度もこの $\mathbf{v}$ に等しい[*2]。従って, 衝突合体の前と後で, たしかに重心の速度は不変である!

● **問** 130 式 (9.58) の導出を再現せよ。

9.5 衝突のときエネルギーはどうなるのか?

「よくある質問 154」で述べたように, この運動量保存則は第 8 章で学んだ力学的エネルギー保存則になんとなく似ているが違う法則である。それらはどういう関係にあるのだろうか? そこで, 以下の問を考えよう：

● **問** 131 問 127 の続きを考える。

(1) 衝突前の運動エネルギーの総和を求めよ。
(2) 衝突合体後の運動エネルギーを求めよ。

この現象では, 衝突合体で運動エネルギーが減ってしまった。では, この減ったぶんのエネルギーはどこに行ってしまったのだろう?

まず考えられるのは, ポテンシャルエネルギーである。力学的エネルギー保存則では, 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの総和は一定なのだから, 運動エネルギーが減った分, ポテンシャルエネルギーが増えていれば, つじつまは合う。

しかし, その考え方はうまくないのだ。まず, 問題設定で, 質点には外力は働いていないとした。従って, 外力によるポテンシャルエネルギーはそもそも存在しない（どこに基準点を設けても, そしてそこからどの点に移動するにしても, 仕事は 0 であるので）。

仮に外力が働いているような場合も, 衝突の短い瞬間だけに注目すると, 物体の運動は小さい空間領域で発生するので, 外力による仕事はほとんど無視できる (仕事＝力 × 変位の「変位」が小さいから!)。従って, 外力がある場合でも, 衝突の前後で外力によるポテンシャルエネルギーの変化はほぼ 0 だ。従って, 外力があろうがなかろうが, 衝突の前後でポテンシャルエネルギーは変化しない。

ならば外力以外の力によるポテンシャルエネルギーはどうだろう? 例えば, ボールどうしが衝突するとき, ボールは変形する。その変形は, ボールを構成する各部分の弾性力に逆らって行われる（仕事がされる）ものなので, 弾性力によるポテンシャルエネルギーを増加させる。しかもこの変形は, 衝突終了後も, ボールをぐにゃぐにゃと振動させることによって継続する。弾性力によるポテンシャルエネルギーは, この振動の運動エネルギーにも転化するだろう。

そのような振動は, やがて収まるだろう。それは, ボール内部の摩擦によるものである。そのとき, 振動のエネルギーは, 最終的にはボールの温度を上げる熱エネルギーとなるだろう。

このように, 衝突の際に減った運動エネルギーは, 物体内部の振動のエネルギーや熱になるのである。

このようなことのない衝突, すなわち, 衝突によって全運動エネルギーが変化しない（減らない）ような衝突を, 弾性衝突とか, 完全弾性衝突という。弾性衝突でない衝突現象（全運動エネルギーが減る衝突）を, 非弾性衝突という。上の例は, 非弾性衝突である。

よくある間違い 6 **弾性衝突を「エネルギーが減らない衝突」のことだと思っている**... 定義としては間違いです。弾性衝突であろうが非弾性衝突であろうがそれら以外の現象であろう

*2 $(m_\mathrm{A}\mathbf{v} + m_\mathrm{B}\mathbf{v})/(m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}) = \mathbf{v}$

が, 世の中のありとあらゆる現象では, 熱エネルギーを含む**ありとあらゆる形のエネルギーの全て**を考えれば, エネルギーは失われません。定義は, その概念を他と区別するために必要十分な特徴・性質を述べねばなりませんから, これは弾性衝突の定義としては不十分です。だから「エネルギーが」ではなく「全運動エネルギーが」なのです。

よくある間違い 7　弾性衝突を「運動量が減らない衝突」のことだと思っている... いろいろ微妙な点があります。まず「運動量」でなくて「全運動量」です。でないと, どの質点の運動量のことですか? ってなってしまう。また, 運動量はベクトルですので, 減る・減らないというようなものではありません(たとえば向きが逆になるのは「減る」ですか?)。そして, 弾性衝突では全運動量は不変ですが, それは弾性衝突に限ったことではなく, 非弾性衝突でも全運動量は不変です。

よくある質問 155　それ, 最後はなんか揚げ足のような気がしました。弾性衝突は全運動量が不変な衝突ではないのですか? ... 以下のような 3 つの文章を考えてみましょう:

1. 弾性衝突は全運動量が不変な衝突である。
2. 弾性衝突は全運動量が不変な衝突のことである。
3. 弾性衝突とは全運動量が不変な衝突である。

このうち, 1 は正しいですが, 2 と 3 は間違いです。「のこと」や「とは」という語は定義を意味します。

● **問** 132　弾性衝突とは何か?

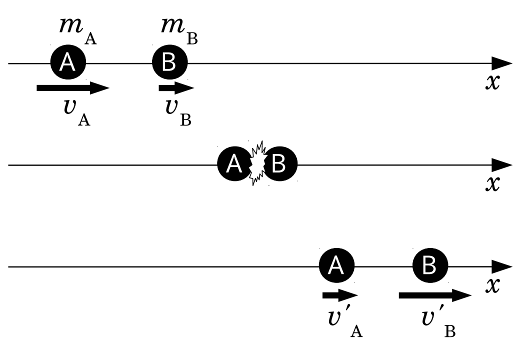

図 9.2　1 直線上を運動する 2 つの質点どうしの衝突。上: 衝突前, 中: 衝突の瞬間, 下: 衝突後

● **問** 133　x 軸上で, 2 つの質点 A, B が, それぞれ速度 v_{A}, v_{B} で運動し（図 9.2 上）, やがて互いに弾性衝突を起こし（図 9.2 中）, 衝突後はそれぞれ速度 v'_{A}, v'_{B} で（ここではダッシュ' は微分ではなく, 「衝突後」を表すしるし）, 再び x 軸上で運動をする（図 9.2 下）。質点 A, B のそれぞれの質量を m_{A}, m_{B} とする。2 つの質点に外力は働いておらず, 2 つの質点どうしに働く力（内力）は衝突時だけに働くとする。

(1) 運動量保存則と力学的エネルギー保存則より, 以下の 2 つの式が成り立つことを示せ:

$$m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B}} = m_{\mathrm{A}}v'_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}v'_{\mathrm{B}} \tag{9.26}$$

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A}}^2 + \frac{1}{2}m_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B}}^2 = \frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}{v'_{\mathrm{A}}}^2 + \frac{1}{2}m_{\mathrm{B}}{v'_{\mathrm{B}}}^2 \tag{9.27}$$

(2) 式 (9.26), 式 (9.27) から次式を示せ:

$$m_{\mathrm{A}}(v'_{\mathrm{A}} - v_{\mathrm{A}}) = -m_{\mathrm{B}}(v'_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{B}}) \tag{9.28}$$

$$m_{\mathrm{A}}({v'_{\mathrm{A}}}^2 - v_{\mathrm{A}}^2) = -m_{\mathrm{B}}({v'_{\mathrm{B}}}^2 - v_{\mathrm{B}}^2) \tag{9.29}$$

(3) 式 (9.29) から次式を示せ:

$$m_{\mathrm{A}}(v'_{\mathrm{A}} - v_{\mathrm{A}})(v'_{\mathrm{A}} + v_{\mathrm{A}}) = -m_{\mathrm{B}}(v'_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{B}})(v'_{\mathrm{B}} + v_{\mathrm{B}}) \tag{9.30}$$

(4) 式 (9.30) の両辺を式 (9.28) で割って次式を示せ:

$$v'_{\mathrm{A}} + v_{\mathrm{A}} = v'_{\mathrm{B}} + v_{\mathrm{B}} \tag{9.31}$$

(5) 式 (9.31) を変形して次式を示せ:

$$v'_{\mathrm{B}} - v'_{\mathrm{A}} = -(v_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{A}}) \tag{9.32}$$

(6) 式 (9.32) を変形して次式を示せ:

$$\frac{|v'_{\mathrm{B}} - v'_{\mathrm{A}}|}{|v_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{A}}|} = 1 \tag{9.33}$$

式 (9.32) によって, 衝突の前と後で相対速度は, 向きが逆になることがわかった。つまり, 衝突前には互いに近づいて来たが, 衝突後では互いに遠ざかっていく。これは直感にも合う。

衝突後の相対速度の大きさ $|v'_{\mathrm{B}} - v'_{\mathrm{A}}|$ を, 衝突前の相対速度の大きさ $|v_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{A}}|$ で割ったものを反発係数とか跳ね返り係数と呼び, 慣習的には e と表す。すなわち,

$$e = \frac{|v'_{\mathrm{B}} - v'_{\mathrm{A}}|}{|v_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{A}}|} \tag{9.34}$$

である。弾性衝突では, 式 (9.33) からわかるように, $e = 1$ である。非弾性衝突では, e は 0 から 1 の間の値をとる。$e = 0$ は, 物体 B が物体 A にべちゃっとくっついてしまう場合だ。例えばゴルフボールとゴルフクラブの衝突に関する反発係数は 0.8 程度である。

よくある質問 156　e って, ネイピア数（自然対数の底）じゃないんですか? ... 記号がかぶってて, 紛らわしいけど, ここでは違います。e は反発係数で, 0 から 1 までの間の値をとります。ネイピア数は $e = 2.718\cdots$ だもんね。

● **問** 134　問 133 の続きを考える。

(1)　式 (9.31) を使って, 式 (9.28) から v'_B を消去することによって次式を示せ:

$$v'_\mathrm{A}=\frac{m_\mathrm{A}-m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}+m_\mathrm{B}}v_\mathrm{A}+\frac{2m_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A}+m_\mathrm{B}}v_\mathrm{B} \tag{9.35}$$

(2)　式 (9.31) を使って, 式 (9.28) から v'_A を消去することによって次式を示せ:

$$v'_\mathrm{B}=\frac{m_\mathrm{B}-m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{A}+m_\mathrm{B}}v_\mathrm{B}+\frac{2m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{A}+m_\mathrm{B}}v_\mathrm{A} \tag{9.36}$$

(3)　$m_\mathrm{A}=m_\mathrm{B}$ のとき, 次式を示せ:

$$v'_\mathrm{A}=v_\mathrm{B} \tag{9.37}$$
$$v'_\mathrm{B}=v_\mathrm{A} \tag{9.38}$$

(4)　$m_\mathrm{A}>>m_\mathrm{B}$ のとき, 次式を示せ:

$$v'_\mathrm{A}\fallingdotseq v_\mathrm{A} \tag{9.39}$$
$$v'_\mathrm{B}\fallingdotseq -v_\mathrm{B}+2v_\mathrm{A} \tag{9.40}$$

式 (9.37), 式 (9.38) から, 2 つの質点の質量が等しければ, 弾性衝突によって速度が入れ替わる（図 9.3）, ということがわかった。すなわち, 追いついた方は追いつかれた方の速度になり, 追いつかれた方は追いついた方の速度になる。この極端な場合は, 片方が静止してもう片方がぶつかってくる場合だ。ぶつかってきた方は衝突後に静止し, ぶつかられた方がすっとんでいく。ビリヤードの経験がある人は, それを知っているだろう。

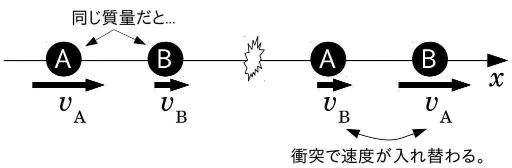

図 9.3　同一直線上を等速度運動する 2 つの質点どうしの衝突。質量が等しく, なおかつ弾性衝突なら, 速度が入れ替わる。

ところで, 式 (9.39), 式 (9.40) から, 片方の質量が極端に大きいときは, 大きい方はほとんど速度を変えず（痛くも痒くもない）, 小さい方は激しく速度を変える（ふっとばされる）, ということがわかった（図 9.4）。小さな軽自動車と大きなトラックの衝突事故で, 軽自動車に乗っていた人の方がダメージが大きいのはそのためだ。

● **問** 135　ボールを高さ h_0 から初速度 0 で真下に落として, バウンドさせる。ボールと地面の間の反発係数を e としよう。空気抵抗やボールの回転は無視する。地面の動きも無視する（地球はボールより遥かに大きいので）。

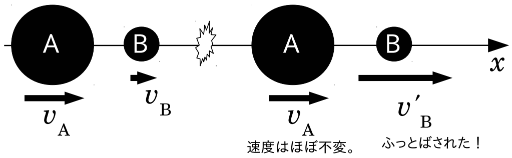

図 9.4　同一直線上を等速度運動する 2 つの質点どうしの衝突。片方が極端に大きいときは, 小さいほうがふっとばされる。

(1) ボールが地面につく直前の速度を v_0 とする。力学的エネルギー保存則から次式を示せ：

$$v_0^2=2gh_0 \tag{9.41}$$

(2) ボールが地面で跳ね返った直後の速度を v_1 とする。次式を示せ：

$$|v_1|=e|v_0| \tag{9.42}$$

(3) ボールは地面で跳ね返ったあと上向きに運動し, いずれある点（それを到達点と呼ぼう）に達してまた落ち始める。そのときの到達点の高さを h_1 として, 次式を示せ：

$$v_1^2=2gh_1 \tag{9.43}$$

(4) 次式を示せ：

$$h_1=e^2h_0 \tag{9.44}$$

(5) そのまま放っておけば, またボールは地面に衝突して跳ね返り, また落ちて地面に衝突して跳ね返り, ... ということを繰り返すだろう。n を 1 以上の整数として, ボールが n 回バウンドしたあとの到達点の高さを h_n とすると, 次式を示せ：

$$h_n=e^{2n}h_0 \tag{9.45}$$

(6) $e=0.8$, $h_0=10$ m のとき, 到達点の高さが 0.1 m 以下になるまでに, 何回バウンドするか?

● **問** 136　2 つのボールを, わずかに隙間をあけて縦に重ねて, 高さ h から（初速度 0 で）真下の地面に落とし, バウンドさせる。下のボールを「ボール A」とし, その質量を m_A とする。上のボールを「ボール B」とし, 質量を m_B とする。ボール B はボール A よりはるかに小さく, $m_\mathrm{A}>>m_\mathrm{B}$ とする。ボール A と地面の衝突や,

ボール A とボール B の衝突は弾性衝突であるとする。重力加速度を g とする。上向きに座標軸をとる。

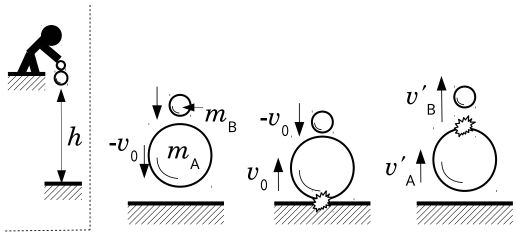

図 9.5　2 段のボールの落下と跳ね返り。問 136。

(1) 地面に衝突する直前（図 9.5 中左）のボール A の速さを v_0 とする。$v_0 = \sqrt{2gh}$ であることを示せ。

(2) ボール A が地面に衝突して跳ね返った直後は, ボール B はまだボール A の上空にあるとする (図 9.5 中右)。このときのボール A の速度を v_A, ボール B の速度を v_B とする。次式を示せ:

$$v_\mathrm{A} = v_0 \tag{9.46}$$

$$v_\mathrm{B} = -v_0 \tag{9.47}$$

(3) その直後に, ボール B はボール A に衝突して跳ね返る（図 9.5 右端）。衝突直後のボール B の速度を v'_B とする。これらの一連の衝突は, 地面付近の狭い範囲で起きるので, 重力によるポテンシャルエネルギーの変化を無視しよう。すると式 (9.40) が成り立つことから, 次式を示せ:

$$v'_\mathrm{B} \fallingdotseq 3v_0 \tag{9.48}$$

(4) ボール B は, ボール A に衝突して跳ね返ったあと, もとの落下開始点（高さ h) の何倍の高さまで飛び上がるか?

9.6　（発展）質点系バージョンの運動量保存則の証明

（しんどい人は本節は飛ばしてもかまわない。）

ここで, 質点が 3 つ以上の質点系について, 運動量保存則を証明しておこう。いま, n 個の質点が互いに力を及ぼしあいながら運動する状況を考えよう。k 番目 $(k = 1, 2, \cdots, n)$ の質点のことを「質点 k」と呼び, その質量, 位置, 速度をそれぞれ m_k, $\mathbf{r}_k$, $\mathbf{v}_k$ とする。質点 k にかかる力 $\mathbf{F}_k$ は, その他の質点から受ける力（内力）と, それ以外から受ける力（外力）の和である：

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_k &= \mathbf{F}_{k1} + \mathbf{F}_{k2} + \cdots + \mathbf{F}_{kn} + \mathbf{F}^\mathrm{e}_k\\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_{kj} + \mathbf{F}^\mathrm{e}_k\end{aligned} \tag{9.49}$$

ここで $\mathbf{F}_{kj}$ は, それぞれ, 質点 k が質点 j から受ける力である。質点 k が自分自身から受ける力は考えなくてよいので, $\mathbf{F}_{kk}$ は考えなくてよいのだが, ここでは形式的に残しておいて, そのかわり $\mathbf{F}_{kk} = \mathbf{0}$ としよう。また, $\mathbf{F}^\mathrm{e}_k$ は, 質点 k にかかる外力である。例として, 図 9.6 に, 3 個の質点からなる質点系に働く力を示す:

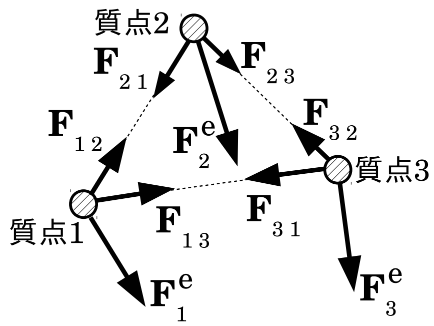

図 9.6　質点系に働く力。

さて, 質点 k について, 式 (9.10) を考えると,

$$m_k\mathbf{v}_k(t_1) - m_k\mathbf{v}_k(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_k dt \tag{9.50}$$

である。同様の式を, 全ての質点に関して考えて,

$$m_1\mathbf{v}_1(t_1) - m_1\mathbf{v}_1(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_1 dt$$

$$m_2\mathbf{v}_2(t_1) - m_2\mathbf{v}_2(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_2 dt$$

$$\cdots$$

$$m_n\mathbf{v}_n(t_1) - m_n\mathbf{v}_n(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_n dt$$

これらを辺々足し合わせると,

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\mathbf{v}_k(t_1) - \sum_{k=1}^{n} m_k\mathbf{v}_k(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \Big(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k\Big) dt \tag{9.51}$$

となる。この右辺の中の $\sum$ の部分（各質点にかかる力の総和）は, 式 (9.49) を使うと,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_{kj} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}^\mathrm{e}_k \tag{9.52}$$

となるが, この 2 重の $\sum$ の中には, 任意の 2 つの質点

k, j どうしが互いに及ぼしあう力, つまり, $\mathbf{F}_{kj}$ と $\mathbf{F}_{jk}$ が入っており, これらは（作用反作用の法則によって）互いに逆向きで大きさが同じ為, 打ち消し合う（そして前述のように $\mathbf{F}_{kk} = \mathbf{0}$ である）。従って,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k^{\mathrm{e}} \tag{9.53}$$

となる。よって, 式 (9.51) は,

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_k(t_1) - \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_k(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \Big(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k^{\mathrm{e}}\Big) dt \tag{9.54}$$

となる。この左辺の第 1 項と第 2 項は, それぞれ時刻 t_1, 時刻 t_0 の全運動量であり, 右辺は時刻 t_0 から t_1 の間の, 外力の総和による力積である。従って, 式 (9.54) は,「全運動量の変化は, 外力の総和による力積に等しい」ということになる。そして, 外力が無い場合はもちろんその力積は $\mathbf{0}$ なので, 結局,「外力を受けずに運動する場合, 質点系の全運動量は不変である」ということが示された。

ついでにこの話を重心を使って表しておこう。今考えている質点系の重心 $\mathbf{R}$ は式 (9.19) で表される。その両辺を時刻 t で微分し, 重心の速度を $\mathbf{V}$ と書けば,

$$\mathbf{V} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} \tag{9.55}$$

となる。また, 質点系の全質量を M と書こう:

$$M := \sum_{k=1}^{n} m_k \tag{9.56}$$

そして, 式 (9.55) の両辺に M を掛けて左右を入れ替えると,

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_k = M\mathbf{V} \tag{9.57}$$

となる。これを使うと, 式 (9.54) は次式のように書ける:

$$M\mathbf{V}(t_1) - M\mathbf{V}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \Big(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k^{\mathrm{e}}\Big) dt \tag{9.58}$$

つまり,「重心の運動量の変化は, 外力の総和による力積に等しい」, そして,「外力を受けずに運動する場合, 重心の速度は不変である」といえる。

9.7 回転運動再考

ところで, 太陽のまわりを地球が円運動（公転）している系を考えよう。太陽と地球だけの系には外力は働かないので, 運動量保存則から, 全運動量は一定のはずだ。さて, 地球の速度は, 大きさこそ一定であっても, 円軌道に沿って時々刻々と向きを変える。すると, 地球の運動量は, 大きさこそ一定であっても, 時々刻々と向きが変わるはずだ。一方, 太陽は静止しているから運動量は無い。ということは, 全運動量は地球の運動量だけだ。ということは, 全運動量が時々刻々と変化している, ということになる!! これは運動量保存則に矛盾している。どこが間違っているだろうか?

実は, この考察は,「太陽は静止しているから運動量は無い」から後が間違っている。地球が太陽から引力を受けるように, 太陽も地球から引力を受ける（「作用・反作用の法則」）。その力によって, 太陽も, 小さいながらも円運動するのだ。しかもその運動量は, 絶えず地球の運動量とは逆向きで大きさが同じであるため, 太陽と地球の全運動量は 0 で一定なのである[*3]。

9.8 量子力学におけるエネルギーと運動量

エネルギーや運動量について, ここまで述べてきた事はニュートン力学に限定した話である。これが量子力学, つまり電子や光子（光の粒子）の力学になると, だいぶ雰囲気の違う話になる。本章の最後に, それについて説明しよう。

電子や光子は粒子の性質と波の性質の両方を持つ。なんともよくわからない奇妙な話だが, それがどういうことかは様々な解説書があるので, 興味があればそちらを参照して欲しい（本書の最後にも少し触れる）。

電子や光子のように, 粒子の性質と波の性質の両方を持つ存在を量子と呼ぶ。量子に関する物理学が量子力学である。

量子の波長が λ であり, 振動数（周期の逆数）が ν であるとき, 量子の運動量 $\mathbf{p}$ とエネルギー E について, 次式が成り立つことが実験的にわかっている:

$$|\mathbf{p}| = \frac{h}{\lambda} \tag{9.59}$$

$$E = h\nu \tag{9.60}$$

ここで ν はプランク定数と呼ばれ, $h = 6.62607004 \times$

[*3] ただし太陽と地球をあわせた系の重心に対して静止している座標系で見た場合。

10^{-34} J s である。

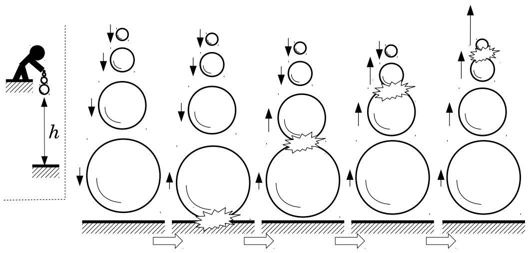

図 9.7 多段のボールの落下と跳ね返り。演習問題 15。

演習問題 15 さっき（問 136）はボールを 2 段にして落としたが, こんどはボールをもっとたくさん用意して重ねて落としてみよう。n 個のボールを縦に重ねて, 前問と同じように高さ h から落とす。ボールは上のものほど軽く, 隣りあう上下のボールは, 上のボールのほうが下のボールよりはるかに小さい（軽い）とする。最下部のボールが地面に弾性衝突して跳ね返ったあと, ボール同士は多段階に弾性衝突する（図 9.7）。最後に最上部のボールが跳ね上がるときのそのボールの速度を v'_n とする。

(1) 次式を示せ:

$$v'_n \fallingdotseq (2^n - 1)v_0 \tag{9.61}$$

(2) 最上部のボールは, もとの落下開始点（高さ h）の何倍の高さまで飛び上がるか?

(3) ボール群を $h = 5$ m から落下させ, 最上部のボールを宇宙の彼方まで飛ばすには, ボールを 10 段程度にすればよいことを示せ。（ヒント: 第二宇宙速度）

演習問題 16 テニスのトップ選手の打つボールの速さは 200 km/h 程度である。フェデラー選手が 200 km/h のサービスを打ち, それを錦織圭選手が 200 km/h で打ち返した。その際, 錦織選手のラケットとボールが接触している時間は 3.0 ms だった。その間, ボールに働いた力の大きさを見積もれ。また, そのような大きな力が発生するにもかかわらず, 錦織選手の右腕が壊れないのはなぜだろう? ただしテニスボールの質量を 60 g とする。

演習問題 17 質量 50 kg の学生が, 質量 10 kg の台車の上に乗って, **台車から見て** 1.0 m s^{-1} の早さで歩き始めた。そのとき台車は, 学生が歩く方向とは逆方向に動き始めた。**台車の外から見た**台車の動く速さを求めよ。

演習問題 18 宇宙空間で直線上を加速しながら進むロケットの運動を考えよう。ロケットにはたくさんの燃料が積まれている。燃料込みでのロケットの質量を M とする。ロケットは, 相対速度 u で, 燃料を後方に噴射することによって加速していく。と同時に, 噴射した燃料のぶんだけ質量 M は減る。すなわち, ロケットは質量が減るほど, 速度が増す。ロケットの初期速度を 0, 初期の質量を M_0 とする。ロケットの速度 v と質量 M の関係を求めよ。ヒント: ある瞬間と, そこから少し経った瞬間での, 運動量保存則を考える。ロケットの質量 M は, $M + dM$ に変わる（$dM < 0$）。dM は出て行った微小な燃料の質量（にマイナスをつけたもの）。燃料は, $v - u$ という速度でロケットから離れる。運動量保存則は, $Mv = (M + dM)(v + dv) + (-dM)(v - u)$ という式になることがわかるだろう（右辺第一項はロケットの運動量, 右辺第二項は噴射された燃料の運動量）。

9.9 解答

答 127

(1) $m_\mathrm{A} = m_\mathrm{B} = 1$ kg, $\mathbf{v}_\mathrm{A} = (1\ \mathrm{m\ s^{-1}}, 0\ \mathrm{m\ s^{-1}})$, $\mathbf{v}_\mathrm{B} = (0\ \mathrm{m\ s^{-1}}, 1\ \mathrm{m\ s^{-1}})$ として式 (9.4) に代入すると, $\mathbf{v} = (0.5\ \mathrm{m\ s^{-1}}, 0.5\ \mathrm{m\ s^{-1}})$。

(2) $|\mathbf{v}| = |(0.5\ \mathrm{m\ s^{-1}}, 0.5\ \mathrm{m\ s^{-1}})| = 0.71\ \mathrm{m\ s^{-1}}$。

答 128 略。

答 131

(1) A, B ともに同じ運動エネルギー: 0.5 J をもつ。従って全運動エネルギーは, 1 J。

(2) $(m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})|\mathbf{v}|^2/2 = 0.5$ J。

答 132 略。

答 133 略。

答 134 (1), (2), (3) は略（実直に計算すれば導出できる）。(4) 式 (9.35), 式 (9.36) の分子分母を m_A で割ると,

$$v'_\mathrm{A} = \frac{1 - m_\mathrm{B}/m_\mathrm{A}}{1 + m_\mathrm{B}/m_\mathrm{A}} v_\mathrm{A} + \frac{2m_\mathrm{B}/m_\mathrm{A}}{1 + m_\mathrm{B}/m_\mathrm{A}} v_\mathrm{B}$$

$$v'_\mathrm{B} = \frac{m_\mathrm{B}/m_\mathrm{A} - 1}{1 + m_\mathrm{B}/m_\mathrm{A}} v_\mathrm{B} + \frac{2}{1 + m_\mathrm{B}/m_\mathrm{A}} v_\mathrm{A}$$

となる。ここで, $m_\mathrm{A} >> m_\mathrm{B}$ なので, $m_\mathrm{B}/m_\mathrm{A} \fallingdotseq 0$ とすると, 上の 2 つの式は,

$$v'_\mathrm{A} \fallingdotseq \frac{1-0}{1+0} v_\mathrm{A} + \frac{2 \times 0}{1+0} v_\mathrm{B} = v_\mathrm{A}$$

$$v'_\mathrm{B} \fallingdotseq \frac{0-1}{1+0} v_\mathrm{B} + \frac{2}{1+0} v_\mathrm{A} = -v_\mathrm{B} + 2v_\mathrm{A}$$

となり, 与式を得る。

答 135

(1) 地面を基準点とする。ボールを手放した瞬間は, 重力によるボールのポテンシャルエネルギーは mgh_0 で, 運動エネルギーは初速度 0 なので 0。従って力学的エネルギーは mgh_0。一方, 地面につく直前は, ボールのポテンシャルエネルギーは 0 で, 運動エネルギーは $mv_0^2/2$。従って力学的エネルギーは $mv_0^2/2$。力学的エネルギー保存則より, $mgh_0 = mv_0^2/2$。ここから与式を得る。
(2) 略。(e の定義から)
(3) 略。(式 (9.41) と同様)
(4) 略。(式 (9.41), 式 (9.42), 式 (9.43) より v_0, v_1 を消去)
(5) 前小問と同様に, $h_n = e^2 h_{n-1}$。これは公比 e^2 の等比数列。従って与式を得る。
(6) $h_0 = 10$ m で, $h_n = e^{2n} h_0 < 0.1$ m より, $e^{2n} < 0.01$ となる。$e = 0.8$ だから, $0.8^{2n} < 0.01$。$n = 10$ のとき $0.8^{2n} = 0.0115 > 0.01$。$n = 11$ のとき $0.8^{2n} = 0.0074 < 0.01$。従って, $n = 11$, つまり 11 回バウンドする。

答 136 (1) ボール A について, 落下から地面での衝突の直前までを考えると, 力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2} m_{\mathrm{A}} v_0^2 = m_{\mathrm{A}} g h \tag{9.62}$$

これを v_0 について解けば与式を得る。(2), (3) は略 (誘導に従って実直に計算すれば導出できる)。(4) ボール B について, (1) と同様に考えれば, 次式のようになる:

$$\frac{1}{2} m_{\mathrm{B}} v_0^2 = m_{\mathrm{B}} g h \tag{9.63}$$

一方, 最高到達点の高さを H とし, 衝突直後から最高点到達までを考えると, 力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2} m_{\mathrm{B}} {v'_{\mathrm{B}}}^2 = m_{\mathrm{B}} g H$$

ここで (3) より, $v'_{\mathrm{B}} = 3v_0$ だから,

$$\frac{9}{2} m_{\mathrm{B}} v_0^2 = m_{\mathrm{B}} g H \tag{9.64}$$

となる。式 (9.64) の辺々を式 (9.63) の辺々で割ると, $9 = H/h$ となる。すなわち, $H = 9h$。すなわち, もとの高さの 9 倍まで上がる。

第10章

力学的エネルギー保存則(2)

第 8 章では,「力学的エネルギー保存則」が**直線上**(1 次元)での質点の運動について, 成り立つことを確かめた。本章では, この法則を, 3 次元空間に拡張する。それによって, より多くの様々な現象を,「力学的エネルギー保存則」で解明できるのだ。

まず, これまで 1 次元の直線上での運動に限定して考えてきた「仕事」「ポテンシャルエネルギー」「運動エネルギー」を, 3 次元空間で再定義しよう。とりあえずいちばん簡単なのは「運動エネルギー」だ。

10.1　3 次元空間における運動エネルギー

第 8 章を振り返ると, 質量 m の質点が速度 v で直線的な運動(1 次元の運動)をしているとき, その運動エネルギー $T(v)$ は,

$$T(v) = \frac{1}{2}mv^2 \tag{10.1}$$

と定義された(式 (8.4))。速度は本来, ベクトルなので, 質点の運動が 3 次元的ならば, 式 (10.1) の v^2 は速度ベクトル $\mathbf{v}$ によって, $|\mathbf{v}|^2$ と置き換えたくなる。ここで, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ とすると, $|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ である。多くの教科書では, $|\mathbf{v}|^2$ のことを単に $\mathbf{v}^2$ と書く慣習がある。ここでもその慣習に習おう。すなわち,

$$\mathbf{v}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \tag{10.2}$$

である(約束)。そこで, 3 次元では, 式 (10.1) のかわりに,

$$T(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\,m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}\,m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \tag{10.3}$$

を運動エネルギーの定義としよう。これは運動が 1 次元のときには, 式 (10.1) に帰着する。つまり, 式 (10.1) を内包した定義になっている。

式 (10.3) は明らかにスカラー量(大きさは持つが向きは持たない量)である。つまり, 運動エネルギーはスカラーである。このことは運動エネルギーに限らない。どんな形のエネルギーも, スカラー量なのである。それは, エネルギーは仕事に等価な量だからである。そして次節で見るように, 仕事はスカラー量なのである。

10.2　3 次元空間における仕事は「線積分」で定義

次に, 仕事を 3 次元に拡張する。仕事とは,「力と, その力が働く質点が"力と同じ向き"に動いた距離との掛け算」であった。3 次元空間でも, この定義を採用する:

ある質点にかかる力を $\mathbf{F}$ とし, その質点が動いた距離と方向を表すベクトル(これを変位ベクトルという)を $\Delta\mathbf{r}$ とする。$\mathbf{F}$ と $\Delta\mathbf{r}$ のなす角を θ とすると,「その力が働く質点が"力と同じ向き"に動いた距離」は,

$$|\Delta\mathbf{r}|\cos\theta \tag{10.4}$$

となる。従って, 仕事 ΔW は,

$$\Delta W = |\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta \tag{10.5}$$

となる。ところが, 内積の定義から, これは

$$\Delta W = \mathbf{F} \bullet \Delta\mathbf{r} \tag{10.6}$$

ということと同じである[*1]。式 (10.6) は, 式 (4.13) を 3 次元に拡張した式でもある。

よくある質問 157　ベクトルの内積なんてどうして勉強するのかと思ってましたが, こういうことだったんですね。 ... そうです。そして, ベクトルの内積はスカラーですね? だから仕事はスカラー量なのです。他にも内積の用途はいろいろあります。

式 (10.6) は, 質点が動く範囲で $\mathbf{F}$ が一定であるときにしか成り立たない。一般には, $\mathbf{F}$ は場所によって異なりうる。そこで, 質点の移動の経路をたくさんの細かい

[*1] 式 (10.6) の中の「●」は, ベクトルの内積を表す。内積とは何か, わからない人は, 数学の教科書を参照せよ。

区間に刻んで, 各区間では $\mathbf{F}$ がほとんど一定であるとみなそう。つまり, 式 (4.16) から式 (4.20) までと同じように考えればよい。

いま, 位置ベクトル $\mathbf{r}_0$ の位置から位置ベクトル $\mathbf{r}_n$ の位置まで, 質点が力を受けて動くとしよう。この経路を細かく細かく刻み, 途中の点の位置ベクトルを $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots$ とする。いま, k を 1 以上 n 以下の整数とし, $\mathbf{r}_{k-1}$ と $\mathbf{r}_k$ という隣接する 2 つの点を結ぶ変位ベクトルを

$$\Delta\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1} \tag{10.7}$$

とする。この 2 点の間で力は $\mathbf{F}_k$ でほぼ一定とする（図 10.1)。 この 2 点の間で力がなす仕事 ΔW_k は, 式 (10.6)

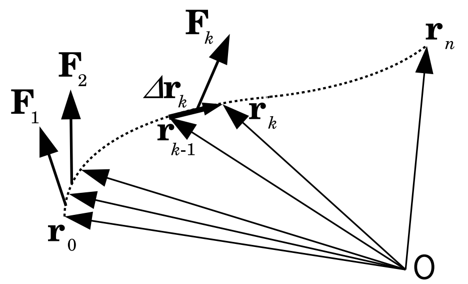

図 10.1　質点の動く経路を細かく分割する。

より $\Delta W_k \fallingdotseq \mathbf{F}_k \bullet \Delta\mathbf{r}_k$ となる。これを全区間について合計すれば, $\mathbf{r}_0$ から $\mathbf{r}_n$ までの移動でなされる仕事 $W_{\mathbf{r}_0\to\mathbf{r}_n}$ になる:

$$W_{\mathbf{r}_0\to\mathbf{r}_n} \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \Delta W_k \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \bullet \Delta\mathbf{r}_k \tag{10.8}$$

これは式 (4.18) を 3 次元に拡張した式でもある。ここで刻みをどんどん小さくしていけば,

$$W_{\mathbf{r}_0\to\mathbf{r}_n} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\mathbf{r}_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \bullet \Delta\mathbf{r}_k \tag{10.9}$$

となる。これは積分の定義より（Σ は $\int$ になり, Δ は d になる!）,

$$W_{\mathbf{r}_0\to\mathbf{r}_n} = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \tag{10.10}$$

となる（$\mathbf{r}_n$ を改めて $\mathbf{r}$ とおいた)。

よくある質問 158　何ですかこの積分!? 普通の積分は, $\int$ なんちゃら dx とか $\int$ なんちゃら dt みたいに, d がつくのは x や t などです。でも, これは $d\mathbf{r}$ って, ベクトルに d がついてます。しかも内積!? ... 初めて見たらちょっとびっくりしますよね。でも, これはそんなに不思議なことではありません。積分の定義を思い出して下さい。「関数と微小量の掛け算」が, ここでは力（位置の関数で, ベクトル）と変位（位置の変化を表す微小量で, ベクトル）の内積（掛け算をベクトルに拡張したもの）になっているだけです。

この式は式 (4.20) を 3 次元に拡張した式だ。この積分は, 始点 $\mathbf{r}_0$ と終点 $\mathbf{r}$ のみならず, 移動の経路にも依存するから, その経路を Γ と名づければ, 以下のように言える: 経路 Γ を移動する質点にかかる力 $\mathbf{F}$ のなす仕事 W_Γ を, 次式で定義する:

$$W_\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \tag{10.11}$$

ここで, $\mathbf{r}$ は位置ベクトル。この式は, 最も一般的な仕事の定義式である。

ここで出てきた積分は, 君にとって目新しいものだろう。ここでは被積分関数も積分変数もベクトルであり,「関数と微小量の掛け算」がここではベクトルの内積であり, しかも積分区間が「経路 Γ」であるのだ。このように, ある経路に沿って, ベクトルと微小ベクトルの内積を足し合わせるような積分を, 線積分という。3 次元では, 仕事は線積分で定義されるのだ。

● **問** 137　仕事を 3 次元空間で定義せよ。

10.3　3 次元空間におけるポテンシャルエネルギー

次に,「ポテンシャルエネルギー」の定義を 3 次元空間に拡張しよう。といっても, 仕事の定義を上述のように改めること以外は, ポテンシャルエネルギーの定義は 1 次元のときと同じだ。式 (4.40), つまり, 式 (4.43), 式 (4.44) の位置 x を位置ベクトル $\mathbf{r}$ に置き換えたものが, 3 次元空間におけるポテンシャルエネルギーだ。すなわち, ポテンシャルエネルギーを $U(\mathbf{r})$ とすると,

$$\text{定義 1':}\quad U(\mathbf{r}) := -W_{O\to\mathbf{r}} \tag{10.12}$$

ここで $W_{O\to\mathbf{r}}$ は, 物体を基準点 O から点 $\mathbf{r}$ まで運ぶときに, 物体にかかっている保存力がなす仕事。

$$\text{定義 2':}\quad U(\mathbf{r}) := W'_{O\to\mathbf{r}} \tag{10.13}$$

ここで $W'_{O\to\mathbf{r}}$ は, 物体を基準点 O から点 $\mathbf{r}$ まで運ぶときに, かかっている保存力に逆らって誰かがなす仕事。

$$\text{定義 3':}\quad U(\mathbf{r}) := W_{\mathbf{r}\to O} \tag{10.14}$$

ここで $W_{\mathbf{r}\to O}$ は, 物体を点 $\mathbf{r}$ から基準点 O まで運ぶときに, 物体にかかっている保存力がなす仕事。

無論, これらの 3 つの定義は互いに同値だ。力が保存力でなければならない, ということに注意しよう。

● **問** 138　物体が保存力 $\mathbf{F}$ を受けて, ある点 $\mathbf{r}_0$ から別の点 $\mathbf{r}_1$ まで移動するとき, $\mathbf{F}$ がなす仕事 $W_{\mathbf{r}_0\to\mathbf{r}_1}$ は,

$$W_{\mathbf{r}_0\to\mathbf{r}_1} = U(\mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}_1) \tag{10.15}$$

であることを示せ。ここで U はポテンシャルエネルギーである。

● **問** 139　保存力が, 3 次元空間の任意の閉曲線（始点と終点が一致する曲線）に沿ってなす仕事は, 必ず 0 になることを示せ。

10.4　3 次元空間における力学的エネルギー保存則

役者は揃った。ではいよいよ, 力学的エネルギー保存則が 3 次元でも成り立つことを確認していこう。1 次元で力学的エネルギー保存則を導いたとき, 式 (8.7) から式 (8.9) にかけて, 運動方程式を位置で積分した。3 次元でも同じ事をやるのだ。まず, 運動方程式:

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{10.16}$$

を考える。$\mathbf{F}$, $\mathbf{v}$, m, t はそれぞれ質点に働く力, 質点の速度, 質点の質量, そして時刻である。質点の位置ベクトルを $\mathbf{r}(t)$ とする。時刻 t と, そこから微小時間 dt だけ経過した $t+dt$ で, 質点は少し違う位置にいる（移動している）。その差, つまり変位を $d\mathbf{r}$ と書こう。つまり,

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+dt) - \mathbf{r}(t) \tag{10.17}$$

である。この両辺を dt で割ったもの（つまり位置を時刻で微分したもの）が速度 $\mathbf{v}$ だ。つまり, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ だ。従って, 次式が成り立つ:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt \tag{10.18}$$

式 (10.16) に式 (10.18) を辺々, 内積すると次式を得る:

$$\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\bullet\mathbf{v}dt \tag{10.19}$$

これはちょうど, 式 (8.8) を 3 次元に拡張した式だ。

ここで, 時刻 t_0 から t_1 までの運動を考える。$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(t_1)$ とし, $\mathbf{r}_0$ から $\mathbf{r}_1$ までの質点の運動の軌跡を Γ とする。Γ をたくさんの短い区間に分割し, それぞれの区間で式 (10.19) を考えて足し合わせる。つまり, 時刻 t_0 から t_1 までの間で, 式 (10.19) を積分すると,

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t_1} m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\bullet\mathbf{v}dt \tag{10.20}$$

となる。左辺は式 (10.11) の右辺と同じ形になっている。つまり, 質点に働く力がなす仕事 W_Γ である。

ここで, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ とすれば,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Big(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\Big) \tag{10.21}$$

である。これらを使って式 (10.20) の右辺を成分で書くと, 次のようになる:

$$\int_{t_0}^{t_1} m\Big(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\Big)\bullet(v_x, v_y, v_z)dt \tag{10.22}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} m\Big(v_x\frac{dv_x}{dt} + v_y\frac{dv_y}{dt} + v_z\frac{dv_z}{dt}\Big)dt \tag{10.23}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} mv_x\frac{dv_x}{dt}dt + \int_{t_0}^{t_1} mv_y\frac{dv_y}{dt}dt + \int_{t_0}^{t_1} mv_z\frac{dv_z}{dt}dt$$

$$= \int_{v_x(t_0)}^{v_x(t_1)} mv_x\,dv_x + \int_{v_y(t_0)}^{v_y(t_1)} mv_y\,dv_y + \int_{v_z(t_0)}^{v_z(t_1)} mv_z\,dv_z$$

$$= \Big[\frac{1}{2}mv_x^2\Big]_{v_x(t_0)}^{v_x(t_1)} + \Big[\frac{1}{2}mv_y^2\Big]_{v_y(t_0)}^{v_y(t_1)} + \Big[\frac{1}{2}mv_z^2\Big]_{v_z(t_0)}^{v_z(t_1)}$$

$$= \frac{1}{2}m\big(v_x^2(t_1) + v_y^2(t_1) + v_z^2(t_1)\big)$$

$$-\frac{1}{2}m\big(v_x^2(t_0) + v_y^2(t_0) + v_z^2(t_0)\big) \tag{10.24}$$

$$= \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 \tag{10.25}$$

となる。従って, 式 (10.20) は次式のようになる:

$$W_\Gamma = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 \tag{10.26}$$

ここで式 (10.3) を使うと, 式 (10.26) は

$$W_\Gamma = T(\mathbf{v}_1) - T(\mathbf{v}_0) \tag{10.27}$$

となる。ここで, $T(\mathbf{v})$ は質点の運動エネルギーである。

式 (10.27) は, 1 次元で導いた式 (8.13) と同じ形の式だ。つまり, 3 次元の運動でも, 力がなした仕事は運動エネルギーの変化に等しい, ということが成り立つ。

ところで, **力が保存力の場合は**, 仕事 W_Γ は経路 Γ のとりかたによらず, 出発点 $\mathbf{r}_0$ と $\mathbf{r}_1$ だけで決まる。つまり, W_Γ は式 (10.15) の $W_{\mathbf{r}_0\to\mathbf{r}_1}$ と同じである。そこで, 式 (10.15) と式 (10.27) から,

$$U(\mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}_1) = T(\mathbf{v}_1) - T(\mathbf{v}_0) \tag{10.28}$$

となる。あるいは,

$$T(\mathbf{v}_0)+U(\mathbf{r}_0)=T(\mathbf{v}_1)+U(\mathbf{r}_1) \tag{10.29}$$

となる。すなわち, 運動の最初（時刻 t_0）と運動の最後（時刻 t_1）で,「運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和」は等しいのだ。1 次元のときと同様に,「運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和」のことを,「力学的エネルギー」と呼ぼう（定義）。すなわち, 式 (10.29) によって, 3 次元における力学的エネルギー保存則が確かめられた！

● **問** 140　運動方程式から式 (10.29) を導出せよ（上の議論を整理・再現すればよい）。

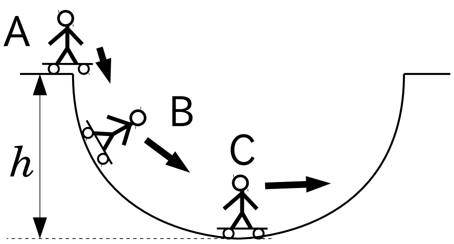

図 10.2　スケートボードのハーフパイプ

● **問** 141　スケートボードで, ハーフパイプを降りる人（スケートボードとあわせて質量 m）の運動を考えよう（図 10.2）。ハーフパイプの縁 A にいるときは速さ 0 である。そこから静かにハーフパイプの側面を降りはじめ, 重力にまかせて加速しながら降りていき (点 B), ハーフパイプの底 (点 C) に至る。点 C に至ったときは, 速さ v で水平方向に動いている。ハーフパイプの底と縁の高度差は h であるとする。ただし摩擦や空気抵抗や車輪の回転に伴うエネルギーなどは無視する。

(1)　重力加速度を g とする。次式を示せ:

$$\frac{1}{2}mv^2=mgh \tag{10.30}$$

(2)　$h=5.0$ m のとき, v を求めよ。

(3)　ハーフパイプの断面が半円だとすると, 点 C でその人が受ける垂直抗力の大きさは重力の何倍か?

10.5　振り子の運動

振り子の運動を考えてみよう。天井に固定された点 P から長さ l の糸が垂れており, その先に質量 m の質点がついている（図 10.3）。質点が最も下に来たとき（糸が鉛直になったとき）の位置を O とする。糸をぴんと張ったまま質点を少し持ち上げたときの位置を Q とする。Q から静かに質点を手放すと, 質点は P, O, Q を含む鉛直平面内で振動運動をする。

時刻 t で質点は点 X(t) にあるとし, 角 OPX をラジアンであらわしたものを θ としよう。当然, θ は時間の関数だ。以下, 糸の質量は 0 とする。空気抵抗は無視する。

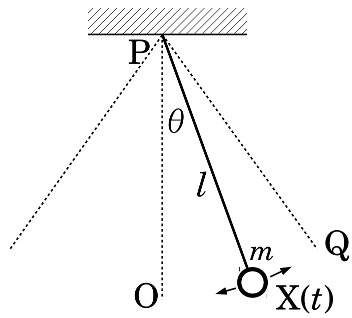

図 10.3　振り子

● **問** 142　この質点の運動について,
(1) 時刻 t における質点の速度を $\mathbf{v}(t)$ とすると,

$$|\mathbf{v}(t)|=\left|l\frac{d\theta}{dt}\right| \tag{10.31}$$

であることを示せ。ヒント：t から $t+dt$ の間に X が移動するのは, 扇形の弧の部分である。その弧の長さ（つまり移動距離）は,「半径」かける「角度の変化」であり,「角度の変化」は $\theta(t+dt)-\theta(t)$ である。また, 速度の絶対値（つまり速さ）とは, t から $t+dt$ の間に X が移動した距離を時間間隔 dt で割ったものだ。
(2) 時刻 t における質点の運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U は, それぞれ次のようになることを示せ：

$$T=\frac{1}{2}ml^2\Big(\frac{d\theta}{dt}\Big)^2 \tag{10.32}$$

$$U=mgl(1-\cos\theta) \tag{10.33}$$

ただし, 質点が点 O にあるとき $U=0$ と定める。
(3) 働く力は重力と張力だけだが, 重力は保存力であり, 張力は仕事をしない（移動方向と力の方向が直交しているので）。従って力学的エネルギー保存則が成り立つ。すなわち, $T+U$ は時刻 t によらず一定である。従って, $T+U$ を t で微分すると, 0 にならねばならない。この

ことから, 次式を導け：

$$ml^2\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}+mgl\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=0 \tag{10.34}$$

(4) その結果, 次式（振り子の運動をあらわす微分方程式）を得ることを示せ：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\theta \tag{10.35}$$

(5) θ が 0 に近い場合, 振り子の運動方程式は, 近似的に次のようになることを示せ：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\theta \tag{10.36}$$

この近似式が成り立つとして, 以下の小問に答えよ：
(6) $\omega=\sqrt{g/l}$ とすると式 (10.36) は次式になることを示せ（これは関数 $\theta(t)$ に関する微分方程式）：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\omega^2\theta \tag{10.37}$$

(7) $\theta(t)=\theta_0\cos\omega t$ は上の微分方程式の解であることを示せ。ただし θ_0 は定数とする。
(8) 振り子の周期 τ を, g と l であらわせ[*2]。
(9) $l=1.0$ m のとき, 振り子の振動の角速度と周期は?
(10) l を何倍にすれば振り子の周期は半分になるか?

● **問** 143　前問で見たように, **振幅が十分に小さいときに限れば**（すなわち θ が 0 に近ければ）, 振り子の周期は糸の長さ l と重力加速度 g だけで決まってしまい, 質点の質量 m や, 振れ幅 θ_0 などには依らない。これは, 振り子の重要な性質である（これを振り子の等時性という）。
(1) これを利用して, 重力加速度 g を測定する。つまり, 長さ l の糸の先に適当な重りをつけて振動させ, その周期 τ を測ったとする。では, l と τ から g を求める式は?
(2) 月面では, 地球上に比べて振り子の周期は何倍になるか?

● **問** 144　2 つの互いに同仕様の振り子時計がある。これらの時刻を互いに合わせた後, 東京（重力加速度 9.798 m s^{-2}）と札幌（重力加速度 9.805 m s^{-2}）のそれぞれに置いた。1 日たつと, 札幌の時計は東京の時計より何秒, 進んでいる（もしくは遅れている）か?

よくある質問 159　**振り子といえばフーコーですね。振り子で地球の自転を証明したんですよね** ... そうです。自転によって生じる「コリオリ力」という見かけの力を実証しました。

よくある質問 160　**高校物理では, 式** (10.35) **は, 質点にかかる重力を分解すれば導けたと思います。なぜここではわざわざ力学的エネルギー保存則を使ったのですか**? ... 質点は実際は円弧を動くのに, 高校物理学ではそれを水平方向の直線上での運動とみなしています。ここでの導出はそのような単純化をせずに導出しています。ちなみにこれは, P.135 で学ぶ「剛体振り子」の伏線です。

10.6　地球の形は「ジオイド」で表す

さて, 地球が作る重力に関するポテンシャルエネルギーを式 (4.45) で検討した。そのときは地球を質点とみなした。これはモデル化であり近似である。実際は地球は大きさを持った物体だが, もしも地球が密度一様の球体ならば, 地球を質点とみなすモデルで構わないということが数学的に証明できる（ここでは証明しないが)。

ところが, 地球の形をよく調べるとそれは真球ではなく, 北極・南極間を少しつぶしたような形, つまり横から見たら楕円っぽい形, 楕円を回転させた形に近いことがわかっている。地球の形に最もよくフィットする「楕円を回転させた形」を地球楕円体という。

ところが, 地球の形をもっとよく調べると, 地球楕円体からさらにほんのちょっとだけずれた, いびつな形であることがわかっている。この形は「ジオイド」という概念で表される。この節の目標は, この「ジオイド」を理解することである。というのも, ジオイドは標高の基準であり, 農地・森林の測量や灌漑水路の設計など, 生物資源学類の分野で実用上大切な概念だからである。

そもそも,「地球の形」とは何だろうか? 地球の「表面」が作る形のことだろうか? ところが, 地球表面の面積の 7 割は海であり, 海面は波や潮汐によって絶えず上下している。また, 陸地の表面も, 穴を掘ったりビルを立てたりすることで変化するし, 地震が起きたら揺れて上下する。そういうのを考えると, 地球の形を定義することは難しい。

そこで「ジオイド」である。ジオイドは,「地球のまわりの重力[*3]）のポテンシャルエネルギーが一定になる面のうち, 海水面の平均的な位置に最もよく一致するもの」

[*2] 普通は周期は T で表す慣習が多いが, ここでは T は運動エネルギーの記号に使っているので, 周期は τ（ギリシア文字のタウ）を使う。

[*3] ここでは質量に比例してかかる力を重力と呼んでいる。従って地球の自転に起因する遠心力も「重力」である。

と定義される。そして, ジオイドが地球の形をもっともよく表すものとみなすのだ。なんと, **地球の形を表すのに, ポテンシャルエネルギーの概念が必要**なのだ!![*4]

地球がもし質点でモデル化できるなら, ポテンシャルエネルギーは式 (4.45) のように地球の中心からの距離だけで決まる。つまり, 地球中心から等しい距離にある面（それは球面）がジオイドになるだろう。しかし, 実際は地球は質点ではモデル化できず, 式 (4.45) は単なる近似であり, 実際のポテンシャルエネルギーはそれよりも複雑な数式になる。どのような数式になるかは, それ自体が「測地学」というひとつの学問分野になるほどの重いテーマなのだが, ともあれ現在の測地学では, ジオイドはかなりの高精度で解明されている（その解明には人工衛星を使う)。

よくある間違い 8　**ジオイドを「地球が作る重力（の大きさ）が一定の面のうち...」という勘違い。**... 「重力（の大きさ)」が一定なのではなく, 「重力のポテンシャルエネルギー」が一定です。これらは互いに違います。ポテンシャルエネルギーが同じでも重力（の大きさ）は違う, ということはあり得ます。というのも, 次節で述べるように, 重力（の大きさ）はポテンシャルエネルギーそのものと対応するのではなく, ポテンシャルエネルギーの「微分」に対応するからです。

さて, 山の標高や海の深さは, このジオイドを基準にして定義される。ジオイドから何 m だけ上に（または下に）あるか, で表すのだ。そうやって標高を定義することで, 水は確実に「高いところ」から「低いところ」に流れるのだ。その理由は次の節でわかるだろう。

ここで, 地球楕円体の話に戻ろう。地球の形を最もよく表すのはジオイドだが, それをざっくり近似するのが地球楕円体である。地球楕円体も, 各時代の最新技術を使って最も「よくあてはまる」ものが計測・検討され, そのパラメータ（長軸や短軸など）が決定されている。現在は GRS80 という名前の地球楕円体が国際標準で採用されている。地球上の緯度や経度はこの回転楕円体によって定義される。このように, 地球楕円体と, その上で定義された緯度・経度の座標系をまとめて<u>測地系</u>という。

[*4] ところが「ポテンシャルエネルギー」をちゃんと理解している学生は少ないので, 多くの地学や測量学の本では, ポテンシャルエネルギーを使わずにジオイドを説明しようとして, かえって難しくなっている。結局, 基礎を理解していない人は, 実用的で重要な概念を勉強するときに苦労するし, 正確なことは理解できないのだ。

よくある質問 161　**地球の形がジオイドで表されるなら, それをざっくり近似した地球楕円体とかって, 考える必要ないんじゃないですか**? ... 原理的にはそうです。しかし, ジオイドを実際に数値的に表現するときは, まずざっくりと回転楕円体で近似し, その近似値から実際どのくらいずれているかを表す, という 2 段構えの方が, 実用上は好都合なのです。

● **問** 145　以下の概念の定義を述べよ。

(1)　ジオイド　(2)　地球楕円体　(3)　測地系

ジオイドは, 先に述べた地球楕円体との差で表すのが普通である。それによると, 日本からインドネシアにかけての西太平洋沿岸島嶼部ではジオイドは回転楕円体よりも 20 m から 80 m も高い[*5]。一方, インド南部ではジオイドは回転楕円体よりも約 80 m も低い。このような傾向は, 地球の内部構造やプレートの動きと密接に関係している。

● **問** 146　日本水準原点（日本で測量をするときの高さの基準点[*6]）では, ジオイドは地球楕円体から約 37 m 高いことがわかっている。

(1) 日本水準原点の真下にある, 地球楕円体の面上の点の標高を述べよ。
(2) 日本水準原点（のすぐ近く）に高さ 50 m のビルを建てたら, そのビルの屋上は, 地球楕円体からどのくらい高いか?

このような話は, ひと昔前までは,「なんとなくざっくり」わかっていればよかった。ところが近年, 自動車の自動運転や, 農地のトラクターの自動運転が実現したり, 広大な造林地の木を 1 本 1 本, 個別に計測して管理するなどの技術が生まれつつある。それらの技術では, 車両や木の位置を, センチメートル単位の高精度で計測・制御する必要やある。その基盤となるのは, 位置の定義をしっかりすることである。その背景にはここで述べたような, 物理学を使った地球の形に関する知見がある。そのことを理解してはじめて, 新しい技術の可能性や限界, コストなどが判断できるのである。

[*5] このような, 回転楕円体からジオイドまでの距離（高さ）を「ジオイド高」という。
[*6] 東京の国会議事堂の近くにある。標高は 0 m ではない。

10.7　（発展）ポテンシャルエネルギーと力の関係

（本節は後の話に関係しないので読み飛ばしてもよい。秋学期に電磁気学を学ぶ時に復習すると役立つだろう。）

さて, 力学的エネルギー保存則の話から少し外れるが, ここで力とポテンシャルエネルギーの関係をもう少し深くみておこう。いま, 符号を無視しておおまかに言えば, 力の（線）積分がポテンシャルエネルギーを与えるわけだから, 積分と微分は互いに逆の操作であることを考えれば, ポテンシャルエネルギーの微分が力を与えるのではないだろうか? 実は, この発想は正しい。以下にそれを説明しよう：

いま, ある質点に働く力が保存力であり, しかも場所だけによって一意的に定まり, 時刻や速度などには陽に依存しない[*7]としよう。

とりあえず, 簡単のため, 物体の移動は直線上 (x 軸の上）に制限され, 働く力もその直線に沿った方向に限定されるとしよう。物体が位置 x_0 から x_1 まで動くときに, 力 F がなす仕事 $W_{x_0\to x_1}$ は, 式 (8.27) より,

$$W_{x_0\to x_1} = -U(x_1) + U(x_0) \tag{10.38}$$

である（U はポテンシャルエネルギー）。ここで, x_0 を x とし, x_1 を x から非常に近い位置, すなわち, その間で力がほとんど変わらないとみなせるくらい近い位置としよう。そして $x_1 = x + dx$ としよう（dx は 0 に近い量)。すると, 仕事の定義から,

$$W_{x_0\to x_1} = F\,dx \tag{10.39}$$

である。一方, 式 (10.38) から,

$$W_{x_0\to x_1} = -U(x+dx) + U(x) \tag{10.40}$$

である。従って,

$$F\,dx = -U(x+dx) + U(x) \tag{10.41}$$

となる。両辺を dx で割って,

$$F = -\frac{U(x+dx) - U(x)}{dx} \tag{10.42}$$

ここで dx が十分に 0 に近いことを思い出せば,

ポテンシャルエネルギーと力の関係（1 次元）

$$F = -\frac{dU}{dx} \tag{10.43}$$

である。つまり, 力は, ポテンシャルエネルギーを微分してマイナスをつけたものに等しい。

この話は 3 次元空間に拡張できる。物体が力 $\mathbf{F}$ を受けながら位置 $\mathbf{r}$ から, わずかだけ離れた位置 $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ に移動することを考える。

$$d\mathbf{r} = (dx,\, dy,\, dz) \tag{10.44}$$

は十分に小さいベクトルである。すると, この移動において力がなす仕事 $W_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}+d\mathbf{r}}$ は, 式 (10.40) と同じように考えれば,

$$W_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}+d\mathbf{r}} = -U(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \tag{10.45}$$

である（U はポテンシャルエネルギー）。ここで全微分[*8]を使うと,

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) &= U(x+dx, y+dy, z+dz) \\ &= U(x,y,z) + \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \\ &= U(\mathbf{r}) + \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \end{aligned} \tag{10.46}$$

である。これを式 (10.45) に代入すると次式になる:

$$\begin{aligned} &W_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}+d\mathbf{r}} \\ &= -U(\mathbf{r}) - \frac{\partial U}{\partial x}dx - \frac{\partial U}{\partial y}dy - \frac{\partial U}{\partial z}dz + U(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{\partial U}{\partial x}dx - \frac{\partial U}{\partial y}dy - \frac{\partial U}{\partial z}dz \\ &= -\Big(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\Big) \bullet (dx, dy, dz) \\ &= -\Big(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\Big) \bullet d\mathbf{r} \end{aligned} \tag{10.47}$$

一方, $d\mathbf{r}$ を小さくとることで, その移動の間で力 $\mathbf{F}$ はほぼ一定とみなせるため, 仕事の定義か

$$W_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}+d\mathbf{r}} = \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \tag{10.48}$$

とできる。従って,

$$\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = -\Big(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\Big) \bullet d\mathbf{r} \tag{10.49}$$

である。dx, dy, dz は 0 に近い任意の量なので, 上の式が成り立つには,

[*7] この「陽に」(explicit) という言葉は科学ではよく使う。「あからさまに」とか「直接的に」という意味。今の場合は, 時間と共に場所が変われば力も変わるかもしれないが, それは場所が変わったからであり, 時間の変化が直接的に力を変えたわけではない, ということ。

[*8] 数学の教科書を参照。

ポテンシャルエネルギーと力の関係（3 次元）

$$\mathbf{F} = -\Big(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\Big) \tag{10.50}$$

でなければならない[*9]。ここで, ”grad” という記号を,

$$\mathrm{grad}\, U = \Big(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\Big) \tag{10.51}$$

と定義する[*10]。この記号を使うと, 式 (10.50) は次式のように書ける:

$$\mathbf{F} = -\,\mathrm{grad}\, U \tag{10.52}$$

演習問題 19　アインシュタインの相対性理論によると, 重力によるポテンシャルエネルギーが高い位置ほど時間は速く進む（とても不思議!）。すなわち, ある 2 つの位置 A, B があって, 重力によるポテンシャルエネルギーが, 位置 B では位置 A よりも $m\phi$ だけ高いとし (m は質点の質量), 位置 A に置かれた時計が時間 T だけ進む場合, 位置 B に置かれた時計は, 以下のぶんだけ進む。

$$T\Big(1 + \frac{\phi}{c^2}\Big) \tag{10.53}$$

ここで, $c = 299792458$ m/s は光の速さである。以後, 地球の半径を $R = 6400$ km とする。

(1) GPS 衛星は地表から約 20,000 km の高さを飛んでいる。地上の時計が 1 秒進む間に, GPS 衛星に搭載された時計は, 1 秒よりどれだけ多くの時間を進むか? （他の要因のために, 実際に起きるのは, ここで計算される値よりも, 若干小さい値である）

(2) 高精度の時計が 2 つあれば, これらの時計が示す時刻の差から, これらの時計の置かれた高さの差がわかる。つまり, 時計を高度計として使うことができるだろう。ところで, 東大の香取秀俊博士が開発した「光格子時計」は, 300 億年に 1 秒しか狂わないという, 世界的にもブッチギリな高精度を持つ。この時計を高度計として使う場合, 地表付近（海面から高さ ±数 km の範囲）では, どのくらいの誤差で高度を計測できるか?

なお, この「高度計」が素晴らしいのは, GPS のような衛星からの電波が入ってこない水中や地下, 屋内などでも原理的には利用可能ということである。

10.8 解答

答 137 略。

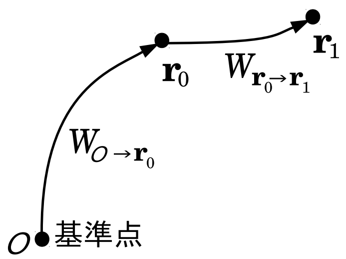

図 10.4　問 138 の仕事の経路。

答 138 物体を基準点 O から点 $\mathbf{r}_0$ まで運ぶときに保存力 $\mathbf{F}$ がなす仕事を $W_{O\to\mathbf{r}_0}$ とすると, 定義から,

$$U(\mathbf{r}_0) = -W_{O\to\mathbf{r}_0} \tag{10.54}$$

である。同様に, 物体を基準点から点 $\mathbf{r}_1$ まで運ぶときに保存力 $\mathbf{F}$ がなす仕事を $W_{O\to\mathbf{r}_1}$ とすると,

$$U(\mathbf{r}_1) = -W_{O\to\mathbf{r}_1} \tag{10.55}$$

である。ここで, 基準点から点 $\mathbf{r}_1$ へ物体を運ぶときの経路を, 点 $\mathbf{r}_0$ を経由するようにとれば（図 10.4）, 保存力ゆえに仕事は経路によらず一定なので, $W_{O\to\mathbf{r}_1} = W_{O\to\mathbf{r}_0} + W_{\mathbf{r}_0\to\mathbf{r}_1}$ となる。ここで $W_{\mathbf{r}_0\to\mathbf{r}_1}$ は物体を点 $\mathbf{r}_0$ から点 $\mathbf{r}_1$ に運ぶときの仕事。この式の $W_{O\to\mathbf{r}_0}, W_{O\to\mathbf{r}_1}$ を, 式 (10.54), 式 (10.55) を使って置き換えると, $-U(\mathbf{r}_1) = -U(\mathbf{r}_0) + W_{\mathbf{r}_0\to\mathbf{r}_1}$ となる。従って, $U(\mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}_1) = W_{\mathbf{r}_0\to\mathbf{r}_1}$ となる。

答 139 閉曲線 Γ に沿う移動によってなす仕事を W_Γ とする。移動の開始点と終了点をそれぞれ $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_1$ とすると, 閉曲線なので, 開始点と終了点は同じなので, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1$ である。保存力だから, 式 (10.15) を使うことができ, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0$, $W_{\mathbf{r}_0\to\mathbf{r}_1} = W_\Gamma$ として, $W_\Gamma = U(\mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}_0) = 0$ となる。

答 141　(1) 点 C をポテンシャルエネルギーの基準点

[*9] $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ とする。式 (10.49) で $dx \neq 0$ として $dy = dz = 0$ とすると,

$$F_x\, dx = -\frac{\partial U}{\partial x}\, dx, \quad したがって, \quad F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

を得る。$dy \neq 0$ で $dx = dz = 0$ の場合や, $dz \neq 0$ で $dx = dy = 0$ の場合も同様に考えれば,

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

を得る。したがって式 (10.50) が成り立つ。

[*10] この grad とは, ”gradient” の略であり, 日本語では「勾配」と言う。その意味は, いずれ基礎数学や秋学期の物理学で学ぶだろう。

とする。点 A では, 運動エネルギーは 0, ポテンシャルエネルギーは mgh である。従って力学的エネルギーは mgh となる。点 C では, 運動エネルギーは $mv^2/2$, ポテンシャルエネルギーは 0 である。従って力学的エネルギーは $mv^2/2$ となる。働く力は重力と垂直抗力だけだが, 重力は保存力であり, 垂直抗力は仕事をしない（移動方向と力の方向が直交しているので）。従って力学的エネルギー保存則が成り立つ。すなわち, 点 A と点 C で力学的エネルギーは等しいことから, 与式を得る。
(2) 前小問より,

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8\ \mathrm{m\ s^{-2}} \times 5\ \mathrm{m}} = 9.9\ \mathrm{m\ s^{-1}}$$

(3) 半円形ハーフパイプの高さが h なのだから, この円の半径は h である。人はパイプの底で半径 h, 速さ v の円運動をするので, それを実現する向心力を受けるはずだ。すなわち, 式 (6.37) より, C 点では人は円の中心に向かって（つまり上向きに）, mv^2/h という合力を受けるはず。一方, 垂直抗力を N とする。人には下向きに mg という重力も働くから, 上向きの力は, 垂直抗力と重力の合力であり, その大きさは $N - mg$ である。従って, $N - mg = mv^2/h$ である。従って,

$$N = \frac{mv^2}{h} + mg \tag{10.56}$$

である。小問 (1) より $mv^2 = 2mgh$ だから,

$$N = 2mg + mg = 3mg \tag{10.57}$$

となる。よって垂直抗力は, 半径 h によらず, 重力の 3 倍。だからハーフパイプ走者は重力の 3 倍の力に耐える頑丈な肉体を持っていなければならない。

答 142　(1) t から $t + dt$ の間に X が移動する距離は, $l|\theta(t+dt) - \theta(t)|$ である。微分の定義から, これは $l|\theta' dt|$ に等しい。これを dt で割ったものが速度の大きさになる。したがって与式が成り立つ。(2) 略（$T = mv^2/2$ の v に前小問の結果を代入すると, 運動エネルギー T の与式を得る。また, O に比べて X は $l(1 - \cos\theta)$ だけ高い位置にある。従って, 重力によるポテンシャルエネルギー U の与式を得る。）(3) 略。ヒント: 合成関数の微分。 (4) 略。(5) 略。（$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ とすればよい）(6) 略。(7) 略（式 (10.37) の左辺と右辺に代入して, それらが等しくなることを示せばよい）。(8) $\tau = 2\pi/\omega$ により（式 (6.4)) 参照）,

$$\tau = 2\pi\sqrt{l/g} \tag{10.58}$$

(9) 角速度は, $\omega = \sqrt{g/l} = \sqrt{9.8\ \mathrm{m\ s^{-2}}/(1.0\ \mathrm{m})} = 3.1\ \mathrm{s^{-1}}$。周期は（計算略）, $\tau = 2\pi/\omega = 2.0$ s。
(10) 式 (10.58) より, τ は $\sqrt{l}$ に比例するから, τ を半分にするには, $\sqrt{l}$ を半分にすればよい。従って l を 1/4 倍にすればよい。

答 143 (1) 式 (10.58) を変形して $g =$ の式にすると, $g = 4\pi^2 l/\tau^2$。(2) 月面では重力加速度が地表の 1/6 倍になる。式 (10.58) より, τ は $1/\sqrt{g}$ に比例するから, g が 1/6 倍になると τ は $\sqrt{6} = 2.4$ 倍（ゆっくり振動)。

答 146 (1) -37 m。(2) 50 m$-$(-37 m)=87 m

よくある質問 162　ポテンシャルエネルギーは, 力学的エネルギー保存則を見やすくするために定義されたもの, と考えてよいのですか? ... それだけではありません。まず, 力はベクトルだけどポテンシャルエネルギーはスカラーなので, 力を直接考えるよりも, 数学的に取扱いがシンプルで楽になります。また, 量子力学では力よりもポテンシャルエネルギーの方が直接的に重要な働きをします。

よくある質問 163　力学的エネルギー保存則とエネルギー保存則は違うんですね? ... 違うというより, 前者は後者の一種（特別なケース）ですね。

よくある質問 164　「保存力は経路に依存しない」というフレーズが頭にしっくりこない。 ... ちょっと省略しすぎですね。「保存力がなす仕事は, 経路によらず, 始点と終点だけで決まる」というのが正しい表現です。例え話でいうと, 山を登るのに, きつい勾配の坂をまっすぐ登るのと, ジグザグになった緩やかな道を登るのとでは, 全体の仕事（力かける距離）は同じということです。きつい道では大きな力が（移動方向に）かかるけど, そのぶん短くてすみます。

コラム: ベクトルは太字, スカラーは細字なのはなぜか?

「ベクトルは太字で書く」が, ちゃんとできない人が多い。そもそもなぜベクトルは特別な書き方（太字で書く）をするのだろう?それは, スカラーとベクトルは, 本質的に違う量であり, 計算ルールも異なるからだ。

例えば「スカラーでの割り算」は（0 で割る以外は）許されるが, 「ベクトルでの割り算」は許されない。スカラー同士やベクトル同士は足せるが, スカラーとベクトルは足せない。スカラーとベクトルの大小関係は比べられないし, スカラーとベクトルが等号で結ばれることもない。それらの「ルール破り」を防ぐための「要注意

記号」として, ベクトルを太字や上付き矢印で書くのだ。

ベクトルは太字という慣習を守らない人は, そもそも何がベクトルで何がスカラーかをわかっていない可能性がある。それはかなりヤバイ。ベクトルを太字で書かないと減点されるのは, 「わかってる風を装っているだけで, 実はわかっていない」のではないかと思われているのだ。逆に言えば, 「自分はどれがベクトルでどれがスカラーなのかちゃんとわかってるぜ!」ということをアピールするために, ベクトルを太字で書くのだ。

ところが, ひとつの直線上に限定された現象（直線運動）では, ベクトルとスカラーを区別する必要はないので, 本来ベクトルである量もスカラーとして扱い, 細字で書く。このような場合も, 力や速度や加速度には向きがあるが, それは符号（正か負か）で表現できるので, スカラーで十分であり, わざわざベクトルとして扱う必要は無い。ベクトルとして扱っても, 数値で表現するときは, ひとつの数値（成分）しかない。

数学や物理では, 「区別すべきものは区別せねばならないが, 区別する必要のないものは, 理由もないのに区別したりしてはいけない」という慣習がある（例外もあるが)。これに照らせば, 直線上に限定されることが最初からわかっている運動では $F = ma$ のように書いてよいし, むしろそう書かねばならない（F, m, a は力, 質量, 加速度)。この場合は F や a はスカラーと同様に扱うことができ, $m = F/a$ と書けるからでもある（$a \neq 0$ の場合)。

第11章

角運動量保存則

11.1 ベクトル同士のもう一種類の掛け算: 外積

本章では, 「外積」という数学的概念が必要になる。詳しいことは数学の教科書を読んでもらうとして, ここでは外積の概略だけを述べておく。

3 次元空間中の正規直交座標系[*1]で表された 2 つの幾何ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ について,

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \tag{11.1}$$

というベクトルを与えるような演算を外積と呼び, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ と表す（この $\times$ を省略したり $\bullet$ と書き換えたりしてはいけない!)。すなわち,

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (a_1, a_2, a_3)\times(b_1, b_2, b_3)\\ &:= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)\end{aligned} \tag{11.2}$$

である。

外積には, 以下のような幾何学的性質がある（ここでは証明はしない）:

- 性質 1. $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ は, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が張る平行四辺形の面積に等しい[*2]。
- 性質 2. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の両方に垂直である。
- 性質 3. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は, $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ に右ネジをまわすときにネジが進む側にある。
- 性質 4. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ と $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ は, 互いに等しい大きさで逆向きである。すなわち,
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a} \tag{11.3}$$
- 性質 5. 互いに平行なベクトルどうしの外積はゼロである。特に, 同じベクトルどうしの外積はゼロである。すなわち,
$$\mathbf{a}\times\mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{11.4}$$

性質 4 は, 性質 1, 性質 2, 性質 3 から示すことができる。性質 5 は, 性質 1 から示すことができる。

● **問** 147　以下の各場合について, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ を求め, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の張る平行四辺形の面積を求めよ。

(1)　$\mathbf{a} = (1, 2, 0)$,　$\mathbf{b} = (1, 1, -1)$

(2)　$\mathbf{a} = (1, 0, 1)$,　$\mathbf{b} = (-1, 1, 2)$

● **問** 148　2 つのベクトル:

$$\mathbf{a}(t) = \big(a_1(t), a_2(t), a_3(t)\big), \mathbf{b}(t) = \big(b_1(t), b_2(t), b_3(t)\big)$$

が, ともに変数 t の関数であるとする。次式を示せ（ダッシュは t による微分を表す）:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})' = \mathbf{a}'\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{b}' \tag{11.5}$$

11.2 角運動量

これからしばらく我々は, 物体の回転運動について考察しよう。物体の運動を考察するときのよりどころは, いつも運動の 3 法則だ。運動の 3 法則は, 様々な運動を統一的に支配・説明する力を持っている。回転運動も, 例外ではない。

しかし, 回転運動を扱う際は, 運動の 3 法則を直接的に使うよりも, 角運動量という概念（物理量）を導入する方が, 実際上はすっきりして便利である[*3]。

[*1] x, y, z の 3 つの座標軸が互いに直交しており長さのスケールが同じ座標系。まあいわば「普通の座標系」のことである。厳密には, 「右手系」という性質を満たす必要がある。そのことは今, 理解できなくてもよい。

[*2] それは $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$ である。ここで, θ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角。

[*3] この事情は, ちょうど, 衝突という現象を扱う際に運動量という概念を導入すると便利であったことに似ている。

角運動量の定義

質点の運動量を $\mathbf{p}$, 質点の位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とするとき, 位置ベクトルと運動量の**外積**, つまり

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{11.6}$$

を角運動量（angular momentum）と呼ぶ（図 11.1）。

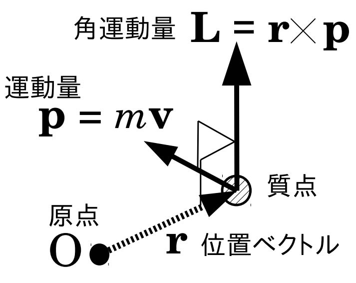

図 11.1　角運動量の定義。m は質点の質量, $\mathbf{v}$ は質点の速度, $\mathbf{r}$ は質点の位置ベクトル。$\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{p}, \mathbf{L}$ はいずれもベクトル（だから太字）。m はスカラー（だから細字）。

よくある間違い 9　$\mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{r}$ **と覚えてしまう** … ダメです。外積は順序が逆になると結果が異なる（向きが逆になる）ので, $\mathbf{p} \times \mathbf{r}$ と $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ は違います。

● **問** 149　角運動量の定義を確認しよう。

(1)　角運動量とは何か?
(2)　角運動量の SI 単位は?
(3)　角運動量は, 位置ベクトルと運動量の両方に垂直であることを示せ。

この「角運動量」なる奇妙な物理量がどのように便利なのかは後回しにして, とりあえずいくつかの系の角運動量を考えてみることで角運動量に慣れよう。

● **問** 150　3 次元空間に, 座標軸（x, y, z 軸; 各軸は互いに直交している）を設定する。xy 平面上で, 原点を中心とする半径 r の円周上を, 質量 m の質点が角速度 ω で等速円運動している。時刻 $t = 0$ で質点は x 軸上にある。

(1)　時刻 t のときの質点の位置ベクトル $\mathbf{r}$ は次式になることを示せ。

$$\mathbf{r} = r(\cos\omega t, \sin\omega t, 0) \tag{11.7}$$

（ただし, これと逆向きの回転のことは考えないとしよう。）

(2)　時刻 t のときの質点の運動量 $\mathbf{p}$ は次式になることを示せ。

$$\mathbf{p} = mr\omega(-\sin\omega t, \cos\omega t, 0) \tag{11.8}$$

(3)　この質点の角運動量 $\mathbf{L}$ は次式になることを示し, 時刻 t によらず一定値であることを確認せよ（図 11.2 参照）。

$$\mathbf{L} = (0, 0, mr^2\omega) \tag{11.9}$$

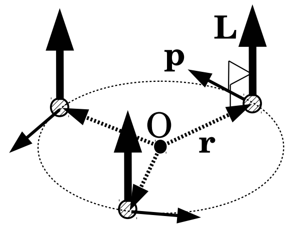

図 11.2　等速円運動する質点の角運動量

この問題の結果から, 原点を中心とする等速円運動をする質点の角運動量は, 時刻によらず一定であることがわかった。

ちなみに角運動量は, 回転以外の運動についても考えることができる。そもそも, 角運動量の定義, つまり式 (11.6) には, 運動が回転であるというような前提は存在しない。

● **問** 151　xyz 空間の中で, 質量 m の質点が, 時刻 t のときに位置ベクトル $\mathbf{r} = (Vt, y_0, 0)$ の位置にいるとしよう。V と y_0 は定数である。

(1)　この質点の速度 $\mathbf{v}$ を求め, この運動が等速度運動であることを示せ。
(2)　この質点の運動量 $\mathbf{p}$ を求めよ。
(3)　この質点の角運動量 $\mathbf{L}$ は次式のようになることを示し, 時刻 t によらず一定値であることを確認せよ（図 11.3 参照）。

$$\mathbf{L} = (0, 0, -mVy_0) \tag{11.10}$$

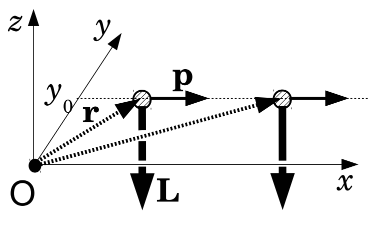

図 11.3　等速度運動する質点の角運動量

この問題の結果から, 等速度運動をする質点の角運動量は, 時刻によらず一定であることがわかった。

しかし, ちょっと変な気がしないだろうか? 問 151 では, 式 (11.10) のように, 角運動量が, y_0 に依存した。y_0 は, 質点が運動する直線（この場合は x 軸に平行な直線）が原点からどれだけ離れているかを示す定数である。ということは, 角運動量は, 同じ運動についても, 原点をどこに置くかで, 違った値を持つのだ。原点をどこに置くかは人間が勝手に決めることなので, 結局, 角運動量の値は, 人間の恣意的な判断に依存してしまうのだ！

回転運動などを考えるときは, 原点は回転の中心に置くのが普通だし便利だが, 必ずしもそうでなければならないという必然性は無い。ならば原点の置き方によって変わる角運動量って, 何なんだ? と思うかもしれない。実は, 角運動量は, その値だけで意味を持つのではなく, 次節に述べる考え方によって意味を持つのだ。そして この考え方は, 原点の選択には依存しないのだ。つまり, どこに原点を置いてもいいし, その結果として角運動量の値がどのように変わってもかまわないが, それでもなお, 以下の話は成り立つのだ[*4]。

11.3　角運動量保存則（1 つの質点バージョン）

式 (11.6) の両辺を, 時刻で微分してみよう。質量 m を一定とすれば,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) \tag{11.11}$$

$$= \frac{d}{dt}(m\mathbf{r}\times\mathbf{v}) \tag{11.12}$$

$$= m\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) \tag{11.13}$$

$$= m\Big(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{v}+\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}\Big) \tag{11.14}$$

$$= m\mathbf{v}\times\mathbf{v}+m\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{11.15}$$

ここで, 式 (11.13) から式 (11.14) の変形において, 式 (11.5) の性質を使った。

式 (11.15) について第 1 項の $\mathbf{v}\times\mathbf{v}$ は恒等的に $\mathbf{0}$ である（性質 5 より）。従って, 式 (11.15) は,

$$m\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{11.16}$$

となる。さらに, 運動方程式

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \tag{11.17}$$

を使うと ($\mathbf{F}$ は質点にかかる力), 式 (11.16) は,

$$\mathbf{r}\times\mathbf{F} \tag{11.18}$$

となる。従って, 式 (11.11) 左辺から式 (11.15) に至る方程式は, 結局,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} \tag{11.19}$$

となる。この右辺に現れた物理量には特別な名前が付けられている：

トルク（力のモーメント）の定義

$\mathbf{r}\times\mathbf{F}$, つまり位置ベクトルと力の外積のことを, トルク(torque) とか力のモーメントと呼ぶ。

そして, 式 (11.19) が表すのは,

質点に関する角運動量保存則

質点の角運動量の, 単位時間あたりの変化は, 質点に働くトルクに等しい。

という重要な物理法則である[*5]。

● **問** 152　式 (11.19) の導出を再現せよ。

例 11.1　自動車のタイヤを回転軸にとりつけるとき, そのネジは適度な強さで締めねばならない。強すぎるとネジが破断しかねないし, 弱すぎると緩んでタイヤが脱落してしまうからである。いずれにしても大変危険であり, 生命に関わることなので, その「強さ」をきっちり表現したり計測せねばならない トルクはまさにそのような概念である。ネジを回しながら締めるにはレンチという工具を使うが, その中でもトルクレンチという工具には, あらかじめトルクの上限値を設定でき, それを超えたトルクがかかった場合は空回りする仕組みになっている。ネットで調べてみよう!

[*4] これはちょうど, ポテンシャルエネルギーの値が基準点（原点）のとりかたによって異なる, という事情に似ている。原点のとりかたによってポテンシャルエネルギーは異なっても, ポテンシャルエネルギーの空間微分は保存力に一致するし（式 (10.50)）, 力学的エネルギー保存則は成り立つ。

[*5] ただし, これは導出過程から明らかなように, 運動の 3 法則 (特に $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$) から派生する法則なので, 基本法則とは言えない。

11.4 角運動量保存則（複数の質点バージョン）

この法則を複数の質点に拡張しよう。いま, n 個の質点が互いに力を及ぼしあいながら運動する状況を考えよう。k 番目 $(k=1,2,\cdots,n)$ の質点のことを「質点 k」と呼び, その質量, 位置, 速度, 角運動量をそれぞれ m_k, $\mathbf{r}_k$, $\mathbf{v}_k$, $\mathbf{L}_k$ とする。質点 k にかかる力 $\mathbf{F}_k$ は, その他の質点から受ける力（内力）と, それ以外から受ける力（外力）の和である：

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_{k1} + \mathbf{F}_{k2} + \cdots + \mathbf{F}_{kn} + \mathbf{F}_k^{\mathrm{e}} \tag{11.20}$$

ここで $\mathbf{F}_{k1}$, $\mathbf{F}_{k2}$, ... は, それぞれ, 質点 1 が質点 k に及ぼす力, 質点 2 が質点 k に及ぼす力, ... である。質点 k が自分自身に及ぼす力は考えなくてよいので, $\mathbf{F}_{kk}$ は考えなくてよいのだが, ここでは形式的に残しておいて, そのかわり $\mathbf{F}_{kk}=\mathbf{0}$ としよう。また, $\mathbf{F}_k^{\mathrm{e}}$ は, 外力が質点 k に及ぼす力である。例として, 図 11.4 に, 3 個の質点からなる質点系に働く力を示す:

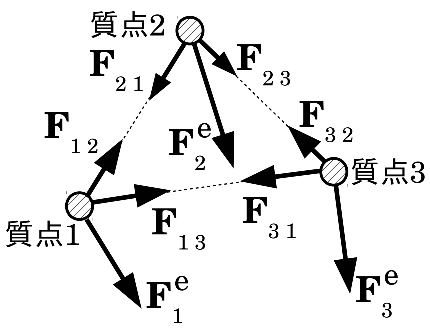

図 11.4　質点系に働く力。この図では内力どうし（$\mathbf{F}_{12}$ と $\mathbf{F}_{21}$ など）が中心力（後述）である（同一直線上にある）ことを仮定している。

さて, 質点 k について, 式 (11.19), 式 (11.20) を考えると,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_k = \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k \tag{11.21}$$

$$= \mathbf{r}_k \times (\mathbf{F}_{k1} + \mathbf{F}_{k2} + \cdots + \mathbf{F}_{kn} + \mathbf{F}_k^{\mathrm{e}}) \tag{11.22}$$

である。同様の式を, 全ての質点に関して考えて,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_1 = \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{F}_{11} + \mathbf{F}_{12} + \cdots + \mathbf{F}_{1n} + \mathbf{F}_1^{\mathrm{e}})$$
$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_2 = \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{22} + \cdots + \mathbf{F}_{2n} + \mathbf{F}_2^{\mathrm{e}})$$
$$\cdots$$
$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_n = \mathbf{r}_n \times (\mathbf{F}_{n1} + \mathbf{F}_{n2} + \cdots + \mathbf{F}_{nn} + \mathbf{F}_n^{\mathrm{e}})$$

これらを辺々足し合わせると,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dt}\mathbf{L}_k = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{r}_k \times (\mathbf{F}_{k1} + \mathbf{F}_{k2} + \cdots + \mathbf{F}_{kn}) + \sum_{k=1}^{n}\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{\mathrm{e}} \tag{11.23}$$

この式の右辺の最初の $\sum$ に注目しよう。この和を分解して考えると, その中には, 1 以上 n 以下の任意の j,k について（$j \neq k$ とする）, 1 つの $\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{jk}$ と 1 つの $\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{kj}$ が存在する。これらをひとまとめにすると,

$$\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{jk} + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{kj} \tag{11.24}$$

となる。ところが, 作用反作用の法則から,

$$\mathbf{F}_{kj} = -\mathbf{F}_{jk} \tag{11.25}$$

である。従って, 式 (11.24) は, 以下のようになる：

$$(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{F}_{jk} \tag{11.26}$$

$\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$ は質点 k から質点 j へのベクトルである。

ところで, 質点どうしが及ぼし合う力が, 互いを結んだ直線上にある場合, すなわち互いの方向（もしくは逆方向）をまっすぐに向いているような場合, そのような力を中心力という[*6]。**もし, $\mathbf{F}_{kj}$ が中心力であると仮定すれば**, $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$ と $\mathbf{F}_{jk}$ は互いに平行だから, その外積は $\mathbf{0}$ になる（性質 5 より）。従って, 式 (11.26) は恒等的に $\mathbf{0}$ になる。そのことと, $\mathbf{F}_{kk}=\mathbf{0}$ を使えば, 式 (11.23) は, 右辺の最初の $\sum$ が $\mathbf{0}$ になってしまって,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dt}\mathbf{L}_k = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{\mathrm{e}} \tag{11.27}$$

となる。ここで左辺の t による微分を $\sum$ の前に出せば,

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{L}_k = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{\mathrm{e}} \tag{11.28}$$

となる。この式は味わい深い。左辺の $\sum$ は全質点の角運動量の和であり, 全角運動量と呼ぶ。右辺は, 各質点に働く外力によるトルクの和だ。すなわち, 以下の法則が成り立つことが証明された:

*6 重力や静電気力（クーロン力）は中心力である。

質点系に関する角運動量保存則 (1)

内力が中心力であるような質点系（質点の集合）については, その全角運動量の, 単位時間あたりの変化は, 各質点に働く外力によるトルクの総和に等しい。

● **問** 153　式 (11.28) の導出を再現せよ。

ここで, **特に**, **全ての質点が静止していれば**, 当然ながら全ての k について $\mathbf{L}_k = \mathbf{0}$ が恒等的に成り立つ。従って, そのとき全角運動量 $\sum_{k=1}^n \mathbf{L}_k$ も恒等的に $\mathbf{0}$ である。従って, それを t で微分したもの（式 (11.28) の左辺）も恒等的に $\mathbf{0}$ である。従って, 式 (11.28) の右辺も恒等的に $\mathbf{0}$ である：

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{\mathrm{e}} = \mathbf{0} \tag{11.29}$$

この式の意味するのは, 「**内力が中心力であり**, **静止状態にある質点の集まりでは**, **外力によるトルクの和は $\mathbf{0}$**」ということだ。物体とは無数の原子や電子（質点と考えられる）の集まりなので, 上の文章の「質点の集まり」は「物体」であっても差し支えない。これが物体の静止状態における, （力の）モーメントのつりあいである。その特別な場合が「てこの原理」だ。第 3 章では, 仮想仕事の原理から「てこの原理」つまり式 (4.7) を導いたが, このように, 運動方程式から導くこともできるのだ[*7]。

さて, 式 (11.28) に戻ろう。こんどは, 質点は静止していない（運動している）が, **外力は働かない**（内力は中心力だけが働く）ような状況を考えよう。その場合, 式 (11.28) の右辺は $\mathbf{0}$ だ。従って,

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{L}_k = \mathbf{0} \tag{11.30}$$

である。この式は, 全角運動量は時刻 t によらず一定である, ということだ。従って, 次の法則が成り立つことがわかった：

質点系に関する角運動量保存則 (2)

外力が無く, 内力が中心力である場合は, 全角運動量は時刻によらず一定である。

● **問** 154

(1)　トルクとは何か?

(2)　トルクは, 別名, 何というか?

(3)　トルクの SI 単位は?

(4)　中心力とは何か?

(5)　モーメントのつりあいとは何か?

(6)　角運動量保存則とは何か?

例 11.2　玩具のコマは, 角運動量保存則の好例である。あんな不安定な形の物体が, 回転していると 1 本の軸足だけで地面に立ち続けることができるのは, 回転のために大きな角運動量があり, それが一定であり続けようとするからである。

例 11.3　ドローンは羽が回転して飛ぶのだが, 高速回転するプロペラはコマと同じように大きな角運動量を持つ。ところがドローンは姿勢や向きを柔軟に変える必要があるので, それを妨げる大きな角運動量は邪魔なのだ。そこでドローンは複数のプロペラのうち, 半分を右回り, もう半分を左回り, というふうに互いに逆回転させ, プロペラ回転による角運動量を打ち消すのである。これにより, ドローンの機体全体では角運動量はほぼ $\mathbf{0}$ となり, 柔軟な姿勢・方向制御が容易になるのである。

11.5　回転運動の不思議

本章の最後に, 次章への伏線を張っておく。それが次の 2 つの問題である。

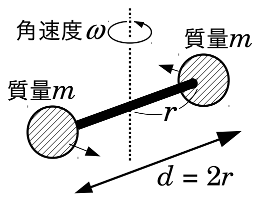

図 11.5　棒でつながれた 2 つの質点の等速円運動。

● **問** 155　質量 m の質点が 2 つあって, 伸縮可能な軽い棒でつながっている (図 11.5)。棒の長さを $d = 2r$ としよう。さて最初は, 棒の長さが一定で, 2 つの質点は棒の真ん中を中心とする等速円運動をしている。そのときの角速度の大きさを ω とする。なお, 中心（重心）は静止している。外力は働いていないとする。質点どうしに働く力は中心力であるとする。

[*7] 力学の法則は全て運動の法則から導かれるという立場からすると, これはむしろ自然である。不思議なのは, 仮想仕事の原理という考え方から出発しても, 同じ結論が導かれたことである。

(1) 1 つの質点の運動量の大きさは, $mr\omega$ であることを示せ。

(2) 1 つの質点の角運動量の大きさは, $mr^2\omega$ であることを示せ。

(3) それぞれの質点の角運動量は, どのような方向を向いているか?

(4) 2 つの質点をあわせた角運動量の大きさは $2mr^2\omega$ であることを示せ。

(5) 2 つの質点をあわせた運動エネルギーは $mr^2\omega^2$ であることを示せ。

(6) $2mr^2$ を I という記号で表そう（これが伏線!)。すると, このような, 回転運動する 2 つの質点からなる質点系について,

$$\text{角運動量の大きさは, } I\omega \tag{11.31}$$

$$\text{運動エネルギーの大きさは, } \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{11.32}$$

であることを示せ（簡単!!)。

ここで出てきた I という量を「慣性モーメント」という。これは伏線だから, その詳しい説明は次章に譲るが, 慣性モーメントは 2 つの質点からなる質点系だけでなく, 特定の軸のまわりに一斉に回転するような多くの質点から構成される, 様々な形の質点系にも定義される。そして, それらには, 式 (11.31), 式 (11.32) が成り立つのだ。それを理解することで, 回転する物体の運動を, 我々は理解・予想できるようになる。それが次章の目標である。

よくある質問 165　回転運動なんか, 直感的に簡単に理解・予想できるように思いますが? ... そう思うでしょ? それが大きな勘違いだということに, 次章で気づくでしょう。回転運動は簡単ではないのです。シンプルな運動なのに, 我々の素朴な直感では理解も予想もできないようなことがたくさん起きるのです。

よくある質問 166　そんなバカな（笑)。物体が単にくるくるまわるだけではないですか? 生まれてからこれまで, 自転車の車輪や観覧車や地球など, 回転する物体をたくさん眺めたり学んできましたが, その中に, 私が直感で理解・予想できないものなんかありませんでした。 ... それは単に気づいていないだけです。回転運動をちゃんと見ていないのです。例として次の問題を考えてみて下さい。

● 問 156　前の問題の続きを考える。ある時点で, 棒が急に縮んで長さが半分になったとする。角運動量保存則により, 棒が縮んだ後の角速度の大きさは縮む前より大きくなることを示せ（つまり回転が速くなる!!)。

このように, 回転する物体は, 各部分が回転軸に近寄るほど, 回転が速くなるのだ。これを応用しているのが, フィギュアスケートのジャンプ（スピン）である。

例 11.4　スケーターが氷盤から飛び上がると, 空中で両手を体の軸に強く引き寄せることを君は見たことがあるだろう（なければネットで見てみよう)。スケーターの両手が上の問題の 2 つの質点に相当すると考えれば, この動作は, ジャンプ直前に体に加えた回転で得た角運動量を最大限に活用して, 空中での回転を高速化する工夫であることがわかるだろう。

もうひとつ例を挙げよう。これはもっと巨大な現象である。

例 11.5　2011 年 3 月に発生した, 東北太平洋沖地震の後, 地球の自転周期が 1.8 マイクロ秒だけ短くなった（自転が早くなった）ことが観測された。この現象は, 地球の形がわずかに変化して, 地球の回転軸に近寄ったからだと考えられる。

よくある質問 167　私はクラシック・バレエをやっています。バレエでも, フィギュアスケートで言うスピンと同じことを地表で行い（踊り）ますが, 腕をうまくタイミング良く体の中心に引き寄せると速く且つ安定して回れます。 ... これは問 156 や例 11.4, 例 11.5 と同じ原理です。

このように, 回転運動は実に不思議であり, それを角運動量保存則が説明してくれる。真に驚きに値するのは, それが「スケートのジャンプ」と「地球の自転の変化」という, ジャンルも大きさも全く異なる現象を統一的に支配していることだ。このような普遍性が物理学の顕著な特長である。

11.6　量子力学における角運動量

角運動量について, ここまで述べてきた事はニュートン力学に限定した話である。これが量子力学, つまり電子や光子（光の粒子）の力学になると, だいぶ雰囲気の違う話になる。本章の最後に, それについて説明しよう。

P.108 で述べたように, 電子や光子のように粒子の性質と波の性質の両方を持つ存在を量子と呼ぶ。いま, ひとつの量子を考え, それが粒子的に見ると半径 r の円周上を速さ v で等速円運動しているとしよう。このとき,

粒子の（ニュートン力学的な意味での）角運動量は円周に垂直であり，その成分 L は，$L=rp$ を満たすはずだ（p は運動量の大きさ）。ところが，量子は波の性質もある。この量子を波と見たときの波長を λ の波だとしよう。この波は，円周上に存在するから，円のどこかから波が始まると，ぐるっと回って元の位置に波が戻った時に，最初の波とうまく滑らかに接続しなければならない。それには，円周上に，1 周期ぶんの波がちょうど整数個入る状況であればよい。その整数を n とすると，すなわち次式が成り立てばよい:

$$2\pi r = n\lambda \tag{11.33}$$

従って，$r=n\lambda/(2\pi)$ が成り立つ。一方，式 (9.59) より，$p=h/\lambda$ である。これらを $L=rp$ に代入すれば，$L=rp=\{n\lambda/(2\pi)\}(h/\lambda)=nh/(2\pi)$ となる。つまり，角運動量は $h/(2\pi)$ の整数倍なのである。量子力学では，なぜか $h/(2\pi)$ という量がよく現れるので，これを $\hbar$ という記号（エイチバーと読む）で表す慣習がある。つまり，

$$\hbar := \frac{h}{2\pi} \tag{11.34}$$

である。この記号を使うと，等速円運動する量子の角運動量（の円周に垂直な成分）L は，

$$L = n\hbar \tag{11.35}$$

となる。そして，なぜか不思議なことに，量子が運動するときの角運動量は，「等速円運動」であってもなくても，式 (11.35) のように書けるのだ!! さらに不思議なことに，電子は円運動をしてなくても，なぜか角運動量を持っており，それを「スピン」というのだが，それは式 (11.35) において $n=1/2$ か $n=-1/2$ であることが理論的にも実験的にもわかっている。つまり，量子の角運動量は，式 (11.35) のように書けるのだが，その n は整数だけでなく，整数に 1/2 を足したり引いたりしたものでもありえるのだ（それ以外はあり得ない）。

11.7　解答

答 147 略（「大学 1 年生のための数学入門」に同じ問題が載っているので。）

答 148 略（「大学 1 年生のための数学入門」に同じ問題が載っているので。）

答 149　(1) 略。(2) $\mathbf{r}$ の SI 単位は m，$\mathbf{p}$ の SI 単位は kg m s^{-1}。従って，$\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ の SI 単位は kg m^2 s^{-1}。注: 外積は単なる「積」ではないが，その定義を見れば，2 つの物理量の外積の単位は，元の物理量の単位の積になることがわかるだろう。(3) 外積の性質 2 より，$\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ は $\mathbf{r}$ と $\mathbf{p}$ の両方に垂直。

答 150 (1) 題意より，質点の位置は xy 平面に限定されるので，z 座標は常に 0 である。また，xy 平面内では，原点から距離 r で x 軸から角度 ωt だけ回転した位置に質点はあるので，その位置は式 (11.7) のようになる。(2) 式 (11.7) を t で微分すると速度になる。それに m をかければ与式を得る。(3) $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$

$$= mr^2\omega(\cos\omega t, \sin\omega t, 0)\times(-\sin\omega t, \cos\omega t, 0)$$

$$= (0, 0, mr^2\omega)$$

これは t を含まない式なので，t によらず一定。

答 151 (1)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{d}{dt}(Vt,\, y_0,\, 0) = (V,\, 0,\, 0)$$

この式は，この質点が x 軸方向に一定の速度で運動することを示している。従って等速度運動。(2) $\mathbf{p}=m\mathbf{v}=(mV,0,0)$。(3) $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}=(Vt,\,y_0,\,0)\times(mV,\,0,\,0)=(0,\,0,\,-mVy_0)$。これは t を含まない式なので，t によらず一定。

答 154　略。トルクの SI 単位は N m=kg m^{2}s^{-2}。なんと，これは J，すなわちエネルギーの単位ではないか! しかし，書き方の慣習として，トルクは J で書くことはほとんどなく，N m で書くことの方が圧倒的に多い。もちろん J と N m は本質的に全く同じ単位なのだが，あくまで慣習としてである。

答 155 回転軸を z 座標軸とし，それに直交するように x 軸，y 軸を適当にとれば，1 つの質点の位置は $\mathbf{r}=(r\cos\omega t, r\sin\omega t, 0)$ と書ける（t は時刻）。

(1) 1 つの質点の運動量を $\mathbf{p}$ とすると，運動量の定義から，

$$\begin{aligned} m\mathbf{r}' &= m(-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t, 0)\\ &= mr\omega(-\sin\omega t, \cos\omega t, 0)\end{aligned}$$

である。従って，その大きさは，$mr\omega$ である（$|(-\sin\omega t, \cos\omega t, 0)| = \sqrt{\sin^2\omega t+\cos^2\omega}=1$ であることに注意）。

(2) 質点の角運動量は, 定義から, $\mathbf{r}\times\mathbf{p}$

$$
\begin{aligned}
&= (r\cos\omega t, r\sin\omega t, 0)\times m(-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t, 0)\\
&= mr^2\omega(\cos\omega t, \sin\omega t, 0)\times(-\sin\omega t, \cos\omega t, 0)\\
&= mr^2\omega(0, 0, \cos^2\omega t + \sin^2\omega t)\\
&= mr^2\omega(0, 0, 1)
\end{aligned}
$$

従って, その大きさは $mr^2\omega$

(3) それぞれの角運動量は, ともに前小問の式で表される。従って, ともに z 軸の正方向を向いている。

(4) 2 つの質点は, 同じ大きさで同じ向きの角運動量を持っている。従って, 全角運動量の大きさは, 1 つの質点の角運動量の 2 倍, すなわち $2mr^2\omega$ である。

(5) 1 つの質点の運動エネルギーは,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{mr^2\omega^2}{2}$$

である。全質点の運動エネルギーは, この 2 倍なので, $mr^2\omega^2$ となる。

答 156 縮んだ後の角速度の大きさを Ω とすると, 前問の小問 (4) と同様に考えれば, 縮んだ後の全角運動量の大きさは

$$2m\left(\frac{r}{2}\right)^2\Omega$$

である。ここで, 縮む過程で系に働く力は, 2 つの質点を近づける内力である。それは当然, 2 つの質点を結んだ直線の上にある（その直線自体もくるくる回るが, いずれにせよそれらの力は直線の上にある）。従って, 働く力は中心力であるような内力だけである（外力は働かない）。従って, この系は「質点系に関する角運動量保存則 (2)」の条件を満たすので, 縮む前後で全角運動量の大きさは変わらない（もちろん全角運動量の方向も変わらないはずだが, ここではそれを使う必要はない）。従って,

$$2mr^2\omega = 2m\left(\frac{r}{2}\right)^2\Omega$$

この式を変形すれば（いろいろ約分されて）, $\Omega = 4\omega$ を得る。すなわち, 角速度の大きさは 4 倍になる。

よくある質問 168　**数学や物理学ができる人は, イメージやひらめきが大事だと言います。私はそういうセンスが無くて, 苦手です。どうすればよいでしょうか?** ... 「センス」が無くても大丈夫です。確かに, 数学や物理学の新たな理論を発見するには「センス」が必要かもしれません。しかし, 既に確立された理論（生物資源学類としてはとりあえずそれを理解すれば十分）は筋道立てて論理的に表現・説明されるので（それが「確立」の意味です）, それを丁寧に理解すればよいのです。確立された学問は, 一部の賢い人たちが独占するものではなく, 万人に開かれているものであり, 誰もが理解できるような理論体系なのです。

もちろんイメージやひらめきは否定しません。それで数学や物理学が好き・得意という人もいると思います。ただ, 「それらが無いと無理」ではないと思います。むしろ「センス」に頼ってばかりだと, かえって理解できないことが出てきます。高校や大学入試までは数学・物理は好きだし得意だったのに, 大学入ってから全然わからない・つまらない・苦手になってしまったという人は, 「センス」に頼り過ぎて丁寧に論理的に学ぶことができていないのではないか, と振り返ってみるとよいと思います。

よくある質問 169　**でも, 実際, こんな解法, どうやったら思いつくんだ? みたいな問題ってよくありますよね。** ... それは大学入試の話でしょ? もう入試は終わったのです。大学での学びは, 「難しい問題を初見で短時間で独力で解く」ことは求められていないのです。

第12章

慣性モーメント

これまでは質点単体や, 複数の質点（質点系）について, 運動を考えてきた。この章では, さらに進んで, 大きさと形を持つ物体の運動, 特にその回転運動を考えよう。

12.1 剛体というモデル

第 1 章で述べたように, 大きさと形をもつ物体は, 質点の集まりとしてモデル化できる。ただし, 物体自体の変形（大きさや形が変わること）まで考えると話が複雑になるので, ここでは,

- 物体は質点の集まりで構成される。
- 物体は大きさと形を持つ。
- 物体は変形しない（ひとつの物体を構成する質点どうしの距離は変わらない）。

というようなモデルを考える。このような物体のモデルを剛体（rigid body）と呼ぶ。

我々の身の回りの物体の多くは, 剛体とみなせる。カーリングストーンや, ボールなどは, これまでは質点とみなしてきたが, その大きさや形が関与する運動（ボールの回転や, それによる軌道の変化等）を考えるときは剛体として扱わねばならない。例えば地球は, 太陽との位置関係を議論するときは質点でよいが, 地球の自転の様子を議論するときは剛体とみなさねばならない。

ただし, 剛体も, 質点ほどではないが, 一種の単純化・抽象化されたモデルであり, 問題設定によってはそれは不適切なこともある。例えば地球に起きる地震を考えるときは, 地球を剛体とみなしてはダメであり, わずかながらも変形する弾性体として扱わねばならない[*1]。

さて, ここでは理由は詳述しないが, 剛体の運動は, 2 つの要素にわけて考えることができる。ひとつはその「重心」の運動であり, もうひとつはその重心のまわりの回転運動である（図 12.1)。

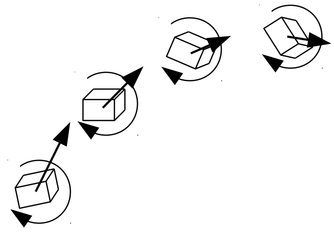

図 12.1 空中に放り投げられたレンガ。このような剛体の運動は, 重心の運動と, 重心まわりの回転で表現される。

12.2 剛体の回転運動

ここでは剛体の回転運動について考えよう。

まず, 最も単純な場合として, 前章の問 155 で見たような, 2 つの質点がペアになって等速円運動（回転）することを考えよう（図 12.2）:

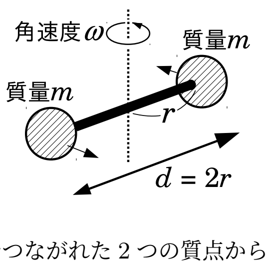

図 12.2 棒でつながれた 2 つの質点からなる剛体の等速円運動。

2 つの質点どうしの距離 d が変わらないとき, この 2 つの質点からなる質点系は, 剛体である。さて, このと

[*1] さらに言えば, 起きた振動（地震）が減衰して収まることを表現するためには弾性体ではダメで, 摩擦も考慮した「粘弾性体」という物体としてモデル化しなければならない。また, 物体が変形して元に戻らないことを表現するには, 塑性というものも考えねばならず, 粘性や弾性も一緒に考慮するには「粘弾塑性体」として考えねばならない。また, 水や空気のように流れる性質を持った物体は, 「流体」として考えねばならない。このように, 扱う物体の性質や運動のスケール, 本質的に関与する現象などによって, 物体をどのようにモデル化すべきかは様々だ。複雑なモデルであればあるほどいいというわけではない。一般に, 様々な性質を取り入れれば取り入れるほど, その問題を解くことは難しくなる。従って, 本質を失わない範囲で, 扱う物体をできるだけ単純なモデルで考える必要がある。

き, 各質点の運動の速さ（速度の大きさ）v は, 式 (6.36) より $v = r\omega$ となる。従って, 各質点の運動エネルギーは, 式 (8.4) より

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 \tag{12.1}$$

となる。従って, この剛体の運動エネルギー（つまり 2 つの質点の運動エネルギーの和）T は,

$$T = mr^2\omega^2 \tag{12.2}$$

となる（ここまでは前章の問 155 の復習である）。式 (12.1) のように, 各質点の（回転運動の）運動エネルギーが角速度の 2 乗に比例するから, 式 (12.2) のように, 全質点の運動エネルギーの和も角速度の 2 乗に比例する。同様に考えれば, 3 個以上の質点が, ある固定点のまわりを同じ角速度で等速円運動をしている場合についても, その回転による運動エネルギーは角速度の 2 乗に比例すると類推できるだろう。

12.3 慣性モーメントは剛体の回転を特徴づける量

そこで, 一般的に, 剛体が, ある軸のまわりに一斉に同一の角速度 ω で回転する状況を考えよう。剛体を, n 個の微小な部分に分割し, それぞれを質量 $m_1, m_2, ..., m_n$ の質点とみなす。回転軸からそれぞれの質点への距離を $r_1, r_2, ..., r_n$ とする。k 番目の質点の速さ（速度の大きさ）は $r_k\omega$ だから, k 番目の質点の運動エネルギー T_k は次式のようになる:

$$T_k = \frac{1}{2}m_k r_k^2\omega^2 \tag{12.3}$$

全体の回転の運動エネルギー T は, これらの全ての和であり,

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + \cdots + T_n \\ &= \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2 + \cdots + \frac{1}{2}m_nr_n^2\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \cdots + m_nr_n^2)\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2\Big)\omega^2 \end{aligned} \tag{12.4}$$

となる。式 (12.4) の () 内を抜き出して以下のように定義する:

慣性モーメントの定義

質量がそれぞれ $m_1, m_2, \cdots, m_n$ であるような n 個の質点について,

$$I = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 \tag{12.5}$$

で定義される物理量 I を, 慣性モーメント（moment of inertia）もしくは慣性能率と呼ぶ。ただし, $r_1, r_2, \cdots, r_n$ は回転軸から各質点までの距離である。

すると, 式 (12.4) は以下のように書ける:

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{12.6}$$

これは前章で考えた式 (11.32) と同じ形をしているが, あれよりも一般的な物体について考えた式である。回転する物体の運動エネルギーを考える時に頻繁に現れる, 便利で実用的に重要な式である（といっても基本法則や定義ではないが）。

よくある間違い 10 $r_1, r_2, \cdots$ **を,「回転軸からの距離」ではなく「原点からの距離」や「中心からの距離」や「位置ベクトル」と間違える** ... 後で述べますが, 慣性モーメントは,「回転運動の変えにくさ」を表すような量であり, 回転の軸から遠いところにあるものほど回しにくい, という性質が背景にあります。従って,「回転軸からの距離」が大事なのです。

● **問** 157

(1) 慣性モーメントの定義を述べよ。
(2) 慣性モーメントの SI 単位は?

● **問** 158 問 155 では, 慣性モーメントは $2mr^2$ であることを示せ。

式 (12.6) を, 質点の運動エネルギー T の式（式 (8.4) で学んだ）:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (m \text{ は質量}, v \text{ は速さ}) \tag{12.7}$$

と比べてみよう。すると, 両者は形式的によく似ていることに気づく。実際, 形式的には, 式 (12.7) における速さ v と質量 m は, 式 (12.6) における角速度 ω と慣性モーメント I に対応する。つまり, 形式的に言えば, 慣性モーメントとは「回転運動における質量みたいなもの」である[*2]。質量が物体の「動きにくさ」を表すとし

[*2] 注意: 同じ物体についても, 回転軸の位置や向きが違えば慣性

たら, 慣性モーメントは物体の「回りにくさ」を表す, と言ってもよかろう[*3]。

● **問** 159　半径 r の円周上に, 質量 m の質点が 3 個, 等間隔に並んで互いに固定されている（図 12.3）。このとき, 円の中心を貫く垂線を軸とする回転の慣性モーメント I は?

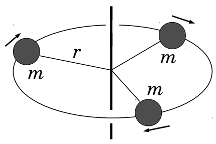

図 12.3　3 個の質点の回転

● **問** 160　半径 r の円周上に, 質量 m の質点が n 個, 等間隔に並んで互いに固定されている（図 12.4）。このとき, 円の中心を貫く垂線を軸とする回転の慣性モーメント I は?

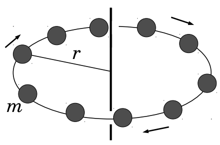

図 12.4　n 個の質点の回転

● **問** 161　前問で, 質量の合計, すなわち nm を M としよう。M を一定として m を小さくしながら n を無数に増やせば, これは質量 M の円環になるだろう。そのように考えて, 半径 r の円環（太さは無視できるほど小さいとする）の慣性モーメントは

$$I = Mr^2 \tag{12.8}$$

となることを示せ（図 12.5）。

● **問** 162　密度 ρ, 厚さ b の鉄板でできた, 半径 r, 幅 Δr の円環盤について, 中心を貫く垂線を軸とする回転の慣性モーメント ΔI は,

$$\Delta I = 2\pi\,\rho\,b\,r^3\Delta r \tag{12.9}$$

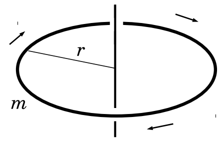

図 12.5　円環の回転

であることを示せ（図 12.6）。ただし Δr は r に較べて十分に小さいものとする。ヒント：Δr が十分に小さいから円環盤は円環とみなせる。また, 円環盤の質量は, $2\pi r\rho b\Delta r$ である。

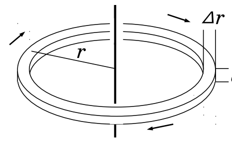

図 12.6　円環盤の回転

● **問** 163　密度 ρ, 厚さ b の鉄板でできた, 半径 r の円盤を考える（図 12.7）。この円盤の中心を貫く垂線を軸とする回転の慣性モーメントを I とする。

(1)　I は次式で表されることを示せ。

$$I = \frac{\pi\,\rho\,b\,r^4}{2} \tag{12.10}$$

円盤は円環盤のあつまりとみなして, 前問の結果を様々な r について適用して足しあわせる。Δr を十分小さくとれば, 足し合わせは積分になる。

(2)　この円盤の質量を M とすると, I は次式で表されることを示せ:

$$I = \frac{Mr^2}{2} \tag{12.11}$$

(3)　この円盤の慣性モーメントは, 同じ質量と半径を持つ円環の慣性モーメントの半分であることを示せ。

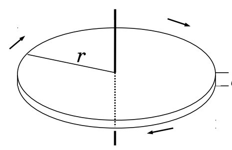

図 12.7　円盤の回転

この問題でわかったように, 同じ質量で同じ半径の円形物体でも, 円盤の慣性モーメントより円環の慣性モーメントのほうが大きい。つまり, それらを同じ角速度で

モーメントも違う。ここでは深入りしないが, 一般的に, 物体の慣性モーメントを任意の回転軸に関して完全に表現するには, 行列（テンソル）を使う必要がある（後述する）。

[*3] もちろん, 既に動いている物体については, むしろ質量は「止まりにくさ」であり, 慣性モーメントは「回転の止まりにくさ」である。

回転させると, 回転の運動エネルギーは円盤より円環のほうが大きい。

これはなぜだろう? 考えてみよう。

運動エネルギーは, 速さが大きいほど大きい（速さの 2 乗に比例する）。円形の物体を回転させるとき, 全体がいっしょに回るものの, 回転軸から遠い部分ほど速さは大きい。これは, 運動会などで人が横一列で行進するとき, カーブで曲がる際に, 外側の人は早足で, 内側の人はゆっくり歩かないと列が崩れるのと同じ理屈である。一方, 運動エネルギーは質点が持つものである。従って, 質点が回転軸よりも遠い部分に多く存在するような物体は, 回転に多くの運動エネルギーが必要になる。円環はその典型であり, それを構成する全ての質点が, 回転軸から最も遠いところ（円の縁）にある（それに対して, 円盤は, 回転軸から縁まで連続的にびっちりと質点が詰まっているので, 回転軸の近くにも質点がそれなりにある）。そういうわけだ。そう考えると, 慣性モーメントなるものの意味や性質が少しわかってくるだろう。

例 12.1 同じ半径, 同じ質量の 2 つの球がある。球 A は, 表面だけに物質があり, 内部は空洞, つまり球殻である。球 B は, 内部まで物質（固体）が一様にびっちり詰まっている。慣性モーメントはどちらが大きいだろうか?

球 A は球の表面に質量が集中しているのに対して, 球 B は球の内部, すなわち回転軸に近い部分にも質量が分布している。従って, 球 A の方が慣性モーメントは大きい。ちなみにちゃんと計算すると, 質量を M, 半径を R とすると, 球 A の慣性モーメントは $(2/3)MR^2$, 球 B の慣性モーメントは $(2/5)MR^2$ であることが証明できる（ここではやらないが, 興味のある人は調べてやってみよう）。（例おわり）

ここまでは, 主に円形物体の慣性モーメントを考えてきたが, 慣性モーメントはどんな形の物体にでも考えられる量である。そこで, ここまで見た慣性モーメントの計算法を, いろんな物体にも使えるように拡張・一般化しよう。

任意の形状の連続的な剛体 V について, それがひとつの軸の回りに回転することを考える。回転軸を z 軸とし, それに直交するように x 軸と y 軸を設定しよう。剛体 V を x 軸, y 軸, z 軸に沿ってメッシュ状に分割し, 横 Δx_i, 縦 Δy_j, 高さ Δz_k の小さな直方体（その中心の座標を (x_i, y_j, z_k) とする。i, j, k は整数）のあつまりとみなす。個々の部分の体積は $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ となり, その質量は $\rho \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ となる（ρ は密度）。

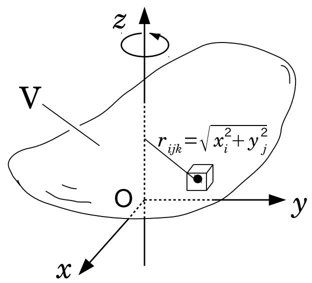

図 12.8 連続的な剛体の回転

さて, 回転軸（z 軸）からの距離 r_{ijk} の二乗は,

$$r_{ijk}^2 = x_i^2 + y_j^2 \tag{12.12}$$

となる（z_k^2 は入らないことに注意せよ!）。すると慣性モーメント I は, 式 (12.5) より,

$$I = \sum_i \sum_j \sum_k \rho\,(x_i^2 + y_j^2)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \tag{12.13}$$

となる。ここで $\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k$ を限りなく小さくすると, それぞれの和は積分に置き換えられ, 次式のようになる:

連続的な剛体の慣性モーメントの定義

$$I = \int\int\int_{\mathrm{V}} \rho\,(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz \tag{12.14}$$

この積分は「体積分」であり（わからない人は数学の教科書を参照せよ）, 積分区間は, 剛体 V の隅から隅までである。

● **問** 164 上の式 (12.13) や式 (12.14) において, カッコの中（つまり r^2）が $x^2 + y^2 + z^2$ でないのはなぜか? (z^2 を入れてはいけないのはなぜか?)

● **問** 165 問 163 で扱ったのと同じ円盤について, ある直径を軸とする回転の慣性モーメント（図 12.9）が次式のようになることを示せ。

$$I = \frac{Mr^2}{4} \tag{12.15}$$

式 (12.11) と式 (12.15) を比べればわかるように, 同じ物体であっても, 回転軸をどのように設定するかに

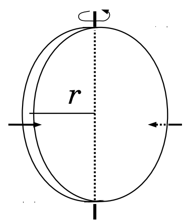

図 12.9　円盤の回転。ただし縦回転。

よって, 慣性モーメントは異なる値をとる。ここでは詳述しないが, 互いに直交する 3 つの回転軸を適切に定めてそれらのまわりの慣性モーメントを求めれば, それをもとに, どんな方向の回転軸についても慣性モーメントを自動的に計算することができる。数学的には, その「適切な 3 つの回転軸」と「そのまわりの慣性モーメント」を求めることは, 行列（対称行列）の固有ベクトルと固有値を求めることに対応する。興味のある人は, しっかりした力学の教科書を参照してみよう。

慣性モーメントは, 農業機械の設計などで重要だ。耕運機は, どのような形・質量のロータリーを搭載するかで大きく性能が決まるが, そのロータリーを駆動するのにどのくらいの出力のエンジンが必要か, などという判断は, 慣性モーメントを含む力学的見地からの設計にかかっている。出力の大きなエンジンならどんな慣性モーメントを持つロータリーも動かせるが, その反面, 重くなるので操作性が悪くなるし, 燃費も悪くなる。

大きな慣性モーメントを持つ物体, 例えば大きな鉄の円盤などが回転すると, 大きな運動エネルギーを持つ。これは, エネルギーの貯蔵装置として利用できる。

例 12.2　太陽光や風力などの不安定なエネルギー源でも, エネルギーが得られるときには大きな鉄円盤を回すことができる。いったんまわり始めた鉄円盤は, 角運動量保存則でまわり続けるので, エネルギーが欲しいときに鉄円盤の回転で発電機を回してエネルギーを取り出すことができる。このようなエネルギー貯蔵装置をフライホイールと呼ぶ。

12.4　慣性モーメントの応用: 斜面を転がる丸い物体

丸い物体が斜面で転がるという現象は, 我々がこどもの頃から馴染み深い, ありふれたシンプルな現象である。ところが, そこには直感に反する, 不思議なことが潜んでいる。そしてそれは慣性モーメントで説明できる。ここでは慣性モーメントをより深く理解する練習として, この現象を考えてみよう。

● **問** 166　傾斜 θ, 高さ h の坂の上から, 半径 R, 質量 M, 慣性モーメント I の物体 X を転がそう（図 12.10)。物体 X は横から見たら丸く見える物体であるとする（球や円筒など)。重力加速度を g とする。

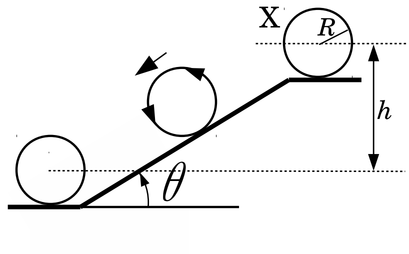

図 12.10　斜面を転がり下る物体 X。

(1)　X のポテンシャルエネルギーを U とする。X が坂の下にあるとき $U = 0$ とする。X が坂の上にあるときの U は? ただし, 一般的に, 一様な外力（重力など）による剛体（変形しない物体）のポテンシャルエネルギーは, 質量が全て重心（この場合は X の中心）に集中すると仮想したときの質点のポテンシャルエネルギーに等しいことがわかっている。

(2)　X は坂の上から初速 0 で転がり出す。X が転がり出したとき（速さは 0）の力学的エネルギー E_0 は?

(3)　X が坂の下まで到達したとき, 重心（X の中心）の速さは v, 回転の角速度は ω であった。このとき,

$$v = R\omega \tag{12.16}$$

が成り立つことを示せ。ヒント：ごく短い時間間隔 Δt の間（v や ω が一定とみなせるくらいに短い時間間隔）に, X は $R\omega\Delta t$ だけ進む。

(4)　X が坂の下まで到達したとき, X の力学的エネルギー E_1 は,

$$E_1 = \frac{M v^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \tag{12.17}$$

となることを示せ。ただし, 運動エネルギーは重心の運動エネルギー（全質量が重心に集中した仮想的な質点の運動エネルギー）と重心まわりの回転の運動エネルギーの和であることがわかっている。

(5)　力学的エネルギー保存則（$E_0 = E_1$）から, 以下の式を導け：

$$Mgh = \frac{M v^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \tag{12.18}$$

(6)　(3) で得た関係と前問から, 以下の式を導け：

$$2gh = v^2\Big(1 + \frac{I}{MR^2}\Big) \tag{12.19}$$

(7)　前問から, 以下の式を導け：

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I/(MR^2)}} \tag{12.20}$$

(8)　慣性モーメント I が 0 の場合, $v = \sqrt{2gh}$ となることを示せ。これは質量 M の質点が坂を滑り降りるときの速さに等しい。

(9)　X が, 質量 M が縁に集中している円環の場合, $v = \sqrt{gh}$ となることを示せ。

(10)　X が, 質量 M が一様に分布している円盤の場合, v はどうなるか?

式 (12.20) から, 円形物体が転がる速さは, $I/(MR^2)$ に依存することがわかる。これは興味深い結論だ。というのも, 円形の物体の慣性モーメントは, 多くの場合, MR^2 に比例するのだ。そのため, $I/(MR^2)$ を求めると, 質量 M や半径 R が約分されて消えてしまうのだ。たとえば,
円環は式 (12.8) より, $I/(MR^2) = 1$
円盤は式 (12.11) より, $I/(MR^2) = 1/2$
球殻は例 12.1 より, $I/(MR^2) = 2/3$
一様に詰まった球は例 12.1 より, $I/(MR^2) = 2/5$
となる。このように, $I/(MR^2)$ は, 物体の質量や大きさによらない, 定数になってしまうことが多い。つまり, 転がる物体の速さは, 物体の質量や大きさによらず, 形状（質量が全体の中のどのあたりに多く分布しているか）によって決まるのだ。たとえば円環の転がる速さは, 円環の質量や大きさによらず同じだし, 円盤の転がる速さは, 円盤の質量や大きさによらず同じである。しかし, 円環と円盤では転がる速さは違うのだ。実際, 式 (12.20) をじっと睨むと, $I/(MR^2)$ が大きければ転がる速さ v は小さくなることがわかる。

● **問** 167　円環, 円盤, 球殻, 中身が一様に詰まった球を, 同じ斜面に転がすことを考える。すると, 速い順に,

(1)　詰まった球 （最も速い）
(2)　円盤
(3)　球殻
(4)　円環 （最も遅い）

となるはずだ。それがなぜか説明せよ。また, やる気があれば（笑）, それを実際に実験して確かめてみよ。円盤のかわりに円柱, 円環のかわりに円筒を使ってもよい。

● **問** 168　ガリレオ・ガリレイは, 質量の異なる 2 つの球を斜面に転がして, 速さが同じであることを観察し, 物体の落下の速さは質量によらない, ということを発見したと言われる。ところが, ガリレイがもし, 片方は中空の球を, もう片方は中身がびっちり詰まった球を, 実験に使ったとしよう。その場合, 科学の歴史はどう変わったと君は考えるか?

12.5　慣性モーメントの応用: 分子の回転運動

慣性モーメントは化学でも重要だ。多原子分子は, 温度に応じて, 並進と振動と回転という 3 種類の運動をする[*4]。この回転運動の性質を解析することで, 分子の様子を調べることができる。

例として, 質量 m の原子 2 個からなる 2 原子分子を考える。原子間の距離を d とする。重心は原子どうしの中間点にある。2 つの原子を結ぶ直線に垂直で重心を通るひとつの直線を軸とする, 回転運動を考える（図 12.11）。重心から各原子までの距離を r とする。当然, $d = 2r$ だ。

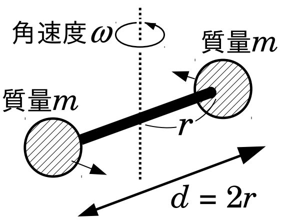

図 12.11　2 原子分子の回転。

P.139 で学んだエネルギー等分配則によれば, 一般に, 絶対温度 T の気体の 1 分子は, ひとつの自由度につき, $k_\mathrm{B}T/2$ という運動エネルギーを平均的に持つ。今考えている回転運動も 1 つの自由度を持った運動といえるので, この回転に関する平均的な運動エネルギー K は,

$$K = \frac{1}{2}k_\mathrm{B}T \tag{12.21}$$

である[*5]。一方, この原子の慣性モーメント I は, 問 158

[*4] ただし常温では, 振動運動は熱にあまり関係しない。
[*5] これまで運動エネルギーは T で表すことが多かったが, この問題では T は温度を表すので, それとの混乱を避けるために, 運動エネルギーを K と書いた。

より, $I = 2mr^2$ だ。従って, 次式が成り立つ:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = mr^2\omega^2 \tag{12.22}$$

● **問** 169　この 2 原子分子について,

(1)　次式を示せ:

$$\omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{k_{\mathrm{B}}T}{2m}} \tag{12.23}$$

(2)　窒素原子 ^{14}N と ^{15}N の質量をそれぞれ求めよ（単位を kg とする)。

(3)　窒素分子の原子間距離は, $d = 0.11$ nm である。常温（300 K）における, $^{14}N_2$ 分子の回転の角速度 ω_1 と, $^{15}N_2$ 分子の回転の角速度 ω_1 を調べよ。両者にはどのくらいの差があるか?

諸君は, 元素の同位体は化学的特性が同じなので, 化学的に分別することは難しいと習っただろう。しかし, この問題でわかるように, 異なる同位体は, 同じ温度のもとでも異なる角速度で回転する。これによって, 異なる同位体が発したり吸収したりする光の波長は微妙に異なる。これが同位体計測の鍵である。

ただし, この問題で扱った方法は, ニュートン力学に基づく「古典的」と言われるものであり, 正確ではない。実際は, 分子の回転運動は古典的な扱いではダメで, 量子力学で扱わねばならない。量子力学的では, 「回転運動の角速度」という概念は意味を持たない。そのかわりに,「角運動量」をもとに理論を組み立てる。しかし, このような古典的な扱いでも, いろんなことがわかるし, 量子力学的な扱いをするときに考え方の出発点となる。

12.6　慣性モーメントの応用: 剛体振り子

大学の「物理学実験」という科目には, 振り子を利用して重力加速度を測る実験が行われることが多い。そこでは, 問 142 で学んだ, 糸に質点がつるされた振り子でなく, 剛体の振り子を使う。ここではその予習をしておこう。

● **問** 170　質量 M の剛体に穴が開けられ, その穴に軸を通して, その軸が定点 P に固定されている (図 12.12)。剛体は軸のまわりに自由に回転することができる。軸のまわりの回転の慣性モーメントを I とする。剛体の重心を G とする。P から G の距離は l である。G が最も下に来たときの位置を O とする。剛体を少し持ち上げて静かに手放すと, 重心 G は鉛直平面内で振動運動をする。時刻 t における重心の位置を G(t) とし, 角 OPG を $\theta(t)$ としよう。空気抵抗は無視する。

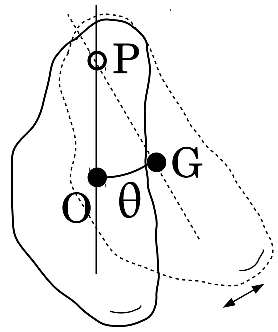

図 12.12　剛体振り子。

(1)　時刻 t における剛体の運動エネルギー $T(t)$ は次のようになることを示せ：

$$T(t) = \frac{1}{2}\,I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{12.24}$$

(2)　時刻 t におけるこの剛体のポテンシャルエネルギー $U(t)$ は次のようになることを示せ。

$$U(t) = M\,g\,l\,(1-\cos\theta) \tag{12.25}$$

ただし, G が点 O にあるとき $U = 0$ と定める。

(3)　力学的エネルギー保存則から, 次式（剛体振り子の運動をあらわす方程式）を得よ：

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -M\,g\,l\sin\theta \tag{12.26}$$

(4)　ここで「等価振り子の長さ」というものを,

$$\bar{l} = \frac{I}{M\,l} \tag{12.27}$$

と定義し, $\bar{l}$ を使って上の方程式を書き換えると, 質点の振り子の方程式（式 (10.35)）と同じ形

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\bar{l}}\sin\theta \tag{12.28}$$

となることを示せ。

(5)　角 θ が十分に 0 に近い範囲で変化するならば, 式 (12.28) は次のように近似できることを示せ:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\bar{l}}\theta \tag{12.29}$$

(6)　上の方程式について, $\theta = \theta_0\cos\omega t$ という式を仮定して代入し, 振動の角速度 ω を求め, 振動の周期 T

が次式のようになることを示せ：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{12.30}$$

(7)　次式を導け:

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l \tag{12.31}$$

12.7　慣性モーメントと角運動量

慣性モーメント I は, 剛体の回転運動の運動エネルギーを式 (12.6) のように表すために定義された。しかし, 慣性モーメントの効用は, もうひとつある。それは, 式 (11.31) に伏線を張ったことである。すなわち, 剛体の角運動量の大きさ L が, $L = I\omega$ と表すことができるのだ。そのことを説明しよう。

いま, n 個の質点からなる剛体の回転運動を考える。すなわち, 全ての質点が一斉に, 同一の回転軸のまわりを角速度 ω で回転しているとする。k 番目 ($k = 1, 2, \cdots, n$) の質点のことを「質点 k」と呼び, その質量を m_k, 回転軸からの距離を r_k とする。

質点 k の速さ v_k は, $v_k = r_k\omega$ である。従って質点 k の運動量の大きさ p_k は, $p_k = mv_k = mr_k\omega$ である。従って, 質点 k の角運動量の大きさ L_k は, r_k と $mr_k\omega$ の積であり, $L_k = mr_k^2\omega$ となる（回転軸から質点へのベクトルと, 質点の速度ベクトルは互いに直交しているので, それらの外積の大きさは, それらの大きさの積になる)。ところで, 全ての質点の角運動量は回転軸と同じ向きを向いているから, 全ての質点の角運動量は互いに同じ向きを向いている。従って, 全質点の角運動量（つまりこの剛体の角運動量）の大きさ L は, 各質点の角運動量の大きさ L_k を単純に足せば求まる。すなわち,

$$L = \sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} mr_k^2\omega = \Big(\sum_{k=1}^{n} mr_k^2\Big)\omega \tag{12.32}$$

となる。ここで慣性モーメントの定義（式 (12.5)）を思い出すと, この式は,

$$L = I\omega \tag{12.33}$$

となる。つまり, 角運動量は慣性モーメントと角速度の積に等しい! *6。

*6 ここで君が注意深い人ならば, 「それはあくまで大きさが等しいだけで, ベクトルとして等しいことは証明されていないじゃないか?」と思うだろう。実は, 式 (12.33) は, ベクトルの方程式に拡張できるのだ。すなわちこういうことだ: 上の議論をベクトルを用いてちゃんと方向まで考えて修正すると, まず, 角速度は, 回転軸の方向を向いているベクトル量とみなすことができて, それを $\boldsymbol{\omega}$ とおき, 「角速度ベクトル」と呼ぶ。また, 質点 k の速度は $\mathbf{v_k} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k$ となる（$\mathbf{r}_k$ は質点 k の位置ベクトル ... 回転軸に垂直なベクトルではなく, 原点からのベクトルであることに注意。すなわち, $\mathbf{r}_k = r_k$ とは限らない)。そして, 質点 k の角運動量は $L_k = \mathbf{r}_k \times (m_k\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k)$ となる。ここで, 3 つのベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ の外積に関する数学の公式に, 以下のようなものがある（「ベクトル三重積」と呼ばれる。「ライブ講義 大学生のための応用数学入門」参照）:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \bullet \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})\mathbf{C} \tag{12.34}$$

これを使うと,

$$\mathbf{L}_k = m_k\{(\mathbf{r}_k \bullet \mathbf{r}_k)\boldsymbol{\omega}\} - (\mathbf{r}_k \bullet \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}_k\} \tag{12.35}$$

となる。これを全ての質点について足したものを $\mathbf{L}$ とすると,

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^{n} m_k\{(\mathbf{r}_k \bullet \mathbf{r}_k)\boldsymbol{\omega}\} - (\mathbf{r}_k \bullet \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}_k\} \tag{12.36}$$

である。これを行列を使って書き換えると, 以下のような式になる:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{L}_x \\ \mathrm{L}_y \\ \mathrm{L}_z \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} y_k^2 + z_k^2 & -x_k y_k & -z_k x_k \\ -x_k y_k & z_k^2 + x_k^2 & -y_k z_k \\ -y_k z_k & z_k x_k & x_k^2 + y_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{12.37}$$

この左辺のベクトルが角運動量 $\mathbf{L}$ であり, 右辺の最後のベクトルが角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ である。そして右辺の行列（Σ を含めて）を「慣性テンソル」と呼び, 改めて I と置く。すなわち,

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \tag{12.38}$$

となるのだ。

これは, 運動量の定義:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{12.39}$$

と似ている。すなわち, 左辺は運動量または「角」運動量で, 右辺は速度または「角」速度に係数がかかっている。その係数が, 片方は質量, もう片方は慣性モーメントである。つまり, 慣性モーメントは, 「回転運動版の質量」のような位置づけの量である。そのことは, 運動エネルギーに関する式 (12.7) でも話題に出たことを思い出して欲しい。

12.8　解答

答 157　(1) 略。(2) 式 (12.5) より, I の単位は $m_k r_k^2$ の単位なので, kg m^2

答 158 式 (12.5) で $n = 2$, $r_1 = r_2 = r$, $m_1 = m_2 = m$ とすればよい。$I = mr^2 + mr^2 = 2mr^2$

答 159 式 (12.5) で $n = 3$, $r_k = r$, $m_k = m$ とすればよい。$I = 3mr^2$

答 160 式 (12.5) で, $r_k = r$, $m_k = m$ とすればよい。

$I = nmr^2$ **答** 161 前問で $nm = M$ とすれば与式を得る。

答 162 円環盤も円環の一種だ。この円環盤をどこか 1 箇所で切ってまっすぐに伸ばしたら, 断面積は $b\Delta r$, 長さは $2\pi r$ の鉄棒になる。その体積は $2\pi br\Delta r$。密度が ρ なので, 質量は $2\pi\rho br\Delta r$。これを M として式 (12.8) に代入すると与式を得る（ただしここでは慣性モーメントを I でなく ΔI と書いていることに注意)。

答 163
(1) 円盤を Δr の幅の n 個の円環盤に分割し, 式 (12.9) で与えられる各円環盤の慣性モーメントを足し合わせると, 円盤の慣性モーメント I になるはずだ。すなわち, 次式のように書ける:

$$I = \sum_{k=1}^{n} 2\pi\,\rho\,b\,r_k^3\Delta r \tag{12.40}$$

ここで r_k は k 番目の円環盤の半径である。分割をどんどん細かくして Δr を十分に 0 に近づけ, 円環の数をどんどん増やすならば, この式は次式のようになる:

$$I = \int_0^R 2\pi\,\rho\,b\,r^3\,dr \tag{12.41}$$

ここで R は円盤の半径である。この積分を実行すると, $I = \pi\,\rho\,b\,R^4/2$。ここで改めて R を r に置き換えると, 式 (12.10) を得る。
(2) この円盤の質量 M は, $M = \pi\,\rho\,b\,r^2$ なので, 式 (12.10) より $I = M\,r^2/2$ となり, 式 (12.11) を得る。
(3) 同質量の円環の慣性モーメントは式 (12.8) より Mr^2 である。この円盤の慣性モーメント（前小問で求めた）$Mr^2/2$ は, それの半分である。

答 164 慣性モーメントの本来の定義, つまり式 (12.5) では, r_k は原点からの距離ではなく, 回転軸からの距離だった。連続的な剛体に関する慣性モーメントも事情は同じだ。従って, 剛体の各部分について, r として原点からの距離つまり $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ではなく, 回転軸（z 軸）からの距離つまり $\sqrt{x^2+y^2}$ を考えねばならない。

答 165 回転軸を z 軸, それに直交して円盤の直径方向に x 軸, 厚さ方向に y 軸をとる。円盤の中心を原点とする。円盤の厚さを b とする。密度を ρ とする。円盤上の点 (x, y, z) と z 軸との距離は $\sqrt{x^2+y^2}$ だ。慣性モーメント I は, 式 (12.14) より

$$I = \int_{-r}^{r}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-\sqrt{r^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} \rho(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

である。ここで円盤が十分に薄いとすれば, $x^2+y^2 \fallingdotseq x^2$ であり, その近似のもとに, y について先に積分すれば（このような積分は積分の順序を適宜, 入れ替えて構わない）,

$$I = b\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} \rho x^2\,dx\,dz \tag{12.42}$$

となる。これを x について積分すれば,

$$I = b\int_{-r}^{r}\Big[\rho\frac{x^3}{3}\Big]_{-\sqrt{r^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} dz = \frac{2b\rho}{3}\int_{-r}^{r}(r^2-z^2)^{3/2}\,dz$$

となる。この被積分関数は z に関する偶関数だから,

$$I = \frac{4b\rho}{3}\int_0^r (r^2-z^2)^{3/2}\,dz \tag{12.43}$$

となる。ここで $z = r\sin\theta$ と置換すると（置換積分）, $dz = r\cos\theta\,d\theta$ であり, 積分区間は $0 \le \theta \le \pi/2$ であり, 被積分関数は $(r^2-z^2)^{3/2} = (r^2 - r^2\sin^2\theta)^{3/2} = \{r^2(1-\sin^2\theta)\}^{3/2} = (r^2\cos^2\theta)^{3/2} = r^3\cos^3\theta$。従って, $I =$

$$\frac{4b\rho}{3}\int_0^{\pi/2} r^3\cos^3\theta\,r\cos\theta\,d\theta = \frac{4br^4\rho}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta$$

ところで, オイラーの公式から,

$$\begin{aligned}
\cos^4\theta &= \Big(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\Big)^4 \\
&= \frac{e^{4i\theta}+4e^{2i\theta}+6+4e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}}{16} \\
&= \frac{e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}}{16} + \frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{4} + \frac{3}{8} \\
&= \frac{\cos 4\theta}{8} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{3}{8}
\end{aligned} \tag{12.44}$$

従って,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{4br^4\rho}{3}\int_0^{\pi/2}\Big(\frac{\cos 4\theta}{8} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{3}{8}\Big)d\theta \\
&= \frac{4br^4\rho}{3}\Big[\frac{\sin 4\theta}{32} + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{3\theta}{8}\Big]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{4br^4\rho}{3}\frac{3\pi}{16} = \frac{\pi br^4\rho}{4} = \frac{Mr^2}{4}
\end{aligned} \tag{12.45}$$

ここで, $M = \pi br^2\rho$ を使った。

答 166
(1) $U = Mgh$。
(2) 速さが 0 なので, 運動エネルギーは 0。従って力学的エネルギー E_0 はポテンシャルエネルギー U だけである。従って (1) より, $E_0 = Mgh$
(3) 速さは進んだ距離 $(R\omega\Delta t)$ を時間 (Δt) で割ったも

のなので, $R\omega\Delta t/\Delta t = R\omega$。
(4) 重心の運動エネルギーは, $Mv^2/2$ であり, 回転の運動エネルギーは（式 (12.6) より）$I\omega^2/2$ である。これらを足すと, 与式を得る。
(5) (1) と (4) より, 与式を得る。
(6) 前小問の式に (3) の結果を代入して v を消すと,

$$Mgh = \frac{M\,R^2\omega^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \tag{12.46}$$

となる。両辺を 2 倍して M で割ると, 与式を得る。
(7) 略（式 (12.19) を $v =$ の形に式変形すればよい)。
(8) 略（式 (12.20) に $I = 0$ を代入するだけ)。
(9) 式 (12.8) より, $I = MR^2$。これを式 (12.20) に代入して与式を得る。注: 式 (12.8) の r を勝手に R に置き換えて良いのか? と思う人は, それぞれの式で使われている記号の定義に戻って考えよう。
(10) 式 (12.11) を式 (12.20) に代入して, $v = \sqrt{4g\,h/3}$

答 168 略（自由に考え, 友人と議論せよ。それが大学の学び)。

答 169 略。(3) は 10^{12}/s〜10^{13}/s 程度の量になる。

答 170
(1) 剛体の振動運動は, ごく短い時間を切り出して考えれば, 軸を中心とする回転運動の一部とみなすことができる。その角速度 ω は, 単位時間あたりに変化する角なので, θ を時刻 t で微分したものに等しい。従って, $\omega = d\theta/dt$ である。これを式 (12.6) に代入して, 与式を得る。
(2) 剛体の（重力による）ポテンシャルエネルギーは, 基準点からの重心の高さと全質量, そして重力加速度をかけたものに等しい。題意より, 定点（軸の位置）P から原点 O までの距離は l である。P から重心 G までの距離も l だが, 剛体が角 θ だけ傾いているときは, P と G の高さの差は, $l\cos\theta$ となる。従って, 原点 O と重心 G の高さの差は $l - l\cos\theta$ となる。従って, ポテンシャルエネルギーは与式のようになる。
(3) 力学的エネルギー保存則より, $T(t) + U(t)$ は時刻によらぬ定数である。従って, $T(t)+U(t)$ を t で微分したら恒等的に 0 になる。従って,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\{T(t) + U(t)\}\\&= \frac{d}{dt}\Big\{\frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + M\,g\,l\,(1-\cos\theta)\Big\}\\&= I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) + M\,g\,l\,\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt} = 0\end{aligned}$$

この式から与式を得る。
(4) 略（式 (12.27) を使って式 (12.26) から I を消去すると式 (12.28) を得る)。
(5) $\sin\theta = \theta$ と近似すれば与式を得る。
(6) 注: 以下の ω は (1) で出てきた ω とは別物である。$\theta = \theta_0\cos\omega t$ を式 (12.29) に代入すると,

$$-\omega^2\theta_0\cos\omega t = -\frac{g}{l}\theta_0\cos\omega t \tag{12.47}$$

となる。これが全ての t について成り立つから, $\omega^2 = g/l$。振動の周期 T は, $T = 2\pi/\omega$ より, 与式を得る。
(7) 式 (12.30) を $g =$ の形に式変形すれば与式を得る。

第13章

熱力学入門

熱力学は「化学」や秋学期「物理学」で学ぶ。しかし，それらは力学と多くの接点を持つので，ここで概略を学んでおこう。

13.1　粒子の運動エネルギーと温度

物質や物体は，膨大な数の原子や分子から構成される。それらの粒子どうしは引力や斥力を及ぼしあい，時には衝突しつつ共存する。その様子を知るには，原理的には全粒子のそれぞれについて運動方程式を解いて追跡すればよい。そのように個々の粒子の挙動に注目する観点を微視的（ミクロ）な観点という。

しかし，現実的にはそれは大変だし，そこまでのくわしい様子を知る必要も少ない。むしろ，興味があるのは，粒子集団が，全体として，平均的にどのような性質を持つか，ということだ。そのような観点を巨視的（マクロ）な観点という。

熱力学は，物質や物体の巨視的な性質を検討する。そのときに最初に便利な指標が温度だ。温度とは何だろう？ 温度には様々な定義があるが，わかりやすいのは以下である[*1]（必ず覚えよう）：

絶対温度の定義（エネルギー等分配則とも言う）

物体を構成する粒子について，ひとつの粒子・ひとつの自由度における平均的な運動エネルギー K が

$$K = \frac{1}{2}\, k_{\mathrm{B}} T \tag{13.1}$$

と書けるとき，T をその物体の絶対温度と呼ぶ。k_{B} はボルツマン定数と呼ばれる定数で，

$$k_{\mathrm{B}} = 1.38065... \times 10^{-23}\ \mathrm{J\ K^{-1}} \tag{13.2}$$

式 (13.1)，式 (13.2) をもとに定義される温度の単位を，K（ケルビン）という[*2]。

ここで自由度とは，独立した「運動の仕方」の数である。たとえば単原子分子からなる気体（図 13.1）では，ひとつの分子（=原子）は 3 つの各方向 (x 方向，y 方向，z 方向）に自由に直線運動ができ，各方向の運動は互いに独立である（x 方向に大きな速度で飛ぶからといって y 方向にはゆっくり飛ばねばならない，というような制約は存在しない)。従って，自由度は 3 である。

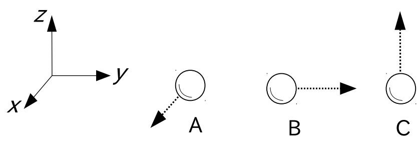

図 13.1　単原子分子気体の自由度。A: x 方向の直線運動，B: y 方向の直線運動，C: z 方向の直線運動。

式 (13.1) は，粒子の運動エネルギーが，平均的には，各自由度に等しく割り当てられることも主張している。例えば，ある物質の中で，多くの粒子が同じ特定の方向にだけ激しく運動して，その方向の自由度だけに大きな運動エネルギーを持つ，というような「偏った状態」にはならない，ということだ[*3]。その事情を表して，式 (13.1) のことをエネルギー等分配則と呼ぶこともある。

式 (13.1) は「温度の定義」なので，とりあえずその由来や正当性に疑問を持つ必要はない。むしろ不思議なのは，式 (13.1) のように定義される温度が，我々の感覚である熱さ・冷たさや，温度計の指す値にきちんと対応していることだ。そのあたりは「化学」や秋学期の「物理学」などで学んでもらうとしよう。

式 (13.1) は，粒子の平均的な運動エネルギーは物体の温度に比例することを主張している。その比例係数に

[*1] ここで温度を T と表すことに注意。これまでは T は運動エネルギーを表していたが，慣習的には温度を表す方が多い。そこで，この章では運動エネルギーは T ではなく K で表す。

[*2] 温度の単位を表す K の記号は，他の単位の記号と同じように，立体（正体; ローマン体）である。それに対して，式 (13.1) の左辺に出てくる，運動エネルギーを表す変数 K は，斜体で書いていることに注意。これらは全く別物だ。

[*3] それにはちゃんとした理由があるのだが，難しいのでここでは述べない。興味ある人は，「統計力学」という分野を勉強してみよう！

「ボルツマン定数」という怪しげな数とか「1/2」とかが現れているが, これらは「ケルビン」という「温度の単位」を人類が採用してしまったことに対応するつじつま合わせ（単位換算）のための数に過ぎない。実際, 運動エネルギーと温度が比例するのなら, いっそ（粒子の 1 自由度あたりの平均的な）運動エネルギーそのものを温度としてしまえばよかったのだが, 今さらそれもめんどくさいので, 人類はこれからも, 温度とエネルギーを別の次元の物理量として扱っていくのだろう。

● **問** 171 絶対温度の定義を 5 回書いて記憶せよ。

我々の日常では, 温度は「摂氏」で表すことが多い。ある物体が摂氏温度で t ℃のときの絶対温度を T K とすると, $t = T - 273.15$ と定義されている[*4]。歴史的な由来では, 水が凍る温度を 0 ℃, 沸騰する温度を 100 ℃とするのが摂氏の由来だが, 現在はそのような現象ではなく, 絶対温度との換算式によって摂氏は定義されている。

● **問** 172 以下は Twitter に出ていた小話である:

—

教員「太陽表面の温度は****度と推定されている」

学生「先生, それは摂氏ですか, それとも絶対温度ですか?」

教員「(少し考えて) どっちでもいい」

—

なぜ教員は「どっちでもいい」と言ったのか?

● **問** 173 質量 m の気体分子の運動を考える。各分子が速度 (v_x, v_y, v_z) で空間を飛ぶとき, エネルギー等分配則によって, v_x に関する運動エネルギー, つまり $mv_x^2/2$ の平均は, $k_\mathrm{B}T/2$ となる。従って, 平均的には[*5]

$$|v_x| = \sqrt{\frac{k_\mathrm{B}T}{m}} \tag{13.3}$$

となる。$|v_y|$, $|v_z|$ についても同様である。すると, 速度の大きさ（つまり速さ）v は,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{13.4}$$

なので, v は平均的には,

$$v = \sqrt{3\frac{k_\mathrm{B}T}{m}} \tag{13.5}$$

となる。以下, $T = 300$ K（摂氏 27 度）で考える:

(1) 水素分子 H_2 の x 方向の平均的な速さを求めよ。

(2) 水素分子 H_2 の平均的な速さを求めよ。

(3) 窒素分子 N_2 の平均的な速さを求めよ。

ところで,「化学」で, グラハムの法則というのを習った人もいるだろう。それは, 気体分子の速さ v が, その質量 m の平方根に反比例する, という法則だ。これは, 式 (13.5) で明らかだ。

13.2 理想気体の状態方程式（気体分子運動論）

これまで学んだことを使って, 気体の温度・圧力・体積の間の関係を理論的に導いてみよう。

今, 簡単のため, 一辺の長さが L の立方体の箱を考える。図 13.2 のように, 立方体の中心を原点 O とし, x, y, z 軸のそれぞれに立方体の面が直交するように座標軸を設定する。点 $(L/2, 0, 0)$ で x 軸と直交する面を面 A と呼ぶ。

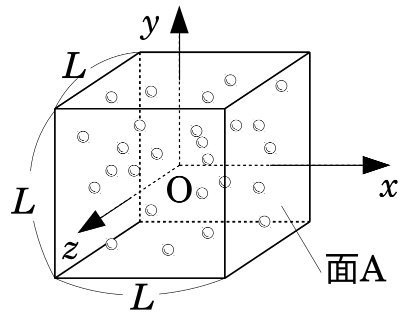

図 13.2 気体分子の運動を考える座標系と箱。

この箱の中に, N 個の気体分子が入っているとする。ここで, 以下の仮定を置く:

理想気体の仮定

- 気体分子の大きさは十分に小さい。
- 気体分子同士に働く内力は無視できる。

この 2 つの仮定を満たす分子からなる気体を「理想気体」という[*6]。今, 立方体の中には理想気体が入っているとする。

[*4] この 273.15 に単位をつけていないことに注意。普通, 物理量の記号は単位を内包して定義するが, ここでは t ℃, T K というふうに, 単位を記号の外につけたので, t, T が表す量は無次元である。従って 273.15 も無次元量であり単位は不要。

[*5] 厳密には, v_x の二乗平均平方根 (root-mean-square)。

[*6] 理想気体は厳密な意味では現実には存在しない。現実の気体は多かれ少なかれ, 理想気体とは違った性質を持つ。現実の気体のめんどくさい性質を忘れて, 単純化して理論的に扱いやすくしたのが理想気体である。つまり, 理想気体は一種の「モデル」である。とはいえ, 多くの場合で, 現実の気体を理想気体として扱っても概ね OK である。理想気体は優れたモデルなのだ。

箱の内側では気体分子が飛び交っており, 絶えずその一部が面 A に内側から衝突し, 跳ね返されている。この衝撃が, 面 A を外に押し出そうとする。従って, それを打ち消すように, 外側から適当な圧力（P とする）をかけないと, この箱は壊れてしまうだろう（図 13.3)。

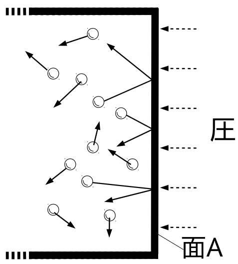

図 13.3　面 A の付近（z 軸の正の方向から見たところ)。分子が面 A にひっきりなしにぶつかるので, 面 A を外側から圧力 P で支えていないといけない。

その事情を詳しく見てみよう: 今, 簡単のために, どの気体分子も, x 軸に沿った方向（x 軸の正の方向か負の方向）に一定値 v_x という速さで動いているとしよう ($0 < v_x$ とする)。つまり, x 軸方向の速度は, v_x か $-v_x$ であるとする（実際は気体分子の速度はもっといろんな可能性があり, x 軸に沿った速度の二乗平均平方根が v_x に等しいだけだが, 仮にそういうのを考慮して厳密に理論展開しても, 以下と同じ結論に至る)。従って, どの気体分子も, 時間 Δt の間に, $v_x\Delta t$ だけ x 軸に沿って移動する（そのうち半分は面 A に向かう方向で, のこりは面 A から離れる方向である。そのことは後で考慮する)。従って, 時間 Δt の間に, 内側から面 A に衝突する気体分子は, 面 A から距離 $v_x\Delta t$ までの領域にいるはずだ。その領域の体積は

$$L^2 v_x \Delta t \tag{13.6}$$

である。箱の中の気体分子は均等に分布すると考えれば, 上述の領域の中の分子数は, 領域の体積に比例するので,

$$\frac{L^2 v_x \Delta t}{L^3} N \tag{13.7}$$

となる[*7]。この個数のうち, 半分が x 軸の正方向（面 A に向かう方向), 半分が x 軸の負の方向（面 A から離れる方向）に進むので, 面 A に衝突する個数は,

$$\frac{1}{2}\frac{L^2 v_x \Delta t}{L^3} N = \frac{N v_x \Delta t}{2L} \tag{13.8}$$

となる。

さて, 気体分子 1 個が面 A にぶつかって跳ね返る状況を考えよう。気体分子が跳ね返る時, 面 A との間に摩擦が働かず, 分子の運動エネルギーは変化しない（弾性衝突）とすると, 面 A に平行な速度成分 (v_y と v_z) は変化せず, 面 A に垂直な成分（v_x）が, 大きさを変えずに符号だけ反転する。すると, x 方向の運動量は, 衝突前は mv_x, 衝突後は $-mv_x$ になるので, 結局, 1 個の気体分子の衝突前後の運動量変化は次式になる:

$$-mv_x - (mv_x) = -2mv_x \tag{13.9}$$

実際は 1 個でなく, 式 (13.8) で表される個数が Δt の間に面 A にぶつかるので, それらの運動量変化の合計は次式になる:

$$\frac{N v_x \Delta t}{2L} \times (-2mv_x) = -\frac{N m v_x^2 \Delta t}{L} \tag{13.10}$$

この運動量変化は, 面 A に外側からかかる力がもたらす力積に等しいはずだ（運動量変化=加えられた力積)。

面にかかる力は, 圧力×面積であり, 面 A の面積は L^2 だ。従って, 面 A に（外側から）かかる力は $-PL^2$ である（マイナスは, 力の向き, つまり x 軸の負の方向を表すためにつけた)。その力による力積は,

$$-PL^2\Delta t \tag{13.11}$$

となる。式 (13.10) と式 (13.11) が一致することが, 面 A が静止する条件である:

$$-PL^2\Delta t = -\frac{N m v_x^2 \Delta t}{L} \tag{13.12}$$

これを整理すると,

$$PL^3 = Nmv_x^2 \tag{13.13}$$

となる。いま, L^3 は箱の体積 V なので, 式 (13.13) は

$$PV = Nmv_x^2 \tag{13.14}$$

となる。さらに, 式 (13.3) より,

$$v_x^2 = \frac{k_\mathrm{B} T}{m} \tag{13.15}$$

なので, 式 (13.14) は, 以下のようになる:

[*7] 箱の体積は L^3 であり, その中に N 個の気体分子が均等に分布している。従って, 箱の中の気体分子の数密度（単位体積当たりの分子数）は, N/L^3 だ。これに, いま考えている領域の体積 (式 (13.6)) をかければ, その領域内の気体分子数が得られるはずだ。それが式 (13.7) である。

理想気体の状態方程式

$$PV = Nk_BT \tag{13.16}$$

ここで, 分子数を「個」でなくて「モル」で数えよう。すなわち, N 個が n モルに相当するとすれば, $N = nN_A$ である(N_A はアボガドロ定数で, 約 $6.02\times10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$)。従って, 式 (13.16) は, 以下のようになる:

$$PV = nN_Ak_BT \tag{13.17}$$

ここで物理学の慣習として, 以下の定数を導入する:

気体定数の定義

以下で定義される定数 R を, 気体定数 (gas constant) と呼ぶ:

$$R = N_Ak_B \tag{13.18}$$

その値は, 8.314472... $\mathrm{J\ mol^{-1}K^{-1}}$ である。

すると, 式 (13.17) は, 以下のように書ける[*8]:

理想気体の状態方程式（モルで表す場合）

$$PV = nRT \tag{13.19}$$

● **問** 174　理想気体とは何か?

● **問** 175　理想気体の状態方程式を導出せよ（上記の解説を整理して再現すればよい)。

● **問** 176

(1)　ボルツマン定数 k_B の値を, 有効数字 3 桁で述べよ。
(2)　気体定数 R の値を, 有効数字 3 桁で述べよ。
(3)　ボルツマン定数と気体定数の関係を, 式で述べよ。

13.3　理想気体の内部エネルギーと温度

さて, 物質や物体を構成する全ての粒子のエネルギー（運動エネルギーとポテンシャルエネルギー）を合計したものを, その物質や物体の「内部エネルギー」という（定義)。ここで, 理想気体を考えよう。**理想気体では**, 気体分子が相互に及ぼす力は無視できるので, 気体分子同士が及ぼし合う力によるポテンシャルエネルギーは無視してもかまわない。また, 非常な低温でもない限り, 重力によるポテンシャルエネルギーは, 運動エネルギーよりはるかに小さい。従って, 理想気体の内部エネルギーは, 大部分が構成粒子（気体分子）の運動エネルギーの総和であると考えてよい。また, 化学反応等が気体内で起きる状況はとりあえず今は考えない（後で考察する)。

エネルギー等分配則によれば, 運動エネルギーは 1 粒子あたり・1 自由度あたり, 平均的に $k_BT/2$ だ。すると, 自由度 F を持つ気体分子が N 個からなる気体の内部エネルギーを $U_{理想気体}$ とすると[*9],

$$U_{理想気体} = \frac{F}{2}Nk_BT \tag{13.20}$$

となる。すなわち, **理想気体の内部エネルギーは, 温度に比例し, 圧力や体積とは直接には無関係である**[*10]。

さて, 式 (13.20) において分子が n モルあるとすると, $N = nN_A$ だから,

$$U_{理想気体} = \frac{F}{2}nN_Ak_BT \tag{13.21}$$

となる。式 (13.18) を使うと,

$$U_{理想気体} = \frac{F}{2}nRT \tag{13.22}$$

となる。特に, 分子数を 1 モルとすると,

$$U_{理想気体} = \frac{F}{2}RT \tag{13.23}$$

となる。

では, 自由度 F はどう決まるのだろうか? 前述のように, 単原子分子気体 (He, Ne 等）は 3 方向の直線運動の自由度を持つので $F = 3$ である。ところが, 2 原子分子 (H_2, O_2, N_2 等）は直線運動だけでなく, 回転運動も行う[*11]。直線状の棒を回すのには独立した（つまり互いに直交した）軸が 2 つある[*12]ので, これらの回転の自由

[*8] 高校物理では気体分子運動論と状態方程式から式 (13.1) を導く, というストーリーだが, 物理学の理論体系では話は逆であり, まず式 (13.1) が基本原理から導かれ, そしてそれを気体分子運動論に適用して状態方程式が導かれる（ここで見たように)。

[*9] 力学では, U は多くの場合, ポテンシャルエネルギーを表す記号として慣習的に使われる。しかし, 熱力学では慣習的に U は内部エネルギーを表す。ここでは熱力学の慣習に従う。

[*10] もちろん, 圧力と体積は温度と関係があるから, 圧力や体積は, 温度を介して間接的な関係はある。

[*11] 回転運動にも運動エネルギーが与えられることは, 後の章で学ぶ。

[*12] 一般に, 物体を回転させる独立な回転軸は 3 つある。しかし, 直線状の分子の場合は, 直線の断面は大きさを持たない点とみなしてよい。従って, 直線を軸にする回転は考えなくてよい。同様に, 1 原子分子は点とみなしてよいので, いずれの方向を軸とする回転も, 考えなくてよい。

度は 2 である。従って, これらの分子の自由度 F は, 直線運動に 3, 回転運動に 2 で, 合計 5 となる（図 13.4)。

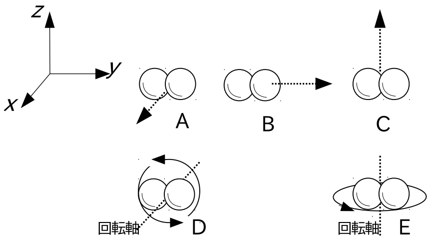

図 13.4　2 原子分子気体の自由度。A: x 方向の直線運動, B: y 方向の直線運動, C: z 方向の直線運動, D: x 軸まわりの回転運動, E: z 軸まわりの回転運動。

従って,

$$\text{単原子分子理想気体では}, U_{\text{理想気体}} = \frac{3}{2}nRT \tag{13.24}$$

$$\text{2 原子分子理想気体では}, U_{\text{理想気体}} = \frac{5}{2}nRT \tag{13.25}$$

となる[*13]。

このように, 同じ温度, 同じモル数であっても, 分子が単原子分子か, 2 原子分子かによって, 内部エネルギーは違うのである。分子が複雑な運動をする可能性があるほど（つまり自由度が大きいほど）, 気体は大きな内部エネルギーを持つのである。[*14]。

ただし, これらの式は（たとえ理想気体に対しても）厳密には成り立たない。特に, 低温になると, 回転の自由度が意味を持たなくなる（自由度が減る）とか, 高温になると振動の自由度が加わってくる（自由度が増える）などの, 不思議な現象が起きる。それらは量子力学を使わないと説明できない。

よくある質問 170　水 H_2O みたいな 3 原子分子はどうなるのですか? ... 水は V 字型の分子なので, 3 つの軸の全てについて回転運動を考える必要があります。従って回転の自由度が 3。直線運動の自由度が 3 なので, 合わせて自由度は $F = 6$。式 (13.23) より, $U = (6/2)nRT = 3nRT$ になります。ただし, 二酸化炭素 CO_2 のような直線状の分子なら, 3 原子分子であっても回転の自由度は 2 で, 2 原子分子のように $F = 3 + 2 = 5$ で $U = (5/2)nRT$ です。

*13 高校で化学や物理学を学んだ人は, この 3/2 や 5/2 は「定積モル比熱」と「定圧モル比熱」の話か, と思うかもしれないが, そうではない。その話はこの後に出てくる。

*14 理想気体では分子の大きさは無視できるはずなのに, 「2 原子」分子を考えるのは変ではないか, と思う人もいるかもしれない。実は, 理想気体で「分子の大きさを無視する」としたのは, 分子の大きさによって容器（分子が自由に飛び交うことのできる空間）の体積が実質的に目減りするようなことがない, という意味だ。それに対して, 2 原子分子を考えるのは, 分子の回転運動が運動エネルギーを持つという性質を勘案するためであり, それは理想気体の仮定とは無関係である。

13.4　熱容量と比熱

ある物体の熱容量とは, その物体の温度を単位温度だけ上げるのに必要な熱のことである。すなわち, ある物体に熱 dQ を加えた時の温度の変化が dT のとき, dQ/dT を熱容量と呼ぶ（定義)。熱容量は温度によって変わることがあるので, この dQ や dT は, できるだけ小さい値（微小量）であるべきである。

単位量の物質の熱容量を「比熱」という。すなわち, ある物体の物質量が X であり, その物質に熱 dQ を加えた時の温度の変化が dT のとき, $dQ/(X\,dT)$ のことを比熱と呼ぶ（定義)。特に, 物質量 X を質量で表すときに「比熱」と呼び, 物質量 X をモルで表すときには「モル比熱」と呼ぶ。

熱容量は「物体」に関する量であり, 比熱は「物質」に関する量である。

● **問** 177　熱容量, 比熱, モル比熱のそれぞれの SI 単位は, J K^{-1}, J K^{-1} kg^{-1}, J K^{-1} mol^{-1} であることを確認せよ。

よくある質問 171　熱と熱量はどう違うのですか?... 同じ意味です。強いていえば, 後者はその大きさを定量的に考えるときに使われがちかもしれません。

13.5　理想気体の定積モル比熱

では, 理想気体の比熱について学ぼう。ここではモル比熱を考える。

気体に熱を加えたら, 普通, 気体はあたたまるだろう。しかし, 同時に, 気体は膨張もする。このとき, 問 59 で見たように, 気体は仕事をする。その仕事のぶんだけ, どこかからエネルギーが必要である（エネルギー保存則!)。それは, 気体に加えられた熱かもしれないし, 気体がもともと持っていた内部エネルギーかもしれない。

とりあえずそういう面倒なことを考えるのは避けたいので, 温めても気体は膨張しない条件, すなわち気体をガッチリした容器に入れて体積が変わらないようにして温めることを考えよう。このように体積一定での変化を定積変化とか定積過程と呼ぶ。定積変化でのモル比熱を定積モル比熱と呼び, C_v と書く（添字の v は, volume の v。volume が変わらないよ, という意味)。

体積が変わらないなら, 加えた熱は全部内部エネルギーに変わる。n モルの理想気体の内部エネルギー U は, 式 (13.22) より,

$$U_{\text{理想気体}} = \frac{F}{2} nRT \tag{13.26}$$

である。ここで熱 dQ を加えて温度が dT だけ上がったとすると, 内部エネルギーは $U_{\text{理想気体}} + dQ$, 温度は $T + dT$ になるから,

$$U_{\text{理想気体}} + dQ = \frac{F}{2} nR(T + dT) \tag{13.27}$$

である。式 (13.27) から式 (13.26) を辺々引くと,

$$dQ = \frac{F}{2} nR\, dT \tag{13.28}$$

となる。従って, 定積モル比熱は,

$$C_{\text{v}} = \frac{dQ}{n\, dT} = \frac{F}{2} R \tag{13.29}$$

となる。特に,

$$\text{単原子分子理想気体では}, C_{\text{v}} = \frac{3}{2} R \tag{13.30}$$

$$\text{2 原子分子理想気体では}, C_{\text{v}} = \frac{5}{2} R \tag{13.31}$$

である。そして, 式 (13.29) と式 (13.22) を見比べれば,

$$U_{\text{理想気体}} = n\, C_{\text{v}}\, T \tag{13.32}$$

であることがわかる。この式は, 明らかに, 定積変化という条件とは無関係に成り立つ。つまり, 理想気体の内部エネルギーは, 一般的に, モル数と定積モル比熱と絶対温度の積である。

では,「体積一定」という条件を外したら, 理想気体のモル比熱はどうなるだろうか? それを検討するには, 気体の内部エネルギーと熱と仕事について, ここでしっかり考え方を固めておかねばならない。それが次節の内容である。

13.6　熱力学第一法則はエネルギー保存則

ここでいったん理想気体の話から離れて, すごく一般的な話をする。

我々は既に「力学的エネルギー保存則」を学んだが, エネルギーは, 熱も含めて, より広い範囲で保存する（どこかに消えたりどこかから湧いて出たりしない）。熱力学的には, 以下の法則である:

$$\Delta U = Q + W \tag{13.33}$$

ただし, U は系（今は一般的な話をしているので, それは理想気体であってもなくても構わない）の内部エネルギー, ΔU は内部エネルギーの変化, Q は外から系に与えられた熱, W は外から系になされた仕事である。これを熱力学第一法則という。要するに「熱と仕事が与えられたぶんだけエネルギーが増える」というわけだ。

● **問 178**　熱力学第一法則 (式 (13.33)) を 5 回書いて記憶せよ。「ただし書き」もちゃんと書くこと!

ここで, ΔU は微小量でなくても構わない。普通, Δ なんちゃらというと,（有限な）微小量を考えることが多いが, 熱力学で出てくる Δ は「微小」ではない, 単なる「差」とか「変化」を表す。微小を意味するときは, Δ でなく d を使うことが多い。微小量で式 (13.33) を表現すると,

$$dU = dQ + dW \tag{13.34}$$

となる（dQ は外から系に加えられた微小な熱, dW は外から系になされた微小な仕事）。ところが, 式 (4.34) で学んだように, 気体の体積の微小な変化 dV に伴って, 系が外界からされる仕事は,

$$dW = -P\, dV \tag{13.35}$$

である。これを使うと上の式は,

$$dU = dQ - P\, dV \tag{13.36}$$

と書ける。これを変形すると, 次式になる:

$$dU + P\, dV = dQ \tag{13.37}$$

これは微小量での式だが, **もし圧力 P が一定ならば**, 容易に積分できて,

$$\Delta U + P\Delta V = Q \tag{13.38}$$

となる。

これらの話は, 本章の後半, そして, 熱力学や化学の大変重要な基礎である。

13.7　理想気体の定圧モル比熱

では, 理想気体の話に戻って, もう少し理想気体の性質を調べていこう。前々節では「体積一定」という条件で, 理想気体のモル比熱を調べた。こんどはその条件を外して, かわりに「圧力一定」という条件で考えよう。そのような条件での変化を「定圧変化」とか「定圧過程」という。定圧過程でのモル比熱を「定圧モル比熱」と呼

び, C_p と表す（添字の p は, pressure の p。pressure が変わらないよ, という意味)。

C_p を求めるには, 熱力学第一法則から出発する。ここでは式 (13.37) から出発しよう。この式の左右を入れ替え, 式 (13.32) を使えば,

$$dQ = nC_\mathrm{v}dT + P\,dV \tag{13.39}$$

である。

ところで, 理想気体の状態方程式から, $PV = nRT$ である。P と n は一定であり, R は定数なので, $P\,dV = nR\,dT$ である。これを上の式に代入すれば,

$$dQ = nC_\mathrm{v}dT + nR\,dT = n(C_\mathrm{v} + R)\,dT \tag{13.40}$$

となる。従って, $dQ/(n\,dT) = C_\mathrm{v} + R$ となる。これが C_p なので, 結局,

$$C_\mathrm{p} = C_\mathrm{v} + R \tag{13.41}$$

である。つまり, 定圧モル比熱は, 定積モル比熱に気体定数を加えたものである。

● **問** 179　以下を示せ:

$$\text{単原子分子理想気体では, } C_\mathrm{p} = \frac{5}{2}R \tag{13.42}$$

$$\text{2 原子分子理想気体では, } C_\mathrm{p} = \frac{7}{2}R \tag{13.43}$$

13.8　理想気体のゆっくりした断熱変化

理想気体が, ピストン付きのシリンダーに密閉されている状況（図 4.6 のような状況）を考えよう。壁とピストンが断熱材でできていて, シリンダーの内側と外側の間で熱が移動しないとしよう。ここで, ピストンをゆっくり押し込んだり引き出したりして気体の体積を変化させると, 温度や圧力はどう変わるだろうか? このような, 外部とは熱のやりとりは無く, 仕事のやりとりはあり得るような状況での変化を断熱変化とか断熱過程という。

理想気体分子のモル数を n とする。温度, 圧力, 体積, 内部エネルギーをそれぞれ T, P, V, U とし, それらの微小変化を dT, dP, dV, dV とする。気体定数を R, 定圧モル比熱を C_p, 定積モル比熱を C_v とする。変化前の状態を状態 1 とし, 変化終了後の状態を状態 2 とする。それぞれの状態での量を, 下付きの数字で表す。

● **問** 180　理想気体のゆっくりした断熱変化を考える。
(1) 式 (13.36) の dQ はこの場合では 0 になること, そして, $dU = -P\,dV$ となることを示せ。
(2) 式 (13.32) より, $dU = n\,C_\mathrm{v}\,dT$ となることを示せ。
(3) 状態方程式 $P = nRT/V$ と, (1), (2) より,

$$\frac{dV}{V} = -\frac{C_\mathrm{v}}{R}\frac{dT}{T} \tag{13.44}$$

となることを示せ。
(4) この式の両辺を状態 1 から状態 2 まで積分することで（C_v/R は定数とみなしてよい）,

$$V_1 T_1^{C_\mathrm{v}/R} = V_2 T_2^{C_\mathrm{v}/R} \tag{13.45}$$

となることを示せ。
(5) ここで T_1, T_2 を状態方程式で消去し, 最後に式 (13.41) を使うことで, 次式を示せ:

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \tag{13.46}$$

ここで $\gamma := C_\mathrm{p}/C_\mathrm{v}$ である。

つまり, 理想気体の（ゆっくりした）断熱変化は PV^γ が一定なのだ。これは本章の後半への伏線である。

13.9　内部エネルギーとは?

ここまで「内部エネルギー」がたくさん出てきたが, そのほとんど（熱力学第一法則の話題を除く）が理想気体を仮定したものだった。それは系を構成する分子が十分小さく, 分子同士に働く力を無視できるというケースだった。そういう場合は, 各分子の運動エネルギーの総和が内部エネルギーである, とみなせるのだった。

では, そうでない場合は内部エネルギーはどうなるだろう?

例えば気体でなく固体の系なら? その場合, 固体を作る分子同士は, 互いに力（共有結合やイオン結合, 分子間力など）を及ぼし合って, 強く束縛しあっている。実は, そのような状況は各粒子（原子）はバネにつけられて振動する質点としてモデル化できるのだ。

バネにくっついて振動する質点は, 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを持つことは既に学んだ。従って, 内部エネルギーとして運動エネルギーだけでなくポテンシャルエネルギーも考慮しなければならない。というのも, 実は式 (13.1) は,（このケースを含む）ある条件下ではポテンシャルエネルギーについても成り立つのだ。すなわち, バネについた質点がたくさんあるときの振動の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーは, ともに（平均的には）絶対温度に比例することが（物理学者達の研究によって）わかっている。従って, 固

体の内部エネルギーは絶対温度に比例するとみなせる（ただしこれは低温のときは破綻する。興味のある人はデュロン・プティの法則で検索！）。

では液体なら? 固体のときと同様に, 分子同士が力を及ぼし合っていることが無視できない。かといって, バネについた質点としてモデル化することもできない（固体と違って液体の分子は自由に移動できる）。すると, 分子同士の距離に応じてポテンシャルエネルギーを考える必要がある。液体に何か（溶質）が溶け込んでいて, それらが電離してイオンになっていたりしたら, それら同士の間に働く電気的な力（クーロン力）も考えねばならない。これ以上の詳細には立ち入らないが, 状況は簡単ではないことがわかるだろう。

では理想気体以外の気体なら? この場合も, 分子同士の及ぼし合う力が作るポテンシャルエネルギーなどを考えねばならない。しかし, 資源生の諸君が気体を扱うほとんどのケースでは, 理想気体を仮定してもおそらく大丈夫だろう。

それよりももっと重要なのは, 系の中で化学反応が起きる場合だ。例えば水素と酸素の 2:1 の混合気体が反応（燃焼）すると, 水（水蒸気）の気体に変わる（反応後は高温低圧のため, 水は凝結しないものとする）。このとき内部エネルギーはどうなるのだろう?

反応前の水素・酸素混合気体も, 反応後の水蒸気も, それぞれ理想気体として近似できるので, それぞれの内部エネルギーは式 (13.32) で表すことができそうである[*15]。しかし, それらの差（反応後 − 反応前）を ΔU としてしまうと, それは式 (13.33) とは整合しない。というのも, もしこの反応を体積一定で外部と断熱された容器の中で行えば, 式 (13.33) から $\Delta U = 0$ のはずだ。ところが実際は燃焼熱によって容器の温度 T は大きく上昇し（爆発的な反応だ!）, その結果, 式 (13.32) で表される U は, 反応後の方が反応前よりも実際は大きい[*16]。従って $\Delta U = 0$ ではなくなり, 矛盾する。

これを読んで, 「なら熱力学第一法則が間違っているのでは?」と思った人, つまり, 「化学反応が内部で起きるなら, 外部から仕事や熱を加えられなくても内部エネルギーは変化するのでは?」と思った人もいるかもしれないが, そうではない。熱力学第一法則は正しいのだ。内部エネルギーの変化は, あくまで外との熱や仕事のやりとりでしか生じない。従って, 上の例では, やはり内部エネルギーの変化 ΔU は 0 なのだ。間違っていたのは, このような場合にも内部エネルギーを式 (13.32) で考えようとしたことなのだ。

そもそもこの「燃焼熱」はどこから来たのだろうか? それは主に, 分子内の原子同士の結合（水素原子同士や酸素原子同士, そして水素原子と酸素原子同士の共有結合）におけるポテンシャルエネルギーである。水素同士と酸素同士の共有結合より, 水素と酸素の共有結合の方がポテンシャルエネルギーが低いので, 反応によってその差のぶんだけエネルギーが出てきて気体を温めるのである。つまり, 化学結合のポテンシャルエネルギーの形で分子内に蓄えられていたエネルギーが分子の運動エネルギーに変化したのだ。従って, 分子の運動エネルギー（つまり熱）と化学結合のポテンシャルエネルギーの両方をあわせて内部エネルギーとみなせば, この反応の前後で内部エネルギーは変わっていないのだ。

このように, 扱う対象が理想気体であっても, 化学反応の前後では, 式 (13.32)（気体分子の運動エネルギー）だけを考えていてはダメなのだ。

そもそも, 気体の中には, 分子の運動エネルギーだけでなく, 分子**内**のエネルギーや, 分子を構成する原子の原子核内のエネルギーなどもある。それらも全部考えないと真の意味で「内部エネルギー」とは言えない。しかし, それらは化学反応が起きない限り, あるいは原子核反応が起きない限り, 表には出てこない。出てこないということは, とりあえず忘れていても構わない。理想気体の内部エネルギーを式 (13.32) で表すのは, そういう「他にもいろいろあるけどとりあえず忘れて, 分子の運動エネルギーだけ考えておこう」という立場での話である。

それは例えて言えば, 君が友人に「いまいくらお金持ってる?」と聞いて彼が「5000 円くらいかな」と答えた時, それは財布の中の現金だけであって, 実は銀行に 10 万円くらいの普通預金と 30 万円くらいの定期預金があるのだが, それらは今, 昼ごはんをどの店で食べようかと相談している状況では無関係なので考えていない, というのと似ている。

このように, エネルギーは, 「実は他にもあるけど今は話題になってないので考えない」という扱いをすることが多い。例えば野球のボールの運動を考える時, ボー

[*15] 前述したように, 水蒸気は V 字型の 3 原子分子なので, その C_{v} は $3R$。

[*16] 反応によって分子数が減ったり C_{v} の値が変わったりもするが, その影響を打ち消すくらい T の上昇によって式 (13.32) の U は上がる。

ル（の重心）の速さに伴う運動エネルギーは考えるが，ボールの熱エネルギー（ボールを構成する分子や原子の運動エネルギー）は考えない。また例えば，重力によるポテンシャルエネルギーは，質量 m，重力加速度 g，高さ h とすると mgh だが，この高さ h は，その物体を動かすことのできる範囲で適当な基準点をとって決める。ところが，そこに深い穴を掘って，その底を基準にすれば，h の値は変わり，mgh の値も変わるではないか!!　しかしそれは，「穴を掘ってまでポテンシャルエネルギーを取り出そうとは思わない」という人にとっては，忘れてよい話である。

よくある質問 172　式 (13.38) がピンと来ません。「加えられた熱」Q が「内部エネルギーの変化」ΔU に等しいのはわかります。でも，仕事 $P\Delta V$ というのがわかりません... では例を挙げましょう。純粋なエタノール（液体）と純水（液体）をまぜると，できた「エタノール水溶液」は暖かくなります（やったことがなければやってみてください!)。この熱はどこから来るのでしょう?　エタノール分子は水分子と引き合いますから，それらどうしがくっつくと（水和すると），互いの引力のポテンシャルエネルギーが，熱として放出されるのです。これが ΔU にあたります。ここでは U は小さくなるので，ΔU はマイナスです。つまり，系に熱を「加える」のではなく系から熱が「出る」のです。だから温かくなるのです。

しかし!　それだけではないのです!　エタノール水溶液の体積は，元のエタノールの体積と水の体積を足したものよりも，わずかに小さくなります。縮むのです!　このとき，体積が縮む分，周囲の大気は水溶液に対して仕事をします。それが $P\Delta V$ です。ここでは ΔV はマイナスですので，$P\Delta V$ もマイナスです。つまり，その仕事も外に熱として出るのです。

従って，水溶液が温かくなるのは，分子同士の引力によるポテンシャルエネルギーと，水溶液の体積が小さくなることに伴う外部（大気）による仕事の両方が寄与するのです。

このように，反応熱を考えるには，単に分子同士の引力や斥力だけでなく，まわりの環境からの仕事も考慮する必要があります。それをうまく整理してくれるのが，次節の「エンタルピー」です。

13.10　エンタルピーはエネルギーの一種

生物資源学類では，1 年次春学期「化学」で，エンタルピーという概念を習う。エンタルピーは，化学反応や相変化を予測したり制御するのに必要な概念であり，特に，「反応熱」に関わっている。

ところが，多くの 1 年生は「エンタルピーって結局何?」と悩む。おまけに，そのあとに「エントロピー」という紛らわしい概念が出てきて混乱する。

そのような悩みは，定義を覚えていないことから発する。くどいようだが，まず定義をきちんと覚えないと何も話が始まらない。

エンタルピーの定義

系の内部エネルギーを U，圧力を P，体積を V とすると，

$$H := U + PV \tag{13.47}$$

をエンタルピーという（定義）。

● **問** 181　エンタルピーの定義（式 (13.47)）を 5 回書いて記憶せよ。

さて，定義を覚えたら，エンタルピーの意味を少しずつ考えていこう。まず，この H の変化を考えてみよう。すなわち，ある状態（内部エネルギー U，圧力 P，体積 V，エンタルピー H）から変化した状態（内部エネルギー $U+\Delta U$，圧力 $P+\Delta P$，体積 $V+\Delta V$，エンタルピー $H+\Delta H$）を考え，そのときのエンタルピーの変化を考えよう。変化前は，

$$H = U + PV \tag{13.48}$$

変化後は，

$$H + \Delta H = (U + \Delta U) + (P + \Delta P)(V + \Delta V) \tag{13.49}$$

後者から前者を引くと，

$$\Delta H = \Delta U + P\Delta V + V\Delta P + \Delta P\Delta V \tag{13.50}$$

となる。**もしこの変化が，圧力は不変（一定）の状態で行われたら**，$\Delta P = 0$ なので，上の式は，

$$\Delta H = \Delta U + P\Delta V \tag{13.51}$$

となる。この右辺は式 (13.38) の左辺と同じだ。従って，

$$\Delta H = Q \tag{13.52}$$

となる。つまり，**定圧変化では，系に加えられた熱は，エンタルピーの変化（増加分）に等しい**。これがエンタルピーの「意味」だ。

よくある質問 173　これがエンタルピーの意味だと言われても，ピンと来ません。なんで定圧に限定するのですか?　それで何が嬉しいのですか?　「系に加えられた熱」がわかって何が嬉しいのですか? ...　まず，世の中の現象の多く，特に地上で起きる現象の多くは圧力一定のもとで起きます。例えば君が料理を作る時，圧力釜などを使わない限り，煮る・焼く・蒸す・混ぜる・凍らす・解凍するなどは，一定の圧力（大気圧）のもと

で起きます。従って, 定圧を仮定しても, 理論の適用範囲はそんなには限定されません。むしろ, 定圧を仮定することで, 現象の記述や解析は単純になり, 楽になります。「系に加えられた熱」は, 言葉を変えれば, 「その変化を起こすのに外から加えねばならない必要な熱」とも言えます。また, これがマイナスの場合は, 「系から外に出る熱」(要するに反応熱) です。化学反応を制御したり, その反応熱を利用したりするとき, こういうのって, めっちゃ大事じゃないですか!

ここで注意して欲しいことがある。エンタルピーは化学反応の理解や予測によく使われる。その場合, エンタルピーの定義の中の内部エネルギー U は, 分子の運動エネルギーだけでなく, 分子内の化学結合のポテンシャルエネルギーも含めて考えるのだ。実際, 前節の水素・酸素の燃焼の例（そこでは化学結合のポテンシャルエネルギーが重要だった）も, そこで出てくる「燃焼熱」は化学では「エンタルピーの変化」として考えるのだ。

13.11　エントロピーってなんだろう?

次に学ぶのは「エントロピー」である。エントロピーは, たくさんの分子や原子からなる集団が, 全体としてどのように自発的にふるまうかを説明するときに必要な概念である。

エントロピーはエンタルピーに名前が似ているので, 初学者は混同しやすいが, 両者は全く異なる量である。名前が似ているのは偶然に過ぎない。そもそも名前が似ているからといって, 実体どうしも似ているとか互いに関係があるとはかぎらない。例えば, 福井県の小浜市と米国元大統領のオバマ氏は名前が似ているが実体は全く違う。エントロピーとエンタルピーもそういうものだと思っておけばよい。

まずエントロピーのその定義を述べよう。系には各状態において「エントロピー」という量があり, 状態 1 のときのエントロピーを S_1, 状態 2 のときのエントロピーを S_2 とし, エントロピーの差, すなわち $S_2 - S_1$ を ΔS とすれば, ΔS は次式を満たす, と約束する:

エントロピー（の差）の定義

$$\Delta S = \int_{\text{状態 1}}^{\text{状態 2}} \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} \tag{13.53}$$

ここで, 積分は, 系が状態 1 から状態 2 まで**可逆的に**変化したときに関するものであり, Q_{rev} は外から系に**可逆的に**与えられる熱, T は絶対温度である。 これがエントロピーの定義である。「可逆的」の意味は次節で述べる。

もし, 状態 1 と状態 2 が互いに非常に近い状態であるとき, すなわち変化の量が微小であるとき, ΔS は微小量 dS と書くことができ, また, 微小変化の間で温度 T はほとんど変わらないと考えてよいので, 上の式は,

$$dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} \tag{13.54}$$

と書いてもよい。

このように, エントロピーは, それ自体ではなく, その「変化」が先に定義される。

と言われても, 「わかりにくい!」というのが正直なところだろう。そう, エントロピーは初学者にはなかなかわかりにくいのだ。諸君はまず, 式 (13.53), 式 (13.54) をしっかり頭に叩き込もう。そして, それをもとに, いろんな話について行けば, 次第にエントロピーが何なのか, わかってくるだろう。

● **問** 182　上のエントロピーの定義（式 (13.53)）を 5 回書いて記憶せよ。

13.12　可逆過程と準静的過程

以後, 少しずつ, エントロピーの「意味」を理解していこう。

まず, エントロピーの定義で, 可逆的という言葉が出てきた。これはとても大切なキーワードである。

ある系の状態が変化したとき, （その気になれば）変化後の状態から変化前の状態に戻すことができ, しかも外部に何の影響も残さないようにそれができる場合, そのような変化を可逆的な変化あるいは可逆過程という (定義)。

例 13.1　物体を重力に逆らってゆっくり持ち上げるという操作を考えよう。持ち上げるときにエネルギー（= 仕事=重さ×持ち上げた高さ）が必要だが, それを電池でまかなったとしよう。持ち上がった後に, 物体を元の高さまで戻すとき, 物体にヒモをつけてそれで発電機を回して電池に充電すれば, 持ち上げるときに使ったエネルギーを埋めもどし, 結果的に何の影響も残らない。従って, 「ものを重力に逆らって持ち上げる」のは可逆過程である（これは重力が「保存力」であることに関係する)。

例 13.2　ある速さで地面を滑っていた物体が, 地面との

摩擦によって止まる, という動作を考えよう。このとき, 物体が持っていた運動エネルギーは摩擦によって熱エネルギーに変えられてしまう。この変えられた熱エネルギーをもういちど集めて, 物体の運動エネルギーに変えて, 物体を滑らせるというのは, どう考えても無理である。従って, 運動する物体が摩擦力によって止まる, というのは可逆過程ではない（これは摩擦力が「非保存力」であることに関係する）。

熱力学では, 理想気体の状態変化がよく例に使われるので, 以後はそういう話に絞ろう。

例 13.3　理想気体の（ゆっくりした）断熱変化（P.145 で述べた）は可逆変化だろうか? ピストンをゆっくり押し込んでいくと気体の体積は減り, 圧力は高まり, 温度も上がっていく。ある時点でそれをやめて, 元の状態になるまでピストンを徐々に戻すと, もとの温度・圧力・体積に戻る。ピストンを押し込む時に外力（ピストンを押す手か何か）は気体に対して仕事をしたが, ピストンが戻る時に, 同じ大きさの仕事を気体は外力をしたので, 仕事の差し引きも 0 である。仕事は例 13.1 のように電池から得たり（発電機を使って）戻したりできるので, 外部に何も影響を残さないことが可能である。従って, **理想気体をゆっくりと断熱変化させるのは可逆過程**である。（例おわり）

では, 温度が変わらずに理想気体が膨張したり収縮する変化（等温変化）はどうだろうか?

例 13.4　理想気体を, 温度を一定に保ったまま, 体積を膨張または圧縮させることを考える。今回も気体をピストン付きの容器に入れるのだが, こんどはピストンの壁は熱をよく通す素材でできており, 壁を介して気体から外に熱が出ていったり, 外から気体に熱が流れ込んだりする状況を考える。この容器を, 一様な温度を持つ大きな環境（熱容量が無限に大きなもの, 例えば大きなお風呂）に浸しながら, ピストンを動かそう。もしピストンを速く動かすと, 気体の膨張や収縮が急激に起きて, 気体の温度が大きく変わってしまうだろう。それを避けるために, ピストンはゆっくり動かすことにしよう。すると, 気体がごくわずかでも温まったら, その熱が周囲に逃げるし, ごくわずかでも冷えたら, それを埋め合わせる熱が周囲から流れ込む。そうすれば気体の温度と周囲の温度の差が限りなく 0 に近い状態を維持できる。

気体がゆっくり膨張するとき気体は環境に対して仕事をするが, それに必要な仕事と同じだけの熱が環境から気体に流れ込む。逆に, 気体をゆっくり圧縮するときは, 環境は気体に仕事をするが, その仕事と同じだけの熱が, 気体から環境に流れ出す。このように, ゆっくりやれば, 等温変化は元に戻すことができ, 外部（環境）に何も影響を残さない（膨張するときに外部から得た熱は, 圧縮するときに外部に戻している）。従って, **理想気体のゆっくりした等温変化は可逆過程である**。（例おわり）

ここで挙げた 2 つの例は, いずれも気体を「ゆっくり」変化した。具体的には, 気体が熱平衡状態を保ちながら変化したということである。このように, 系が熱平衡を保ちながら（保てるくらいゆっくりと）変化するような過程を準静的過程という。

準静的過程は可逆過程とほぼ同義である。立場や定義によっては準静的過程と可逆過程を区別することもあるが, 諸君はとりあえず両者はほぼ同じ意味だと思ってよかろう。

では, これらの準静的過程でエントロピーはどう変わるだろうか? 準静的過程は可逆過程なので, そのエントロピー変化は式 (13.53) で求められる。

まず, 準静的断熱変化はどうだろう? そもそも「断熱」なので, 理想気体であるなしにかかわらず, 外と系の間で熱の出入りは無い。つまり式 (13.53) の dQ_{rev} は 0 である。従って, この積分も 0 であり, 従って, エントロピーの変化も 0 である。要するに, **理想気体であろうがなかろうが, 準静的断熱変化ではエントロピーは変化しない**。

準静的等温変化はどうだろう（等温であれば, 温度は気体内で一様のはずだから熱平衡が実現しているはずであり, 従って必然的に準静的なので, 「準静的」という語は無くてもよいのだが, ここではつけておく）? まず, 熱力学第一法則から, 熱の出入りを見積もろう。式 (13.37) より, 次式がなりたつ:

$$dU + P\,dV = dQ \tag{13.55}$$

理想気体の内部エネルギー U は温度だけに依存し, 圧力 P や体積 V には無関係なので, 準静的等温変化の前後では U は変わらないため, $dU = 0$。従って $P\,dV = dQ$。準静的等温変化は可逆的なので dQ は dQ_{rev} であり, 式 (13.53) より, 次式がなりたつ:

$$\Delta S = \int_{\text{状態 }1}^{\text{状態 }2} \frac{dQ_{\mathrm{rev}}}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{P\,dV}{T} \tag{13.56}$$

ここで, V_1 と V_2 は, それぞれ状態 1（最初の状態）, 状態

2（膨張または圧縮が終わったときの状態）のときの体積を意味する。理想気体の状態方程式から, $P = nRT/V$ であるので (n はモル数),

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} \frac{n\,R\,dV}{V} = n\,R\ln\frac{V_2}{V_1} \tag{13.57}$$

となる。これが理想気体の準静的等温変化のエントロピー変化である。

● **問** 183　温度 300 K で 2.0 mol の理想気体を考える。この気体を, 体積 50 L から体積 100 L まで, 準静的等温過程で膨張させる。このときのエントロピーの変化はどのくらいか? 単位もちゃんと付けて, 有効数字 2 桁で答えよ。

13.13　不可逆過程

可逆的でない変化を不可逆変化とか不可逆過程という。理想気体の不可逆過程には, 次のような例がある:

例 13.5　体積 V_2 の容器があり, その内部が壁で仕切られて, 体積 V_1 の小部屋がある。その小部屋の中に, モル数 n, 温度 T の理想気体が入っており, 小部屋の外の容器内は真空である（それを状態 1 と呼ぶ)。容器は形や体積を変えず, 外との熱の交換も無いとする。小部屋を仕切る壁には扉がある。突然, 扉が開くと, 小部屋の中の気体が容器全体に広がる（それを状態 2 と呼ぶ)。この状態 1 から状態 2 への変化は可逆変化だろうか? 小部屋から容器全体に気体が広がったときは, 気体は何も仕事をしていない。ところが, 容器全体に広がった気体を小部屋に押し戻すには気体を圧縮する仕事が必要である。つまり, この変化を元に戻すのに外部からエネルギーを得る必要がある（従って外部には影響が残らざるを得ない)。従って, この変化は不可逆変化である。（例おわり）

この場合, エントロピー変化 ΔS はどうなるだろう? 容器と外部との熱のやりとりは 0 なので, 式 (13.53) で $dQ_{\mathrm{rev}} = 0$, だから $\Delta S = 0$? いや, それは違う。この変化は不可逆的なので, 外との熱のやりとり（それは 0 である）を dQ_{rev} とはみなせない。従って式 (13.53) を直接使うことはできないのだ。

ではどうするか? 状態 1 と状態 2 を, 可逆過程でつなぐストーリーを**仮想的に**考えるのである。今の例では, 気体は何にも邪魔されずに勝手に広がっていったのだから, 気体分子は何も仕事をしないしされない。従って気体分子の運動エネルギーは変化しない。従って状態 2 と状態 1 で温度も変化しない（式 (13.22) で, U が変わらないなら T も変わらない)。ということは, 状態 1 から状態 2 への変化は, その気になれば準静的等温変化でも実現できただろう。実際, 容器の壁の一部を熱が伝わりやすい素材にとりかえて, 小部屋と外界との熱のやりとりを可能にし, また,「突然扉を開く」かわりに, 扉の前にビニール袋か何かをつけて, 徐々にそれを広げることで, 例 13.4 のような準静的等温変化を実現できる（なんかわざとらしい設定だが, 変化がおわったときに, 壁を再び断熱にして, ビニール袋を取り去れば, 少なくとも容器とその内部に起きる結果は「扉が突然開く」場合と同じである)。準静的等温変化は可逆過程なので, それに伴うエントロピー変化は式 (13.53) で定義も計算もできる。その結果は式 (13.57) で与えられ, それは

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} \frac{n\,R\,dV}{V} = nR\ln\frac{V_2}{V_1} \tag{13.58}$$

である。これが, 例 13.5 におけるエントロピーの変化である。このように, **不可逆過程におけるエントロピーの変化は**, **同じ結果をもたらす可逆過程を仮想的に考えたときのエントロピー変化で定義する**のである。

13.14　熱力学第二法則: 孤立系でエントロピーは増大する

ではいよいよエントロピーの意味を探っていこう。

例 13.4 では, 系のエントロピーは, 式 (13.57) の分だけ変化する。もし $V_2 > V_1$ なら, $\Delta S > 0$ なので, エントロピーは増える。もし $V_2 < V_1$ なら, $\Delta S < 0$ なので, エントロピーは減る。このように, **エントロピーは**, **状態の変化に応じて**, **増えることも減ることもある**。

ところが, ちょっと見方を変えてみると, 話は変わる。気体が準静的等温変化で膨張するときは, 気体だけに着目すれば, 確かにエントロピーは増える。それは外部から気体に熱が（可逆的に）流れ込んだからである。そのとき,「外部」すなわち気体の入ったピストンを取り囲む世界のエントロピーは, 熱が流れ出すために減る。その変化は, ちょうど, 気体のエントロピーが増えたぶんを打ち消すだけの負の値である。このように, **外部まで考えに入れるとき**, **可逆過程ではエントロピーの総和は変化しない**。

では, 例 13.5 のような不可逆過程ではどうだろう? 常

識的に考えれば, 外から介入しない限り, 必ず $V_2 > V_1$, つまり小さな部屋から大きな容器へ気体は広がっていく。$V_2 < V_1$ という状況, すなわち, 大きな容器から小さな部屋に気体が勝手に集まってくるような変化は起きない。従って, 式 (13.58) は必ず 0 より大きな値である。つまり, 容器内のエントロピーは必ず増大する。ところがこれらのドラマは全て容器内だけで起きるので, 容器外は何も変わらない。そのため, 容器外のエントロピーの変化は 0 である。すると, 容器の外部まで考えに入れても, エントロピーの総和は増える。このように, **外部まで考えに入れるとき**, **不可逆過程ではエントロピーの総和は増大する**。

よくある質問 174　**扉をあけるのは外部からの仕事があるということではないのですか**? ... そのように思う気持ちはわかりますが, 扉をあけるには小さなドアノブを回すだけでよいので, その仕事は無視できます。

そして, 驚くべきことに, これは例 13.5 だけでなく広く一般化できることが経験的に知られているのだ。それが以下に述べる, 熱力学第二法則である[*17]:

熱力学第二法則

孤立系では, 変化が不可逆的であるとき, エントロピーの総和は増え, エントロピーの総和が増えるとき, 変化は不可逆的である。

● **問** 184　熱力学第二法則を 3 回書いて記憶せよ。

ここで「孤立系」とは, 仕事や熱のやり取りなどの現象が, その中だけで完結している系のことである。例 13.4 では, 気体の入ったピストンと, それを包む一定温度のお風呂をあわせたものであり, 例 13.5 では, 容器の内部のことである。

よくある質問 175　**例** 13.5 **ではエントロピーを計算したときに**, **容器の外部との熱のやりとりを考えたじゃないですか**! **それでも「容器の内部」は孤立系なのですか**? ... エントロピーを求めたときのストーリーは, エントロピーを求めるために考えた「仮想的な可逆変化」です。例 13.5 で実際に起きたのはそれではなく, 不可逆変化です。

[*17] 実は, 「孤立系」という条件は, 「断熱変化では」という条件に緩めることができる。つまり, 外界との仕事のやりとりを許容しても, 以下の法則は成り立つ。それを「エントロピー原理」という。

不可逆的な変化というのは, 「放っといたらそうなる」ような, 自発的な変化である。熱力学第二法則から, 「孤立系はエントロピーが増大するように自発的に変化する」とも言える。エントロピーは, このように, 自発的な変化の有り様を教えてくれる量である。それがエントロピーの「意味」（のひとつ）である。

よくある質問 176　**例** 13.5 **では確かに熱力学第二法則が成り立ちますが**, **ひとつの例について成り立つからといって**, **それが普遍的に成り立つとは限らないじゃないんですか**? ... もっともな指摘です。実は, 熱力学第二法則は, 一種の仮説です。しかし, これに矛盾するような事例はひとつも見つかっていません。つまり, これは運動の法則と同じように「基本法則」であり, 「それが普遍的に正しいと信じれば全てがうまくつじつまがあう」というものなのです。その正しさは, 論理的にではなく, 経験的に受け入れられているのです。

13.15　ギブスの自由エネルギーは反応の方向を決める

熱力学第二法則は, どんな現象にも成り立つのだから, 当然, 化学反応にも成り立つ。ということは, この法則を使えば, 「何と何をまぜて温度このくらい, 圧力このくらいにすると, 自発的に何が起きるか?」が予想できるし, それを利用して化学反応を制御できるはずだ。スバラシイ!!

しかし, 実際の化学反応では, 目の前のフラスコの中のできごとは追跡できても, フラスコの中と外との間での熱や仕事のやりとりまで追跡するのはしんどい。従って, エントロピーの変化を直接的に時々刻々と追跡するのは無理である。そういうときに便利なのは, 次に示すギブスの自由エネルギーという量である（単に「ギブスエネルギー」ともいう）。

ギブスの自由エネルギーの定義

$$G := U + PV - TS \tag{13.59}$$

ここで, U は内部エネルギー, P は圧力, V は体積, T は絶対温度, S はエントロピー

● **問** 185　ギブスの自由エネルギーの定義を 3 回書いて記憶せよ。

これが何を意味するかを理解するために, ある系を考えよう。この系は孤立系ではないとする（外と熱や仕事

のやりとりがありえる)。この系のギブスの自由エネルギーの変化を考えてみる。すなわち, 式 (13.50) を導いた時と同様に, ある状態（内部エネルギー U, 圧力 P, 体積 V, 温度 T, ギブスの自由エネルギー G）から変化した状態（内部エネルギー $U+\Delta U$, 圧力 $P+\Delta P$, 体積 $V+\Delta V$, 温度 $T+\Delta T$, ギブスの自由エネルギー $G+\Delta G$）を考え, そのときのギブスの自由エネルギーの変化を考える。変化前は,

$$G = U + PV - TS \tag{13.60}$$

変化後は,

$$\begin{aligned} G + \Delta G = &(U+\Delta U) + (P+\Delta P)(V+\Delta V) \\ &- (T+\Delta T)(S+\Delta S) \end{aligned} \tag{13.61}$$

後者から前者を引くと,

$$\begin{aligned} \Delta G = &\Delta U + P\Delta V + V\Delta P + \Delta P\Delta V \\ &- T\Delta S - S\Delta T - \Delta T\Delta S \end{aligned} \tag{13.62}$$

となる。**もしこの変化が, 圧力が一定（不変）, なおかつ, 温度も一定（不変）の状態で行われたら**, $\Delta P = 0$ かつ $\Delta T = 0$ なので, 上の式は,

$$\Delta G = \Delta U + P\Delta V - T\Delta S \tag{13.63}$$

となる。この右辺の第 1 項と第 2 項をあわせたものは, 式 (13.38) の左辺と同じだ。従って,

$$\Delta G = Q - T\Delta S \tag{13.64}$$

となる。ここで, 変化が小さい状況を考える。すると, この式は,

$$dG = dQ - TdS \tag{13.65}$$

となる。dQ は外部から系に流れ込む微小な熱である。

このとき, 外部は dQ という熱を失うが, その過程が可逆過程であるとしよう（**系の内部での変化は不可逆かもしれないが, 系を取り囲む外部の変化は可逆過程で行われるものとみなす**）。すると, 系の外部のエントロピーの変化は $-dQ/T$ である。一方, 系の内部のエントロピーの変化は dS である。よって, 系の内部と系の外部をあわせた系について, エントロピーの変化の総和（あるいは総和の変化と言っても同じこと）は,

$$dS - \frac{dQ}{T} \tag{13.66}$$

である。そして, **「系の内部と系の外部をあわせた系」とは要するに全世界（全宇宙）であるので, ひとつの孤立系とみなすことができる**。そこで, 熱力学第二法則より, これは 0 以上のはずである。従って,

$$dS - \frac{dQ}{T} \geq 0 \tag{13.67}$$

この両辺に T をかける。T は絶対温度（よって 0 以上）なので, これを掛けることで不等号の向きは変わらない:

$$TdS - dQ \geq 0 \tag{13.68}$$

$$\text{従って,} \quad dQ - TdS \leq 0 \tag{13.69}$$

である。これをもとに, 式 (13.65) は,

$$dG \leq 0 \tag{13.70}$$

となる。式 (13.67) に戻って考えれば, この等号が成り立つのは, 系の中での変化が可逆過程のときだけだ。系の内部での変化が不可逆過程のとき, つまり自発的な変化では, 等号は成り立たず, 不等号になる, すなわち, 系のギブスの自由エネルギーの変化は負, つまり, 必ず減っていくのだ。といっても, 際限なく減っていくわけではなく, ある状態に達したら, $dG = 0$ になってしまい, G はそれ以上は減らない。このとき, 系は平衡状態にある, という。このことは大切なので大きく書いておこう:

系の自発的な変化とギブスの自由エネルギー

> 圧力と温度が一定の系では, ギブスの自由エネルギーが減るように自発的な変化が進行する。平衡状態に達した時, ギブスの自由エネルギーは一定値（最小値）をとる。

以下の 2 つの演習問題では, 理想気体分子のモル数を n とする。温度, 圧力, 体積, エントロピーをそれぞれ T, P, V, S とする。気体定数を R, 定圧モル比熱を C_p, 定積モル比熱を C_v とする。変化前の状態を状態 1 とし, 変化終了後の状態を状態 2 とする。それぞれの状態での量を, 下付きの数字で表す。

演習問題 20 状態 1 から状態 2 まで定圧変化（圧力一定の下で変化）するときのエントロピーの変化を求めよう（定圧なので, $P_1 = P_2$ である)。定圧過程は可逆過程かどうかまだ不明なので, 状態 1 から状態 2 を, 別の可逆過程でつなごう。すなわち, 状態 1 からまず等温過程で状態 3 という状態に持っていく。次に, 状態 3 から準静的断熱過程で状態 2 に持っていく。このような 2 段階の可逆過程を考えるのである。

(1) $P_1V_1 = P_3V_3$ であることを示せ。

(2)　$P_3V_3^\gamma = P_2V_2^\gamma$ であることを示せ。

(3)　次式が成り立つことを示せ:

$$V_3 = \left(\frac{V_1}{V_2^\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \tag{13.71}$$

(4)　次式が成り立つことを示せ:

$$S_3 - S_1 = n(C_\mathrm{v} + R)\ln\frac{V_2}{V_1} \tag{13.72}$$

(5)　$S_2 - S_3 = 0$ が成り立つことを示せ。

(6)　次式が成り立つことを示せ（これが定圧過程のエントロピー変化）:

$$S_2 - S_1 = n\,C_\mathrm{p}\,\ln\frac{V_2}{V_1} \tag{13.73}$$

(7)　状態 1 から状態 2 へ, 直接, 定圧過程で変化するときに気体に流入する熱を Q とするとき, 次式が成り立つことを示せ:

$$dQ = n\,C_\mathrm{p}\,dT \tag{13.74}$$

(8)　状態 1 から状態 2 へ, 直接, 定圧過程で変化するときの, 以下の量を計算せよ:

$$\int_{状態\ 1}^{状態\ 2}\frac{dQ}{T} \tag{13.75}$$

(9)　式 (13.75) の結果を式 (13.73) と比較せよ。

演習問題 21　状態 1 から状態 2 まで定積変化（体積一定の下で変化）するときのエントロピーの変化を求めよう（定積なので, $V_1 = V_2$ である）。定積過程は可逆過程かどうかまだ不明なので, 状態 1 から状態 2 を, 別の可逆過程でつなごう。すなわち, 状態 1 からまず準静的等温過程で状態 3 という状態に持っていく。次に, 状態 3 から準静的断熱過程で状態 2 に持っていく。このような 2 段階の可逆過程を考えるのである。

(1)　$P_1V_1 = P_3V_3$ であることを示せ。

(2)　$P_3V_3^\gamma = P_2V_2^\gamma$ であることを示せ。

(3)　次式が成り立つことを示せ:

$$V_3 = V_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{13.76}$$

(4)　次式が成り立つことを示せ:

$$S_3 - S_1 = nC_\mathrm{v}\ln\frac{P_2}{P_1} \tag{13.77}$$

(5)　$S_2 - S_3 = 0$ が成り立つことを示せ。

(6)　次式が成り立つことを示せ（これが定積過程のエントロピー変化）:

$$S_2 - S_1 = nC_\mathrm{v}\ln\frac{P_2}{P_1} \tag{13.78}$$

(7)　状態 1 から状態 2 へ, 直接, 定積過程で変化するときに気体に流入する熱を Q とするとき, 次式が成り立つことを示せ:

$$dQ = n\,C_\mathrm{v}\,dT \tag{13.79}$$

(8)　状態 1 から状態 2 へ, 直接, 定積過程で変化するときの, 以下の量を計算せよ:

$$\int_{状態\ 1}^{状態\ 2}\frac{dQ}{T} \tag{13.80}$$

(9)　式 (13.80) の結果を式 (13.78) と比較せよ。

演習問題 20, 21 でわかったように, 理想気体の定圧変化や定積変化におけるエントロピー変化は, それらをあたかも可逆過程とみなして計算したエントロピー変化に等しい。このことから推測されるように, 実は, 理想気体の定圧変化と定積変化は可逆過程とみなせるのだ。

演習問題 22　理想気体について, 次式が成り立つことを証明せよ:

$$C_\mathrm{P} = C_\mathrm{V} + R \tag{13.81}$$

ここで, C_P, C_V, R はそれぞれ定圧モル比熱, 定積モル比熱, 気体定数である。ヒント: 熱力学第一法則を定圧変化に関して立式する。内部エネルギーの変化は, C_V と温度変化の積。与えられる熱量は, C_P と温度変化の積。

13.16　（発展）ヘルムホルツの自由エネルギー

（発展的話題なので, 興味のある人だけ読めばよい。）

熱力学にはヘルムホルツの自由エネルギーという量（単に「ヘルムホルツエネルギー」ともいう）もよく出てくるので説明しておこう。定義はこちら:

ヘルムホルツの自由エネルギーの定義 (1)

$$F := U - TS \tag{13.82}$$

ここで, F はヘルムホルツの自由エネルギー, U は内部エネルギー, T は絶対温度, S はエントロピー

これはエンタルピーとギブスの自由エネルギーに似ているので, 違いをしっかり認識しよう。すなわち,

$$H := U + PV \text{ ... エンタルピー} \tag{13.83}$$
$$F := U - TS \text{ ... ヘルムホルツ} \tag{13.84}$$
$$G := U + PV - TS \text{ ... ギブス} \tag{13.85}$$

である。

本章でここまで説明してきたのは, 熱力学としては, やや古くてオーソドックスな理論体系である。しかし, 熱力学の理論は, 別のスタイルで体系化できる。結果的には同じ自然法則に到達するのだが, 何を出発点（基本原理）とするかによって, 物理学の理論体系は変わるのだ。中でも, ヘルムホルツの自由エネルギーをエントロピーよりも前に定義することで熱力学を構築できる。その場合は, ヘルムホルツの自由エネルギーは以下のように定義される:

ヘルムホルツの自由エネルギーの定義 (2)

系が等温変化で状態 1 から状態 2 に変わるとき, 外界になす仕事が最大であるような等温変化を考え, そのときの仕事を $W_{\max}$ と置くと, 状態 1, 2 のそれぞれのヘルムホルツの自由エネルギー $F1, F_2$ は, $F_1 - F_2 = W_{\max}$ を満たす。

これにいくつかの付帯的な条件をつけると, それは式 (13.82) と等価になる。その詳細はここでは示さない（秋学期の「物理学」で学ぶだろう）。

13.17 （発展）ボルツマン分布は熱平衡でのエネルギー分布

（発展的話題なので, 興味のある人だけ読めばよい。）

式 (13.1) で, 運動エネルギーと温度の間に, 密接な関係があることがわかった。ではポテンシャルエネルギーと温度の間にはどのような関係があるのだろう?

それを調べるために, 単純な例を考えよう。いま, ある気体が, 地表付近に置かれた固い断熱容器に密閉されていると考えよう。気体を構成する分子は 1 種類で, 各分子の質量を m とする。容器は十分に固いので, 容器内部には外部の大気の圧力は影響しない。

この容器の内部の気体が, 温度 T で平衡状態にあるとしよう。気体の各分子は, 地表面からの高さ h に応じて, mgh というポテンシャルエネルギーを持つことは承知の通りである（容器の底面が地面に一致するとしよう）。さて, 容器内の圧力を P とすると, P は容器内の高さによって変わる。なぜかというと, 高さ 0 から高さ h までの間に存在する気体には, 高さ h 以上にある気体の重力がかかっているからだ。従って, 下のあたりは上からの荷重を受けて, より高密度になっているはずだ。いま, 高さ h における容器内の気体の圧力と密度をそれぞれ $P(h)$, $\rho(h)$ とおく。容器の高さを H, 容器の断面積を A と置く。

高さ h と高さ $h + dh$ の間にある気体層には, 上から $AP(h + dh)$ という力で下向きに押され, 下から $AP(h)$ という力で上向きに押される。それに, その気体層自身に $\rho A\, dh\, g$ という大きさの下向きの重力がかかる。これらの力がつりあって, その気体層は静止するのだから,

$$-AP(h + dh) + AP(h) - \rho A\, dh\, g = 0 \tag{13.86}$$

となる（ここで上向きを正とした)。これを整理すると,

$$\frac{P(h + dh) - P(h)}{dh} = -\rho g \tag{13.87}$$

となる。dh を微小量とすると, 左辺は dP/dh に置き換えられる。すなわち,

$$\frac{dP}{dh} = -\rho g \tag{13.88}$$

となる。一方, 気体の状態方程式から[*18],

$$P = \frac{\rho k_{\mathrm{B}} T}{m} \tag{13.89}$$

だから,

$$\rho = \frac{mP}{k_{\mathrm{B}} T} \tag{13.90}$$

となる。これを式 (13.88) に代入すると,

$$\frac{dP}{dh} = -\frac{mg}{k_{\mathrm{B}} T} P \tag{13.91}$$

となる。この微分方程式は変数分離法で簡単に解けて, 解は

$$P = P(0) \exp\Bigl(-\frac{mgh}{k_{\mathrm{B}} T}\Bigr) \tag{13.92}$$

となる。式 (13.90) に代入して,

$$\rho(h) = \frac{mP(0)}{k_{\mathrm{B}} T} \exp\Bigl(-\frac{mgh}{k_{\mathrm{B}} T}\Bigr) \tag{13.93}$$

---

*18 理想気体の状態方程式は, $PV = Nk_{\mathrm{B}}T$。ここで V は体積, N は分子数。両辺を V で割ると, $P = (N/V)k_{\mathrm{B}}T$。右辺の分子と分母に分子の質量 m をかけると, $P = (mN/mV)k_{\mathrm{B}}T$。$mN$ は気体の質量だから, mN/V は気体の密度, すなわち ρ と書ける。従って, $P = (\rho/m)k_{\mathrm{B}}T$ となり, 式 (13.89) を得る。

となる。ここで, exp の中に注目しよう。exp の中の mgh とは, 結局, 各分子のポテンシャルエネルギー E である[19]。つまり, ポテンシャルエネルギー E を持つ分子の数は,

$$\exp\left(-\frac{E}{k_{\rm B}T}\right) \tag{13.94}$$

に比例する。

実はこれは, この特定の例についてだけでなく, 広く一般に成り立つ法則である。すなわち, 温度 T の平衡状態にある系では, エネルギー E を持つ粒子の数は式 (13.94) に比例する[20]: このような粒子数分布をボルツマン分布と呼ぶ。

13.18 （発展）アレニウス型関数

（発展的話題なので, 興味のある人だけ読めばよい。）

前節で学んだボルツマン分布には,

$$\exp\left(-\frac{E}{k_{\rm B}T}\right) \tag{13.95}$$

という形の関数（式 (13.94)）が現れた。この形の関数をアレニウス型関数と呼ぶ（E はエネルギー, T は絶対温度, $k_{\rm B}$ はボルツマン定数）。この式は, 化学や生物学で, 温度が関与する現象に頻出する。そのことを説明しよう。

その前に, 式 (13.95) を少し変形しておく。exp の中の分母と分子にアボガドロ定数 $N_{\rm A}$ をかけて,

$$\exp\left(-\frac{N_{\rm A}E}{N_{\rm A}k_BT}\right) \tag{13.96}$$

とできる。従って, 式 (13.18) より,

$$\exp\left(-\frac{E'}{RT}\right) \tag{13.97}$$

とできる（ここで $N_{\rm A}E$ を E' と書いた）。アレニウス型関数は, この形式でも頻出する。

さて, 化学を学んだ人は,「化学反応速度」の話でアレニウス型関数が出てきたことを覚えているだろうか。そこでは式 (13.95) や式 (13.97) の E は活性化エネルギーに相当する。式 (13.95) は, $k_{\rm B}T$ が E よりもずっと小さいとほとんど 0 であり, $k_{\rm B}T$ が大きくなるに従い, 大きくなってくる。ここで $k_{\rm B}T$ は, おおざっぱに言えば分子の熱エネルギーの平均値なので, 要するに分子の熱エネルギーが活性化エネルギーを超えたら反応が起きやすくなる, という状況をあらわしている。生化学反応も含め, 様々な反応が高温下でよく進むのはこのためである（ただし, 触媒となる酵素の構造が壊れてしまうくらいの高温になると, かえって反応は進まなくなる）。

13.19 （発展）飽和水蒸気圧曲線

（発展的話題なので, 興味のある人だけ読めばよい。）

水蒸気量 （湿度）の把握と管理は, 農業や食品加工, 気象管理, 環境問題などで大切であり, ここで述べるのはその基礎理論である。

まず, エントロピーとギブスの自由エネルギーを復習しよう:

ある系の 2 つの状態（状態 1 と状態 2）を考え, それぞれのエントロピーを S_1, S_2 とすると, 式 (13.53) より,

$$S_2 - S_1 = \int_{\text{状態 }1}^{\text{状態 }2} \frac{dQ_{\rm rev}}{T} \tag{13.98}$$

である。ここで, T は系の絶対温度, $dQ_{\rm rev}$ は系に外界から可逆的に与えられた微小な熱量である。

また, 圧力 P, 温度 T で平衡状態にある系のギブスの自由エネルギー G は, 式 (13.99) より,

$$G = U + PV - TS \tag{13.99}$$

と定義された。ここで U, V, S はそれぞれ, 内部エネルギー, 体積, エントロピーである

さて, 状態が可逆的にわずかに変化したときは, 式 (13.99) は

$$\begin{aligned} G + dG = &U + dU + (P + dP)(V + dV) \\ &- (T + dT)(S + dS) \end{aligned} \tag{13.100}$$

と変わる。ここで, dG, dU, dP, dV, dT, dS はそれぞれ, ギブスの自由エネルギー, 内部エネルギー, 圧力, 体積, 温度, エントロピーの, 微小変化である。

● **問** 186

[19] 力学ではポテンシャルエネルギーを U と表すことが多いが, この章では既に, U は内部エネルギーを表す記号として使われてしまっている。そこで, ここではポテンシャルエネルギーを E と表すことにする。

[20] ただし, 量子力学的な効果の顕著な現象ではこれは破綻する。そういう意味では, これは（特に, 温度が高い場合に成り立つような）一種の近似である。

(1)　式 (13.99), 式 (13.100) を用いて, 次式を示せ:

$$dG = dU + VdP + PdV + dPdV - TdS - SdT - dTdS \quad (13.101)$$

(2)　2 次の微小量（微小量どうしの積）は十分に小さいとみなして無視することで, 前小問から次式を導け:

$$dG = dU + VdP + PdV - TdS - SdT \quad (13.102)$$

(3)　前小問と熱力学第一法則を用いて, 次式を導け

$$dG = VdP - SdT \quad (13.103)$$

注: 式 (13.103) は, 松永「入門 化学熱力学」の P61 の式 (6.10) と同じである。

これで準備が整った。これから, 液体の水（液相）と気体の水（気相）が, 圧力 P, 温度 T, の平衡状態で存在する系を考える。平衡状態とは, 液相から蒸発して離脱し, 気相（水蒸気）に加わる水分子の数と, 気相から離脱し, 凝結して液相に加わる水分子の数が等しい状態である。つまりこのとき, 水蒸気は飽和している。従って, P は飽和水蒸気圧でもある。

ここで, 化学ポテンシャルというものを定義する。それは, 1 分子あたり, もしくは 1 モルあたりのギブスの自由エネルギーのことである（ここでは後者を採用する)。**平衡状態では, 液相の化学ポテンシャルと, 気相の化学ポテンシャルは互いに等しくなくてはならない**。なぜなら, もし液相の化学ポテンシャルの方が大きければ, 液相から気相にわずかに分子が移動することで, 系全体のギブスの自由エネルギーはわずかに下がる。これは系が平衡状態にあることに反する（平衡状態ではギブスの自由エネルギーは極小値をとるはずなので, 気相・液相間で分子の移動があってもギブスの自由エネルギーは不変のはずだ)。もし気相の化学ポテンシャルの方が大きいときも, 同様の考察から不合理である。

すなわち, 液相 (液体の水) の化学ポテンシャルを $\mu_{液}$, 気相 （水蒸気）の化学ポテンシャルを $\mu_{気}$ とすると,

$$\mu_{液} = \mu_{気} \quad (13.104)$$

が成り立っているはずだ。

この状態から, 可逆的に, わずかに温度と圧力を変化させてみる。その結果, 圧力が $P + dP$ になり, 温度が $T + dT$ になったとする。このとき, 水蒸気の飽和状態（つまり平衡状態）は維持されているとする。$\mu_{液}$ の変化を $d\mu_{液}$, $\mu_{気}$ の変化を $d\mu_{気}$ とすると, 式 (13.103) より,

$$d\mu_{液} = V_{液}dP - S_{液}dT \quad (13.105)$$

$$d\mu_{気} = V_{気}dP - S_{気}dT \quad (13.106)$$

となる。ここで, $V_{液}$, $S_{液}$ はそれぞれ液相の水 1 モルあたりの体積とエントロピーであり, $V_{気}$, $S_{気}$ はそれぞれ気相の水（水蒸気）1 モルあたりの体積とエントロピーである。

変化の後も, 化学ポテンシャルは液相と気相で等しいはずなので,

$$\mu_{液} + d\mu_{液} = \mu_{気} + d\mu_{気} \quad (13.107)$$

が成り立っているはずだ。式 (13.107), 式 (13.104) を辺々ひくと,

$$d\mu_{液} = d\mu_{気} \quad (13.108)$$

となる。この両辺に, 式 (13.105), 式 (13.106) を入れると, 次式のようになる:

$$V_{液}dP - S_{液}dT = V_{気}dP - S_{気}dT \quad (13.109)$$

● **問** 187　(1) 式 (13.109) から次式を導け:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{S_{気} - S_{液}}{V_{気} - V_{液}} \quad (13.110)$$

(2) 液体が蒸発して気体になるときに吸収する, 1 モルあたりの熱量を潜熱といい, L と表す。次式を示せ。ヒント: 式 (13.98) を使う。温度一定の状態で水が液相（状態 1）から気相（状態 2）に変化すると考える。T が一定なので $1/T$ は積分の前に出せる。dQ_{rev} の積分は, 与えられた熱量, つまり L に等しい。

$$S_{気} - S_{液} = \frac{L}{T} \quad (13.111)$$

(3) 1 モルあたりの体積で比べると, 液体の水は気体の水（水蒸気）よりもはるかに小さいとみなし, 式 (13.111) と式 (13.110) から次式を導け:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{TV_{気}} \quad (13.112)$$

(4) 水蒸気を理想気体とみなし, 状態方程式 $PV_{気} = RT$ を使って ($V_{気}$ は 1 モルあたりの体積だったことに注意!), 次式を示せ:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{PL}{RT^2} \quad (13.113)$$

この式（または式 (13.110)）を, クラペイロン・クラウジウスの式という。

(5) R, L を定数として, 微分方程式 (13.113) を解き, 次

式を導け（C は任意の定数）：

$$P = C\exp\Big(-\frac{L}{RT}\Big) \tag{13.114}$$

式 (13.114) は，アレニウス型関数になっている（式 (13.97) で E' を L に置き換えればよい）ではないか!

● **問** 188　ある特定の温度 T_0 で飽和水蒸気圧が P_0 であるとする。すなわち，

$$P_0 = C\exp\Big(-\frac{L}{RT_0}\Big) \tag{13.115}$$

であるとする。式 (13.114) を式 (13.115) で辺々割ることで次式を導け:

$$P = P_0\exp\Big(-\frac{L}{RT} + \frac{L}{RT_0}\Big) \tag{13.116}$$

式 (13.116) が，飽和水蒸気圧を与える理論式である。ここで，$L = 45000$ J/mol, $T_0 = 273$ K （摂氏零度），$P_0 = 6.1$ hPa としてよい。図 13.5 に，式 (13.116) のグラフを示す。温度が上がるにつれて，急激に飽和水蒸気圧が高くなることがわかる。

よく「湿度何パーセント」という数値は，相対湿度というものであり，それは，実際にその空気が含む水蒸気の分圧を，この飽和水蒸気圧で割ったものである。

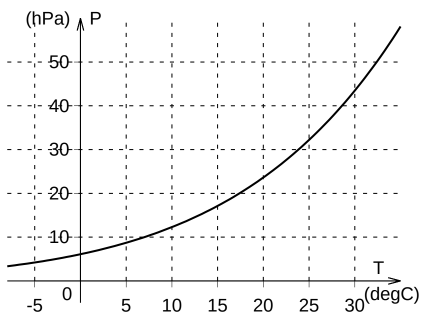

図 13.5　飽和水蒸気圧曲線

● **問** 189　式 (13.116) や図 13.5 を用いて以下の問に答えよ（有効数字は 3 桁でよい）：

(1) 20 ℃における飽和水蒸気圧を求めよ（ヒント：20 ℃は絶対温度では 293 K)。

(2) 100 ℃における飽和水蒸気圧を求めよ。

(3) 冬に洗濯物が乾きにくい理由を述べよ。

(4) 冬に喉が乾燥しやすい理由を述べよ。

大気圧（標準気圧）のもとでは，摂氏 100 度で水は沸騰する。従って，摂氏 100 度では飽和水蒸気は大気圧 (1013 hPa) に等しくなるはずである。しかし，前問 (2) でみたように，式 (13.116) ではそうならない。式 (13.116) は精度があまり良くないのだ。その理由は，蒸発の潜熱 L も，すこしだけど温度に依存するということにある。クライペイロン・クラウジウスの式を解くときに，L を一定と仮定したのがまずかったのだ。そこで，農業気象学などの分野では，飽和水蒸気圧をあらわす式として，式 (13.116) よりももっと精度の良い経験式（ティーテンスの式という）を使うのが普通である。

13.20　解答

答 173　(1) H_2 の分子量は 2。従って H_2 の 1 分子の質量 m は，$(2\times10^{-3}/N_A)$ kg である。ここで N_A はアボガドロ定数。式 (13.3) に代入して，$|v_x| = 1.1\times10^3$ m s^{-1}。(2) 式 (13.5) より，平均的な v は，平均的な $|v_x|$ の $\sqrt{3}$ 倍。従って，$v = 1.9\times10^3$ m s^{-1}。(3) 式 (13.5) より，平均的な v は，分子量の平方根に反比例する。N_2 の分子量 (28) は H_2 の分子量 (2) の 14 倍。従って，N_2 の平均的な v は，H_2 の平均的な v の $1/\sqrt{14} = 0.27$ 倍。従って，$v = 5.2\times10^2$ m s^{-1}。

答 176　(1) $k_B = 1.38\times10^{-23}$ J K^{-1}。(2) $R = 8.31$ J mol^{-1} K^{-1}。(3) $R = N_A k_B$。ここで N_A はアボガドロ定数。

答 186 略解: 式 (13.100) をまず展開し，そこから式 (13.99) を辺々ひくと (1) の式を得る。そのあと，$dPdV$ と $dTdS$ を無視すれば，(2) の式を得る。

(3) 熱力学第一法則は，$dU = dW + dQ$ である (dW, dQ は，それぞれ外から系に加えられた仕事と熱)。$dW = -PdV$ であり，また，可逆変化ならば $dQ = TdS$ と書ける。従って，$dU = -PdV + TdS$ である。これを式 (13.102) に代入して与式を得る。

答 187 略。

答 188 略（超簡単)。

答 189 略解: (1) 23.6 hPa (2) 1240 hPa (3) 冬は気温が低いために飽和水蒸気圧が低い。従って，洗濯物から水が蒸発すると，まわりの空気の水蒸気圧はすぐに飽和に近づいてしまう。その結果，洗濯物から蒸発する水蒸気量と，まわりの空気から洗濯物に凝結する水蒸気量が，ほとんど同じになってしまう。そのため，乾きにくい。(4) 呼吸で入ってくる外気は摂氏 0 度程度の低温であり，飽和水蒸気圧は低い。そのため，たとえ水蒸気で飽和し

ていても, 水蒸気をほとんど含まない。それが体温で暖められると温度が上がり, 飽和水蒸気圧が高くなり, 相対湿度は低くなる。その空気と平衡状態になろうとして, 喉の表面から水分が大量に蒸発する。

第14章

（発展）量子力学

これまで学んだニュートン力学は, 生物資源学類の研究・教育で出てくる物理学的な話題にかなり役立つのだが, それでもまだ力不足というか, 全く歯が立たないことがある。というのも, ニュートン力学は, 分子や原子などの小ささでは効力を失う。そのようなスケールを支配するのは量子力学という全く別な理論だ。

量子力学が重要となる（生物資源学類的に）重要な現象はもうひとつある。それは**光**が関与する現象である。光は光合成を介して全ての生物資源にエネルギーを与えるが, その仕組みを理解し, 有効活用するには量子力学が必要になることが多いのだ。

一方で, 量子力学は, 量子暗号通信や量子計算機などの, 21世紀の技術革新の基盤である。

そういうわけで, 生物資源学類生を含む全大学生は, 量子力学の教育・訓練をある程度, 受ける必要がある。

ところが, 量子力学はニュートン力学に比べて段違いに難しいのだ。直感では理解できない抽象的で不思議な話が多いのと[*1], **きちんと**理解するには, どうしても高度な数学が必要だからだ。ある物理学者は「神は非常に高度な数学者であり, 宇宙を作る時に極めて高級な数学を使ったのだ」と言ったほどだ。我々は神ほど高度な数学者ではないのでどうしようもないが, それでも「化学」「化学結合論」等の授業で量子力学が出てくるので, そのほんの入り口をここで学ぼう。

ここでは, 生物資源学類 1 年生の春学期がほぼ終わる段階で理解できる（わかった気になれる）範囲で, 量子力学の片鱗を解説する。以下の話では「なぜそうなるのか」は説明できない。自然はともかくそのように振る舞うのだ。

14.1　量子は奇妙な概念

まず, 量子力学では, 物体や現象を「量子」という概念で把える。電子や原子や光は, いずれも「量子」として振る舞う。量子は, 1 個 2 個と数えられるような離散的な存在であり, そのありかたは状態ベクトルという数学的概念で表現される。「ベクトル」というからには平面ベクトルや空間ベクトルのような「大きさと向きを持つもの」（矢印）を想像しがちだが, 状態ベクトルはそういうものとは**全く違う**, 抽象的な概念だ。その「状態ベクトル」を, 位置 (x, y, z) と時刻 t の関数として表現したものを波動関数という。

よくある質問 177　「ベクトル」が「関数」になるってどういうことですか? ... 「関数もベクトルの一種だ」という話を数学（線型代数学）で聞いたことありませんか? あれです。ここでいうベクトルは, 和とスカラー倍ができるもの, つまり線型結合ができるものという, 抽象的に拡張されたベクトルです。

そして波動関数は, 「シュレーディンガー方程式」という, いかつい微分方程式に従うことがわかっている。

それがどういう方程式かは後述するとして, とりあえず重要なことを述べる: ある量子がある特定のエネルギーを持つ状態にある時, その量子のシュレーディンガー方程式は「行列の固有値と固有ベクトルを求める問題」（数学の教科書を参照せよ）に帰着する。その「固有値」がエネルギーに, 「固有ベクトル」が状態ベクトル（それを位置で表現するならば波動関数とも言える）に対応する。そこで, そのような状態とエネルギーをそれぞれ固有状態と固有エネルギーと呼ぶ。

よくある質問 178　ちょっと待って下さい! なぜ唐突に行列とか固有値とか固有ベクトルが出てくるのですか? ... そう考えるといろいろ辻褄が合うからです（笑）

よくある質問 179　電子や原子の話ですよね。そこに出てくる行列って何なのですか? ... 量子の状態に働きかける操作は行列で表すことができるのです。

よくある質問 180　働きかけるとか操作とかって何ですか? なぜ行列になるのですか? ... まあ, 今はそのくらいにしておいてとりあえず飲み込んで先に進んで下さい。

このとき状態ベクトルは時刻 t とともに振動するよう

[*1] 量子力学は物理現象の捉え方がニュートン力学とはまるきり違う。ニュートン力学では「速度」や「力」が大事な概念だが, 量子力学では, それらにこだわらない。というか, 量子力学のスケールでは, それらにこだわっても仕方ないようなふうに物体や現象が存在し, 振る舞うのである。量子力学では, 速度のかわりに運動量, 力のかわりにポテンシャルエネルギーが, それぞれ重要な役割を担う。

な関数で表されることが数学的に示される。その振動の振動数を ν, 角速度を ω とすると, 量子の固有エネルギー E は

$$E = h\nu = \frac{h}{2\pi}\omega \tag{14.1}$$

となることが示される。ここで h は以前も出てきたがプランク定数と呼ばれる定数で,

$$h = 6.62607015 \times \quad 10^{-34}\ \mathrm{J\ s} \tag{14.2}$$

である。これは量子の性質を説明する時になぜかいつも出てくる不思議な定数である[*2]。

よくある質問 181　ここで出てきたエネルギーって, 運動エネルギーですか? ポテンシャルエネルギーですか? ... 両方をあわせた力学的エネルギーのようなものです。

$h/(2\pi)$ は量子力学で頻繁にあらわれるので, 2π をいちいち書くのがめんどくさくなって, 物理学者達は, それを $\hbar$ と書き表すことにした（これを「エイチバー」と読む)。すなわち,

$$\hbar := \frac{h}{2\pi} \qquad \text{（定義）} \tag{14.3}$$

である。すると, 式 (14.1) は次式のように書ける:

$$E = \hbar\omega \tag{14.4}$$

よくある質問 182　なんか, 天下りの話ばかりでしんどいです。 ... 量子力学を最初に学ぶ時はそういうものです。これが大変にうまくできた話であることがいずれわかります。我慢です（笑）

さて, 数学的な理由から, 波動関数は, 空間の中を振動しながら広がる性質, つまり波のような性質を持つ。だから量子は「粒子の性質と波の性質の両方を持つ」と言われる。そして, その波の波長 λ は粒子の運動量 $\mathbf{p}$ と以下の式で結びつくことが実験事実から確信されている:

$$|\mathbf{p}| = \frac{h}{\lambda} \tag{14.5}$$

特に, 光はそもそも電場と磁場の振動が空間を伝わる波なので, そのようなイメージと整合する。実際, 光の状態ベクトル（波動関数）の振動の角速度 ω は, 電場や磁場の振動の角速度 ω そのものである。波としての光は, 周期 $2\pi/\omega$ の間に「光の速さ」c で波長 λ だけ進むので, $(2\pi/\omega)c = \lambda$ という式が成り立つ。この式を使って式 (14.1) の ω を消去すると, 光の量子（それを光量子とか光子という）のエネルギーは次式のようになる:

$$E = \frac{hc}{\lambda} \tag{14.6}$$

この式はいろんな本によく出てくるが, 注意すべきは, **式** (14.6) **は光子にしか成り立たない**, ということだ。一方, 式 (14.1) や式 (14.4), 式 (14.5) は光子も含めてあらゆる量子に成り立つ（電子や陽子などにも）, 量子力学の出発点となったとても大切な式である。

よくある質問 183　ということは, 電子にも角速度 ω や波長 λ があるのですか? ... はい, そうです。電子などの物質も光と同じような波っぽい性質があり, それを物質波といいます。それを利用するのが電子顕微鏡です。電子顕微鏡は光のかわりに電子の波を使うのです。

よくある質問 184　量子って素粒子のことですか? ... 素粒子は量子ですが, 素粒子でない量子もあります。原子や原子核, 陽子, 中性子などは素粒子ではありませんが量子として振る舞う（と考えることで辻褄が合うことが多い）のです。量子は特定のカテゴリの粒子ではなく, 物体や現象の見方・捉え方（モデル）なのです。

14.2　光の放出・吸収と量子力学

我々の身の回りは, 光に満ち溢れているが, その光はどのように発生するのだろう? 例えば太陽, 白熱電球, 蛍光灯, レーザー, 発光ダイオードなどはどのような仕組みで光るのだろう? 素朴な問だが, これに答えるには量子力学が必要だ。

量子力学によれば, 物体を構成する分子や原子は, 前述したように固有エネルギーを持つ。そのエネルギーは, 元をたどれば, 分子・原子・電子等の持つ運動エネルギーやポテンシャルエネルギーだ。そして固有エネルギーは, 低いものから高いものまで, 離散的に（階段状に）存在する。それらをエネルギー準位と呼ぶ。そして, 個々の分子や原子が, 異なるエネルギー準位の間で移り変わることがある。これを遷移と呼ぶ。

原子や分子が高いエネルギー準位から低い準位に遷移するとき, その差のぶんのエネルギーを, 何らかの形で放出する（でなければエネルギー保存則が成り立たない)。その「何らかの形」のひとつとして光を放出するのだ。遷移に伴うエネルギーの差が E のとき, 式 (14.6)

[*2] プランクというのは量子力学の建設に多大な貢献をした偉い物理学者。

を満たすような波長 λ を持つ光子が放出される[*3]。

また, 光が物質に当たった時, その波長 λ に（式 (14.6) によって）対応するようなエネルギー差を持つ準位があれば（そして他のもろもろの条件が揃えば）, 原子や分子はその光（光子）を吸収して, 高いエネルギー準位に遷移しうる。

このように, 物質が光を放出したり吸収したりする現象には, 原子や分子の遷移が大きく関わっている。

そういった中で, 特に興味深くて重要なのは, 太陽や白熱電球の光る仕組みである。それらは「熱エネルギーが光に転化する」という仕組みで光る。P.139 で述べたように, 物体を構成する粒子はその絶対温度に応じたエネルギーを平均的に持つ。「平均的」ということは, それよりも高めのエネルギー準位にいたり, 低めのエネルギー準位にいたりする粒子が存在する。準位が高い粒子が遷移すると, 光が放出され, 低い準位に移る。そして周囲の粒子と衝突したり光を吸収したりして, 再び高い準位に戻る。このようなことが無数に発生することで, その物体から光が出続けるのだ。この現象を熱放射と呼ぶ。

実は, 太陽や白熱電球だけでなく, ほとんど全ての物体は, **それぞれの温度に応じて熱放射している**。君の体も熱放射で光っているのだ!! ただしその光は, 人の肉眼では見えない赤外線だ。だから, 赤外線を検知できるセンサーで人体を調べれば, 君の体表面の温度がわかるのだ。赤外線体温計はそれを利用している。また, 夜行性の動物を観察するのに赤外線カメラというものをよく使う（NHK の番組「ダーウィンが来た!」を見よ）。が, それも同じ事だ。動物は体温が高いため, 周囲よりも多くの赤外線を出す。それを検出するのだ。量子統計力学という大学 3 年生レベルの物理学を使えば, 熱放射は以下の関数で表されることが証明できる。これをプランクの法則という:

$$B_\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)-1} \tag{14.7}$$

ここで, λ は光の波長, c は光速, k_B はボルツマン定数である。$B_\lambda(T)$ は, 絶対温度 T において, 波長 λ を中心とする単位波長あたり, 熱放射で物体から単位面積あたり単位時間あたりに出ていく光のエネルギーを表す関数である。実際の物体から出てくる熱放射のエネルギーはこの式で表されるよりも小さい。この式のとおりの熱放射を出す物体を黒体（こくたい）と呼ぶ。その意味で, この式で表される熱放射のことを黒体放射という[*4]。

14.3 シュレーディンガー方程式をわかったつもりになろう

本書の最後にシュレーディンガー方程式を説明しよう。それはこういうゴツい方程式だ:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+V\psi = E\psi \tag{14.8}$$

ここで, x, y, z は位置。m は量子の質量。V はポテンシャルエネルギー（別名位置エネルギー。第 8 章, 第 10 章で出てきたやつ）。h はプランク定数。ψ は波動関数といって, x, y, z という 3 つの変数（位置）の関数である。

多くの理系大学で 1 年生はまず化学の授業で（物理学の授業ではない!）これを目にして心折れるものである（私もそうだった）。この方程式はニュートンの運動方程式 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ なんかとはレベルが全く違う。諸君はこれまで, 科学の様々な概念をイメージや論理の積み重ねで理解してきただろうが, シュレーディンガー方程式はそれは通用しないと思おう。シュレーディンガー方程式を「理解」するには, 長い道のりが必要である。

本節は, その長い道のりを大胆にスキップして, とりあえず諸君に「わかったつもり」になってもらい, 心折れずにすむことを目的とする。なお私は物理学の専門家ではないので, 以下に書いたことの中には（特に歴史認識について）物理学者から見たら的はずれなこともあるかもしれない。あらかじめご容赦願う。

よくある質問 185 これは何を表す方程式なの? ... 量子の運動を表す方程式です。$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ の量子力学版です。

よくある質問 186 波動関数って何ですか? 何を表すのですか? ... 量子の性質や状態に関する情報を持っていると思われる数学的な概念です。波動関数が何を表すかは, シュレーディンガー方程式を考えたシュレーディンガーさんさえも, 最初はわからなかったそうです。

[*3] このような量子力学的な効果とは別の仕組みで発生する光もある。その一つが「シンクロトロン放射」である。それを利用して短波長の強い光を人工的に作ることができ（放射光施設）, 生体分子の動態解明などに使われる。

[*4] 式 (14.7) の分母の, $\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)$ という項に注意しよう。これは式 (14.6) を使うと $\exp\left(\frac{E}{k_B T}\right)$ となる。これは P.155 の式 (13.95) で出てきたアレニウス型関数（の逆数）である。ここにはボルツマン分布を量子力学に拡張した考え方が入っているのだ。

よくある質問 187　何を表すかわからない関数に関する方程式をシュレーディンガーは考えたのですか? ... そうです。

よくある質問 188　さっぱりわかりません。シュレーディンガーは何をしたかったのですか? ... シュレーディンガーは波動関数そのものに興味があったのではなく, 量子のもろもろの現象とうまく辻褄の合う方程式を探していたのです。そのとき, よくわかんないけど, なんか関数を考えればうまくいくということに気づいたというわけ。それが波動関数。

よくある質問 189　さっぱりわかりません。それで波動関数がわかったとしても, そもそもそれが何を表すかがわからなかったら無意味じゃないですか? ... そこが面白いと言うか変なところで, 波動関数を時刻で微分したらエネルギーがわかり, 位置で微分したら運動量がわかる, というような仕掛けになっているのです（この後で述べます)。波動関数そのものはブラックボックスで, それに何か数学的な操作をしたら, 意味のある情報を取り出せる, というわけです。そういうふうにすればいろんなことが辻褄が合う, ということにシュレーディンガーは気づいたのです。この時点で既にぶっ飛んでますね。

よくある質問 190　波動関数の絶対値の 2 乗が, 量子の位置に関する確率密度関数を表す, ってどこかで聞きましたが? ... シュレーディンガー方程式が発見された後でわかったことで, ボルンという学者が提唱しました。確率解釈と言います。

よくある質問 191　波動関数とシュレーディンガー方程式は同じものですか? ... 違います。シュレーディンガー方程式は一種の「微分方程式」です。それを「解く」ことで「関数」が解として求まります。それが波動関数です。

よくある質問 192　なぜ方程式を考えるのですか? 波動関数が大事なら, 最初から波動関数を考えればいいんじゃないですか? ... 波動関数は, それぞれの量子が置かれた状況によって違います。状況に応じた波動関数を求めないと意味がありません。シュレーディンガーはその求め方を, 微分方程式という形で見つけたのです。

よくある質問 193　どうやったらこんな複雑な方程式を導出できるのですか? ... まず明言しておきたいのは, シュレーディンガー方程式を「導出」するには, 量子力学の根本原理から出発する必要があります。それはとても抽象的で数学的であり, 皆さんの勉強のレベルでは理解できません。その片鱗を述べると, 「量子の状態は, 複素ヒルベルト空間のベクトルとして表現でき, 物理量はエルミート作用素の固有値として確定する」というようなものです。さっぱりわかりませんよね。実はシュレーディンガー自身は, そういう正攻法でこの方程式を導出したのではなく, それまで知られていた物理学の体系の中で, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ を思いっきり数学的に変換して波っぽく扱えるようにした理論（ハミルトン・ヤコビ方程式というもの）を踏み台にして, そこから飛躍する形でこの方程式を「えいやっ」と提案しました。

その後, シュレーディンガー方程式はいろんな学者によっていろんな見方で検討され, 「これ, うまく実験事実に合うんじゃね?」とされて, 受け入れられ, シュレーディンガーはその発見者ということでノーベル賞をもらいました。

だから, 数学や物理学の天才でもない大学 1 年生の皆さんが, この方程式を, 何らかの直感的・常識的な概念から出発して「導出」するなどということは, どだい無理なのです。

よくある質問 194　じゃあどうすればいいのですか? 黙って受け入れ, 闇雲に覚えろってことですか? ... 残念ながらそれに近いです。物理や数学は, ちゃんと積み上げて理解することが大事で, 丸暗記は駄目って言われますよね。私もそう思います。でも, 量子力学については別です。これはホントに手に負えないのです。「理解して覚える」でなく, 「覚えてから理解する」の方が早いです。

よくある質問 195　でも, シュレーディンガー方程式の導出を他の授業やテキストで見かけますが。... 大学 1 年生にいきなりあの複雑な式を見せるのはあんまりなので, せめて既存の知識になんとかして関連付けてあげようという「親心」です。そう, 導出というより「関連付け」です。ではそれをここでもやってみせましょう。

まず, 実験事実に基づく前提として, 文句言わずに受け入れねばならないことを述べる。量子が「正弦波」として振る舞うとき, そのエネルギー E は $h\nu$ であり（式 (14.4)）, 運動量の大きさは $|\mathbf{p}| = h/\lambda$ である（式 (14.5)）, ということである。ここで, 正弦波とはひとつの三角関数（サインやコサインのこと。タンジェントは除外）で表現できる波のことである。具体的にはどのような関数で表されるのだろうか? 最も簡単な三角関数は $\cos x$ である（$\sin x$ でもよいのだがここでは $\cos x$ を考える)。その波長（周期）は 2π である。波長を λ にするために, x 方向に $\lambda/(2\pi)$ 倍引き伸ばそう。すると $\cos(2\pi x/\lambda)$ になる（関数 $y = f(x)$ を x 方向に a 倍引き伸ばすと $y = f(x/a)$ になる, と数学の教科書に書いてあるだろう)。この関数を全体的に定数倍してもよいということにして, 波動関数として,

$$\psi(x) = A\cos\frac{2\pi x}{\lambda} \tag{14.9}$$

というものを考える（この A が「定数倍」の定数)。本来, 波動関数は y, z にも依存するが, そのことは後で考える。

さて, こいつを x で微分すると（以後, $\psi(x)$ の (x) は適宜省略）, 以下のようになる:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{2\pi}{\lambda} A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \tag{14.10}$$

偏微分記号を使ったのは, 後で y や z に関する微分（偏微分）も考えるからである。ではもう一回 x で微分してみよう。するとこうなる:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \tag{14.11}$$

ここで, 右辺の A 以下はもとの関数 ψ と同じなので,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} \psi \tag{14.12}$$

と書き換えることができる。

ここで, 先程大事だと言った式 (14.5) を使って右辺を書き換える（λ を消去する）と,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{(2\pi)^2 |\mathbf{p}|^2}{h^2} \psi \tag{14.13}$$

となる。これを $|\mathbf{p}|^2 =$ の形に変形すると（なぜそういうことをするかはすぐ後でわかる）, 次式になる:

$$|\mathbf{p}|^2 = -\frac{h^2}{(2\pi)^2 \psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{14.14}$$

（ここで式 (14.3) を使った。）

ところで, ニュートン力学では, 粒子の運動量 $\mathbf{p}$ は, 質量 m と速度 $\mathbf{v}$ を使って $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ と定義された。また, 粒子の運動エネルギー T は, $T = m|\mathbf{v}|^2/2$ だった。これらから $|\mathbf{v}|^2$ を消去すれば, $T = |\mathbf{p}|^2/(2m)$ となる。ここに上の式の $|\mathbf{p}|^2$ を入れると,

$$T = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{14.15}$$

となる。これを, 力学的エネルギー保存則

$$T + V = E \tag{14.16}$$

（V はポテンシャルエネルギー, E は力学的エネルギーつまり全エネルギー）
に代入してみよう。するとこうなる:

$$-\frac{\hbar^2}{2m\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V = E \tag{14.17}$$

この両辺に ψ を掛けると,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi = E\psi \tag{14.18}$$

となる。なんと!! これは式 (14.8) に似ているではないか!! 実際, これは式 (14.8) の「1 次元バージョン」の方程式である。ここで, 関数 $\psi(x)$ を (x, y, z) の 3 つの変数をとる関数 $\psi(x, y, z)$ に形式的に拡張してみよう。とはいうものの, 実質的には x にだけしか依存しない, という場合, つまり

$$\psi(x, y, z) = A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \tag{14.19}$$

という関数 ψ を考えよう。すると,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \tag{14.20}$$

はいずれも 0 である（定数の微分は 0 だから）。従って, 式 (14.18) を 3 次元に拡張した,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\Big) + V\psi = E\psi \tag{14.21}$$

を, 式 (14.19) は満たすのである。これは式 (14.8) と全く同じ方程式だ。

ここまででわかったように, 式 (14.21) は, 量子力学の大切な原理の一つである式 (14.5) と, 物理学全般の大切な原理であるエネルギー保存則すなわち式 (14.16) に目配りをしながら, 文字通り「波っぽい」関数である波動関数を解に持つことに成功しているのである。

よくある質問 196　なんかこじつけっぽくていまいち納得できません。… そりゃそうですよ。こじつけですから。言ったでしょ? シュレーディンガー方程式をちゃんと理解するのは簡単ではないって。大学 1 年生のレベルでは「分かったつもり」が精一杯です。

さて, 物理学では,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \tag{14.22}$$

を $\triangle\psi$ と書いて（$\triangle$ はラプラシアンと呼ぶ）,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \triangle\psi + V\psi = E\psi \tag{14.23}$$

と書くことも多い。さらに,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \triangle\psi + V\psi \tag{14.24}$$

を $H\psi$ と書いて（この H はハミルトニアンと呼ぶ）,

$$H\psi = E\psi \tag{14.25}$$

と書くことも多い。これら, 式 (14.21), 式 (14.23), 式 (14.25) はいずれも同じ方程式であり,「定常状態のシュレーディンガー方程式」と呼ぶ。

よくある質問 197 式 (14.25) **が成り立つなら, 結局** $H = E$ **ですか**? ... 違います。$H\psi$ はあくまで式 (14.24) を意味しますから, ψ を「約分」したりはできません。

よくある質問 198 式 (14.9) **という簡単な関数を, わざわざ変にいじくり回して, 面倒くさい複雑な方程式をこしらえるのはなぜですか**? ... 物理学者は方程式を探すのが仕事なのです。物理法則は方程式で記述されるはずだ! という思い込みにも似た信念を物理学者は持っているのです。関数は 1 つの特定の現象を表すにすぎないけれど, その関数の背後に, その関数を単なる 1 例として解に持つような方程式があって, そいつにもっと普遍的・一般的な法則が隠されているはずだ! と信じているのです。要するに, 方程式を見つけることが彼らにとって「現象を理解する」ということなのです。学生は, 先生や教科書から方程式が与えられ, それを解いて答を出すのが学問だと思っていますが, 物理学者は, 答（現象）をもとに, その背後にある方程式（基本法則）を遡って探すのが学問だと思っているのです。よく知られている現象たちを関数で表し, それらを矛盾なく解に持つ方程式を探す。それが見つかると, その方程式を別の条件で解いたり数学的に変形し, 未知の現象を予測する。それを実験や観測で確かめる。それが物理学の基本法則の発見のプロセスなのです。

みんながよく知っている $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ もそうです。ペスト禍で大学が閉鎖され, 実家に帰ってヒマになったニュートンが, 惑星の運動（ケプラーの法則）を解として持つような方程式を探っているうちに $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ にたどり着いたのです。そして $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ を解けば, たくさんの現象を矛盾なく説明できる, ということは皆さんは本書で学んだでしょう。

ところが 19 世紀の終わり頃に, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ では説明できない現象がたくさん見つかったのです。特に, 原子内の電子。原子が吸収・放出する光の波長を説明するには $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ では駄目だとわかってきました。それが量子力学の幕開けであり, 新たな方程式探しの幕開けだったのです。そのゴールがシュレーディンガー方程式だったのです。

よくある質問 199 定常状態ってどういうことですか? ... 波動関数の位置依存性と時刻依存性を分離して（別々の関数の積として）表現できるということです。その場合, 量子の位置に関する確率密度関数は時刻によって変わらなくなります。エネルギーが確定する状態とも言えます。このあたりは「ライブ講義応用数学」の第 11 章を読んで下さい。

よくある質問 200 量子力学の大事な原理のもうひとつである, 式 (14.1), **つまり,** $E = \hbar\omega$ **はどうなったのですか, 上の話では結局出てきませんでしたが。**... 定常状態のシュレーディンガー方程式（式 (14.21), 式 (14.23), 式 (14.25)）の右辺の E が $\hbar\omega$ に等しくなるはずです。それは, 波動関数を時刻 t に依存させることで実現します。以下で説明しましょう:

ではシュレーディンガー方程式に時刻を含ませてみよう。まず, 量子の波動関数を空間を 3 次元にして時間も含むようにするには, 式 (14.19) を拡張して以下のように表現するのが具合がよいということがわかっている:

$$\psi(x, y, z, t) = Ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \tag{14.26}$$

ここで (k_x, k_y, k_z) を波数と呼び, $\mathbf{k}$ と表す。波数と波長 λ には $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ という関係があり, 運動量 $\mathbf{p}$ とは

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \tag{14.27}$$

という関係がある（実は式 (14.5) はここから出てくる）。また, i は虚数単位である。つまり, 波動関数が複素数になるのだ!!

式 (14.26) を解に持つように式 (14.21) を拡張するには, 右辺の $E\psi$ を $i\hbar\partial\psi/\partial t$ に取り替えて,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\Big) + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{14.28}$$

とすればよい。実際, 式 (14.28) に式 (14.26) を代入してみると（$i^2 = -1$ に注意）, 左辺は

$$\begin{aligned}\frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\psi + V\psi &= \frac{\hbar^2}{2m}|\mathbf{k}|^2\psi + V\psi \\ = \frac{|\hbar\mathbf{k}|^2}{2m}\psi + V\psi &= \Big(\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + V\Big)\psi\end{aligned} \tag{14.29}$$

となり（式 (14.27) を使った）, 右辺は

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hbar\omega\psi \tag{14.30}$$

となる。これらをイコールと置いて, ψ を約分すれば,

$$\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + V = \hbar\omega \tag{14.31}$$

となる。左辺は力学的エネルギー, 右辺は量子のエネルギー（式 (14.1)）となり, これらが等しいということで辻褄が合ってめでたしである。

式 (14.28) を, 式 (14.25) に寄せて簡略的に書けば,

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{14.32}$$

となる。実はシュレーディンガー方程式といえば, 式 (14.28) や式 (14.32) が「本物」である。

よくある質問 201 なぜ複素数になるのですか? ... 式 (14.1)（$E = \hbar\omega$）をシュレーディンガー方程式に組み込むには, ω は角速度なので波動関数が t の三角関数になるようにしたい。ところが $\cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$ の形で t を波動関数に組み込むと, ω を引っ張り出すために t で微分したら, $\omega\sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$ となって, サインに比例します。一方, 運動エネルギーは運動量の 2 乗に比例し, それは $|\mathbf{k}|^2$ に比例するので, $\mathbf{k}$ を 2 回引っ張り出すために波動関数を位置で

2 階微分する必要があります。コサインの 2 階微分はコサインに比例します。片方はサイン, もう片方はコサインに比例してしまい, イコールにならないのです。これを三角関数の複素数版であるオイラーの公式が解決するのです。式 (14.26) のような指数関数なら t で 1 回微分しても, 位置で 2 回微分しても, もとの関数に比例するので, 係数を調整すればイコールになるのです。その調整のところにエネルギー保存則を押し込んでいまえば辻褄が合うのです。

よくある質問 202　なんだかわかったようなわからないような...。こうすると形式が整うとか辻褄が合うとか, そんなテキトーなこじつけな感じでいいのですか? ... 言ったでしょ? こじつけだって。ここでは, シュレーディンガー方程式を「わかったつもり」になってもらうために, こじつけ満載で説明しました。1 年生の間はとりあえずそれで我慢してください。それで量子力学を使った化学とかの話が進みますから。

よくある質問 203　わかったつもりじゃ駄目だ!って, 先生, 言ってたじゃないですか... 困りましたね。量子力学を 1 年生の授業で持ち出すのは正直, 無茶だと私は思うのですが, 大学のカリキュラムはどこでもそうなっているから仕方ないのです。少しでも量子力学を 1 年生にわかってもらうために, 「ライブ講義 大学生のための応用数学」の第 11 章を書きました。がんばってそこまで読んでみてください。それと, 次の本もお薦めです:

松浦壮「量子とはなんだろう」講談社ブルーバックス

本気でシュレーディンガー方程式を理解するには, 数学と物理をがっつり勉強して, 量子力学をじっくり勉強する必要があります。なかなか険しい道ですが, 驚きと興奮に満ちた知的冒険が待っています。

14.4　前期量子論とボーア模型

さて, シュレーディンガー方程式を使うと, 原子の性質や構造を大変にうまく説明できるのだが, その考え方は非常に抽象的であり, 数学的にも高度である。量子力学はそのレベルに到達する前に, もっと素朴で体系性を欠いた, 黎明期とも言える時期があった。その頃の量子力学を前期量子論という[*5]。

前期量子論は式 (14.7) で述べた「熱放射」の研究が契機となって始まった。そしてその著しい成果はボーア模型というものである。これは Niels Bohr という物理学者が考案した, 原子の構造を説明する理論である。実際はいろいろ無理・不合理なことがあるので, 非現実的でダメな理論であり, シュレーディンガー方程式にとって代わられてしまった。しかし, 歴史的・教育的に今も大事にされるので（シュレーディンガー方程式よりもずっと簡単だからだろう）, ここで説明しておこう。

ボーアは, 原子の中では原子核を中心として電子が等速円運動をしていると考えた。実際はこれは間違っているのだが, ここではボーアの考え方をたどるために, ともかくそう考えよう。正の電荷を持つ原子核と, 負の電荷を持つ電子とが, 静電気力で互いに引き合う。その引力が向心力となり, 電子は等速円運動すると考えるのである。

今, 陽子 1 個が原子核であるような水素原子を考える。すると, 原子核の電荷は q_e, 電子の電荷は $-q_e$ である（q_e は電荷素量）。原子核と電子の距離を r（それは電子の円運動の半径でもある）とすると, 電子が原子核に引っ張られる力（静電気力）の大きさは, kq_e^2/r^2 である。一方, 電子の質量を m, 速さを v とすると, 電子の等速円運動の向心力は, mv^2/r である。従って,

$$\frac{kq_e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \tag{14.33}$$

が成り立つ。ところが, r や v はどのくらいの値なのか, よくわからない。ここで量子力学の考え方をつまみ食い的に使う。円運動の角運動量（の円に垂直な成分）を L とすると, 式 (11.35) を思い出せば,

$$L = n\hbar \tag{14.34}$$

である（n は何らかの整数)。一方, ニュートン力学では, $L = rmv$ である。従って,

$$n\hbar = rmv \tag{14.35}$$

が成り立つ。式 (14.33) と式 (14.35) を連立させて, r を消去すると, v が次式のように決まる:

$$v = \frac{kq_e^2}{n\hbar} \tag{14.36}$$

以上が準備である。ここで, 電子の力学的エネルギー E を求めよう。それは運動エネルギー $mv^2/2$ とポテンシャルエネルギー $-kq_e^2/r$ の和なので,

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{kq_e^2}{r} \tag{14.37}$$

である。ところが, 式 (14.33) より, $kq_e^2/r = mv^2$ だ

[*5] 量子力学と量子論は同義語である。従って, 前期量子論を前期量子力学と言ってもよいのだが, 慣習的には前期量子論ということが多い。

から，

$$E = \frac{mv^2}{2} - mv^2 = -\frac{mv^2}{2} \tag{14.38}$$

となる。この右辺の v に式 (14.36) を入れると，

$$E_n = -\frac{(kq_e)^2}{2(n\hbar)^2} \tag{14.39}$$

となる。ここで，右辺を見るとエネルギーは整数 n に依存することが明らかなので，E を改めて E_n と書いた。式 (14.39) は，実際の水素原子の中の電子のとりえるエネルギー（エネルギー準位）に一致するのである。

さて，前期量子論は，式 (14.4) や式 (14.27) や式 (14.34)，すなわち，

$$E = \hbar\omega \tag{14.40}$$

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \tag{14.41}$$

$$L = n\hbar \tag{14.42}$$

という式で，粒子（量子）のエネルギー，運動量，角運動量といった量をプランク定数を介して波の性質（角速度，波数，波の個数）に結びつけることで，波の性質を取り込んで物理学を拡張することを試みた。それはボーアモデルなどの一定の成果を収めたのだが，場当たり的で体系性を欠いており，多くの矛盾や限界にぶつかった。それを解決するためには，人類はニュートン力学を捨て，前期量子論を捨て，大きく発想を変えて自然観・世界観を刷新し，線型代数という数学に全面的に依存する理論を作る必要があった。それがシュレーディンガー方程式に代表される新しい（といっても 20 世紀前半に作られた）量子力学であり，それが現代の量子計算機や量子暗号などの最新技術の基礎になっている[*6]。

[*6] 量子力学の普通の教育は，まず前期量子論から入り，そこからシュレーディンガー方程式へ至る発想を説明していく。しかし本書はそのアプローチはとらなかった。なぜならば，シュレーディンガー方程式とその背後にある新しい量子力学の発想の本質は，ニュートン力学や前期量子論とはほとんど関係ない（と私は思う）からである。それを結びつけて語るのはこじつけのようなものであり，かえって初学者は混乱するのではないかと思う。ものの見方を刷新し，全く新しい別物を学ぶつもりで向き合うほうが，量子力学は頭に入りやすいと私は思う。

索引